УДК 519.925.51

Рутицька В.В.[1], к.т.н.

Про моделювання динаміки портфеля інвестицій в умовах параметричної невизначеності

Розглядаються задачі ідентифікації параметрів математичної моделі та про оптимальну диверсифікацію інвестиційного портфеля.

Ключові слова: математична модель, ідентифікація параметрів, диверсифікація інвестиційного портфеля

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д

e-mail: vlarut@gmail.com

V.V.Rutytska[1], Ph.D.

On modeling the dynamics of portfolio investments under parametric uncertainty

We consider the problem of identifying the parameters of mathematical models and optimal portfolio diversification.

Key Words: mathematical model, identification of parameters, portfolio diversification

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d

e-mail: vlarut@gmail.com

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Сучасні методи прикладного математичного моделювання дозволяють розв'язувати складні задачі побудови та аналізу траєкторій руху динамічних систем. Загальна схема застосування таких методів включає:

- визначення класу рівнянь та структури моделі;
- визначення параметрів моделі;
- ідентифікацію початкового стану системи при відомих значеннях параметрів;
- ідентифікацію параметрів моделі при відомому стані системи;
- задачі управління динамікою системи.

Перелік задач можна продовжити, але зупинимось на деяких, що пов'язані із ідентифікацією параметрів моделі та початкового положення системи .

Розглянемо «ринкову модель Шарпа» [1] з метою перейти від задачі статичної до динамічної

$$r = \alpha + \beta SM_{ind} + \varepsilon . \qquad (1)$$

Рівняння (1) описує лише загальну структуру формування ринкової вартості акції. Аргументи правої частини детально описані в [1]. Із наведеного вище співвідношення видно, що зміна ринкової вартості акції формується за рахунок інтегрального впливу індексу фондового ринку та випадкової складової ε. Коефіцієнт β можна розглядати як характеристику впливу індексу ринку на формування ринкової вартості однієї акції. Зважаючи на те, що такі процеси відбуваються у часі, можемо записати

$$r(t) = \alpha(t) + \beta SM_{ind}(t) + \varepsilon .$$

Тоді

$$r(t + \delta t) = r(t) + \beta SM_{ind}(t) .$$

Було б значним спрощенням при моделюванні такого складного процесу розглядати функцію SM_{ind} як основну і єдину, що формує значення $r(t + \delta t)$. Аналіз факторів, що впливають на динаміку процесу дає підстави стверджувати, що до таких суттєвих факторів можна віднести також кореляційні залежності між цінними перами, а також інфляцію [2]. Тому (1) запишемо у вигляді

$$r_i(t+\delta t) = r_i(t) + \beta(SM_{ind}(t), I(t), \rho_{ij}, r_i(t)), \qquad (2)$$

$i, j = \overline{1, n}$.

Враховуючи сказане, праву частину (2) запишемо так

$$r_i(t+\delta t) - r_i(t) = ((\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t.$$

Тоді

$$\frac{r_i(t+\delta t) - r_i(t)}{\delta t} = ((\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j)\delta t.$$

Здійснивши граничний перехід за умови, що $\delta t \to 0$, отримаємо

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_i, \quad i = \overline{1, n},$$

де α_1, α_2 - параметри моделі.

Динамічне рівняння формування ринкової вартості акції можна розглядати також у такому запису

$$\frac{dr_i}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t))r_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} r_j,$$

$i = \overline{1, n}$.

У цьому випадку ρ_{ij}, $i = \overline{1, n}$ є вектором параметрів моделі, що враховує кореляційні залежності між акціями. Тут n – кількість акцій, з якими корелює i – а акція. Перейдемо до задачі ідентифікації параметрів побудованої математичної моделі. До найбільш відомих методів ідентифікації параметрів дискретних та неперервних динамічних моделей відносять:

- кореляційно – дисперсійний аналіз;
- підходи, що ґрунтуються на принципах теорії стійкості;
- підходи, що ґрунтуються на методах аналізу чутливості розв'язків.

Для зручності здійснення математичних перетворень параметрично задані моделі формування ринкової вартості акції та портфеля акцій [2] запишемо у загальному вигляді

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = f(r_i, t, \alpha), \qquad (3)$$

$r_i(t_0) = r_0$, $t \in (t_0, T)$, $i = \overline{1, n}$.

і

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t). \qquad (4)$$

відповідно. Тут r_i – очікувана ринкова вартість акції; r_p – очікувана ринкова вартість інвестиційного портфеля; x_i – частка акцій i – того виду у портфелі; t – час; α – вектор параметрів моделі.

Скористаємось відомою статистичною інформацією про динаміку ринкової вартості відповідних інвестиційних напрямків $\overline{r_i}(t)$.

На її основі розіб'ємо інтервал інтегрування на підінтервали $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_T$. Будемо шукати оптимальні на підінтервалах значення координат вектора параметрів α. Для цього на початковому підінтервалі для i – того напрямку інвестування і для вибраного значення параметра α_0 розв'яжемо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_0)$, $r_i(t_0) = r_{i0}$, $t \in (t_0, t_1)$.

Нехай розв'язком цієї задачі буде траєкторія $r_1(t)$, $t \in (t_0, t_1)$.

Далі сформулюємо оптимізаційну задачу з метою отримання оптимального значення параметра α_1^*

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} (r_i^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r}_i(t))^2 \qquad (5)$$

або

$$\alpha_1^* = arg \min_{\alpha} \max_{t} (r^0(r(t_0), t, \alpha) - \overline{r}_i(t))^2. \qquad (6)$$

Тут через $r^0(r(t_0), t, \alpha)$ позначено розв'язок задачі Коші на першому інтервалі.

Наведена процедура дозволяє визначити оптимальні з точки зору критеріїв (5) або (6) параметри моделі.

Аналогічні задачі розв'язуємо на інших інтервалах розбиття. На k – тому кроці алгоритму процедура визначення оптимальних значень параметрів динамічної моделі може бути такою:

1. Розв'язуємо задачу Коші

$\dot{r}_i(t) = f(r_i, t, \alpha_{k-1})$, $r_i(t_{k-1}) = r_{k-1}$, $t \in (t_{k-1}, t_k)$, $i = \overline{1, n}$.

2. Будуємо траєкторію руху системи із точки t_{k-1} до точки t_k при значенні параметра α_{k-1}^*. При цьому значенням функції у момент часу t_k буде r_k.

3. Оптимізуємо параметр α системи на цьому інтервалі. Для цього сформулюємо та розв'яжемо оптимізаційну задачу

$$\alpha_{k-1}^{*} = arg \min_{\alpha}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^{*}) - \overline{r}_{k-1}(t))^2$$

або

$$\alpha_{k-1}^{*} = arg \min_{\alpha} \max_{t}(r^0(r(t_{k-1}), t, \alpha_{k-2}^{*}) - \overline{r}_{k-1}(t))^2 .$$

Розв'язком кожної з них буде значення параметра α_{k-1}^{*}, що переводить систему із точки r_{k-1} у точку r_k.

Наведена вище процедура дає можливість будувати послідовність значень параметрів α математичної моделі, яка дозволяє моделювати поведінку та прогнозувати очікувану прибутковість інвестиційного напрямку r_i у вибрані моменти заданого інвестором інтервалу часу. Варто відмітити, що при розбитті інтервалу інтегрування на підінтервали необхідно враховувати також значення складових вектора станів системи для коректного застосування визначених параметрів при розв'язанні відповідних траєкторних задач.

Розглянемо детально задачу про побудову "гарантованої" множинної оцінки параметрів математичної моделі.

Вектор параметрів моделі розглянемо у вигляді

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$,

за умови $x(t_0) = x_0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо точку α_0 у просторі параметрів

$\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$.

І нехай це значення параметрів будуть розв'язком задачі параметричної ідентифікації моделі (1). Навколо точки α_0 опишемо коло одиничного радіуса

$$(\alpha_1 - \alpha_{0_1})^2 + (\alpha_2 - \alpha_{0_2})^2 = 1$$

з центром у т. $(\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$. Довжина кола при цьому буде $l = 2\pi$. Поділимо цю лінію на n рівних частин, причому значення n вибирається у залежності від точності отриманого розв'язку задачі з побудови гарантованої множинної оцінки параметрів. Розглянемо довільну точку $\alpha_k = (\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})$.

Проведемо дотичну до кола у цій точці. Рівнянням її буде

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}).$$

Рівняння нормалі до дотичної у цій точці матиме вигляд

$$F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_2 - \alpha_{k_2}) = F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1}).$$

Нові значення параметрів α, які задовольняють умовам програмного функціонування системи, будемо шукати на нормалі. Із рівняння нормалі визначимо α_2

$$\alpha_2 = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Нове положення координати α_2 визначимо, змінивши положення координати α_1

$$\alpha_{N_1} = \alpha_1 + \delta\alpha_1, \quad \delta > 0 .$$

$$\alpha_{N_2} = \frac{F'_{\alpha_2}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})(\alpha_1 + \delta\alpha_1 - \alpha_{k_1})}{F'_{\alpha_1}(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2})} + \alpha_{k_2}.$$

Таким чином, отримано нове значення параметра $\alpha_N \in A$, де $A -$ обмежена замкнута множина параметрів математичної моделі

$\alpha_N = (\alpha_{N_1}, \alpha_{N_2})$.

Критерії якості для перевірки належності параметра допустимій множині можуть бути такими

$$\sum_i (x^0(x_0, t_i, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t_i))^2 < \varepsilon , \quad (5)$$

$$\max_t (x^0(x_0, t, \alpha_\delta) - x_{\exp}(t)) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

Наведена вище процедура реалізує рух параметра α вздовж нормалі в один або інший бік до тих пір, доки виконується один із вибраних критеріїв.

Інший метод визначення «гарантованих» значень полягає у побудові оптимальної за об'ємом еліпсоїдальної множини параметрів математичної моделі.

Такий еліпсоїд будемо називати гарантованою еліпсоїдальною оцінкою параметрів моделі (1) при застосуванні критеріїв (5) або (6).

Оцінка будується на основі розв'язків задачі параметричної ідентифікації математичної моделі (1) та відомих спостережень у вигляді:

$$Q(B,d) : \{(B(\alpha - d), \alpha - d) \le 1\}, \quad (7)$$

де B - симетрична додатньо–визначена матриця, що задає геометрію множинної оцінки у просторі параметрів α, $\alpha \in R^n$; $d -$ геометричний центр еліпсоїда, $d \in R^n$. Разом з тим, множину (7) будемо називати гарантованою множинною оцінкою, якщо кожне значення параметра α, отримане для довільних спостережень, належить $Q(B,d)$.

Ітераційна процедура методу побудови гарантованої множинної оцінки реалізує уточнення елементів матриці B та вектора d на кожному кроці і детально описана у [3].

Побудована на основі першого або другого підходу допустима множина параметрів може бути використана для визначення ефективної (за Г. Марковицем) множини оптимальних інвестиційних портфелів ризикованих цінних паперів.

Одна із наведених на початку статті задач полягає у визначенні початкового стану системи при відомих параметрах моделі. На прикладі математичних моделей (1) та (2) можна показати, що початкова ринкова вартість акції при заданому кінцевому її значенні може бути розрахована за формулою

$$r_i(t_0) = r_i(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f(r_i, t, \alpha^*)dt, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тут α^* – елемент оптимальної множини параметрів, побудованої одним із наведених вище способів.

У цьому зв’язку актуальною є задача про побудову оптимального стартового інвестиційного портфеля при заданому інтервалі інвестування та очікуваній прибутковості у кінцевий момент часу. Аналогічно попередньому випадку

$$r_p(t_0) = r_p(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} f^{p}(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i, t)dt.$$

Тут $\dot{r}_i$ – визначається за формулою (1), а права частина рівняння детально описана в [1].

Така задача має практичне значення, оскільки інвестор отримує можливість визначати «стартовий» портфель для заданого рівня очікуваної прибутковості у визначений момент часу у майбутньому як для портфеля, що складаються із однієї акції, так і набору акцій.

Наведена вище постановка задачі про оптимальне інвестування може бути уточнена за рахунок розбиття інтервалу інвестування на підінтервали, що можуть відповідати змінам, які відбуваються на ринку. У такому разі для оперативного їх урахування при побудові оптимального диверсифікованого інвестиційного портфеля можна застосувати множини досяжності, які, на основі застосування методів теорії оптимального керування, дозволяють оперативно та ефективно реагувати на зміни, що відбуваються на ринку.

Запропонована в даній роботі математична процедура дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв’язати задачу параметричної та гарантованої множинної ідентифікації параметрів і на основі розроблених алгоритмів визначення допустимої множини параметрів математичної моделі знайти розв’язок задач побудови траєкторії ринкової вартості для математичних моделей (1) та (2) та оптимальної диверсифікації інвестиційного портфеля ризикованих цінних паперів.

Список використаних джерел

1. William F. Sharpe, Gordon J. Alexander, Jeffrey W. Bailey Investments. – Prentice Hall, 1999. – 992p.
2. Garashchenko F.G., Kulyan V.R., Rutitskaya V.V. Quality analysis of mathematical models of investment management. –Kyiv, //Cybernetics and computing engineering. – 2005. – N 148. – p.3-10. (in Russian).
3. Bublik B.N.,Garashchenko F.G., Kirichenko N.F. Structural and self-reactance optimization and stability of dynamics of bunches. -Kyiv, Naukova dumka, 1985. –304p. (in Russian).
4. Krylov I.A., Chernousko F.L. Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems. – Moskow, Nauka, 1971. –247p. (in Russian).

Надійшла до редколегії 28.11.2013р.