УДК 519.87

Івохін Є.В.[1], д.ф.-м.н, доцент

Про багатоіндексні транспортні задачі та способи їх фазифікації

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м.Київ, пр-т Глушкова, 4д, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

Ivohin E.V.[1], Dr.Sci.

The multi-index transportation problems and approaches to their fuzzification

[1]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Glushkova st., 4d, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua

В роботі розглянуто класифікацію багатоіндексних задач лінійного програмування. Наведено твердження щодо існування розв'язків багатоіндексної транспортної задачі. Запропоновано два принципові підходи для визначення нечітких багатоіндексних задач, зазначається можливість розв'язання нечіткої транспортної задачі з ресурсами, заданими нечіткими трикутними числами.

Ключові слова: транспортна задача, багатоіндексна модель, нечітка множина.

This paper considers the approaches to the classification multi-index linear programming problems. It were considered the concepts of indexes. The different types of transport problems were described. The necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of multi-indexed transportation problem are given. The two basic approaches to define fuzzy multi-index tasks are offered. The possibility of solving the fuzzy transportation problem with the resources given by triangular fuzzy numbers is proposed. Formulated model of problems that is most close to the real transportation problems. Proposed scheme in which the values of needs of consumers or carrying capacities of intermediate points are defined as the fuzzy variables. Then it is being done the transform the problem to a parametric optimization problem of a special kind. It was noted about the importance of the multi-index transportation problems solving.

Key words: transportation problem, multi-index model, fuzzy sets.

Статтю представив д.т.н., проф. Волошин О.Ф.

Вступ. Класична двохіндексна транспортна задача [1] виникає в разі перевезення однорідного продукту між пунктами виробництва та спожи-вання. Проте в реальних умовах доводиться здійснювати перевезення, для яких загальна вартість транспортування (або значення якого-небудь іншого критерію) залежить не лише від відстані між пунктами, але і від інших, іноді суб'єктивних, чинників. Це вимагає збільшення індексності задачі. Розглянемо основні теоретичні аспекти багатоіндексних задач лінійного програмування (ЗЛП), яким останнім часом приділяється багато уваги [1-3] .

Формулювання і класифікація багатоіндексних задач лінійного програмування

Нехай $f = \{1, 2, ... , s\}$ — множина з s послідовних натуральних чисел. Кожному числу $l, l \in f$, поставимо у відповідність параметр j_l , $l \in f$, який будемо називати надалі індексом, що може приймати одне значення з множини $J_l = \{1, 2, …, n_l\}$. Набір значень індексів ($j_1, j_{2,\dots} j_s$) назвемо s-індексом і позначимо через F :

$$F= (j_1, j_2,..., j_s), \tag{1}$$

де $j_1 \in J_1 = \{1,2,..., n_1\}$;
$j_2 \in J_2 = \{1,2,..., n_2\}$; ....;
$j_s \in J_s = \{1,2,..., n_s\}$.

Очевидно, що існує $N = \prod_{l=1}^{s} n_l$ різних наборів значень індексів ($j_1, j_2,..., j_s$). Ці набори в сукупності утворюють множину E s-індексів F, яка є прямим добутком множин J_1, J_2,… , J_s : $E = J_1 \times J_2 \times ... \times J_s$.

Кожному s-індексному елементу F, $F \in E$, поставимо у відповідність дійсне число $x_F = x_{j_1 j_2 \dots j_s}$. Сукупність таких чисел для усіх можливих значень індексів $j_1, j_{2,\dots} j_s$ назвемо s-індексною матрицею і позначимо $\{x_F\} = \{x_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, яка містить N елементів.

Нехай $f_i = \{k_1^i, k_2^i,..., k_{t_i}^i\} \subset f$ деяка непорожня довільна власна підмножина множини f, $i = 1,2,...$. Будемо вважати, що порядок елементів в f_i довільний. Тоді існує

$$M=\sum_{l=1}^{s-1} C_s^l = 2^s - 2$$

варіантів формування підмножини f_i. Кожній підмножині f_i, $i=1,2,\ldots$, відповідає множина індексів $\{ j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, ..., j_{k_{t_i}^i} \} \subset F$, $i=1,2,\ldots$.

Набір значень індексів $\{ j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, ..., j_{k_{t_i}^i} \}$, що є t_i-індексом, позначимо F_i, $i=1,2,\ldots$. Таким чином,

$$F_i = (j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, ..., j_{k_{t_i}^i}) \subset F , \qquad (2)$$

де
$$j_{k_1^i} \in (1,2,..., n_{k_1^i}) = J_{k_1^i} ;$$
$$j_{k_2^i} \in (1,2,..., n_{k_2^i}) = J_{k_2^i} ; \quad \ldots ; \qquad (3)$$
$$j_{k_{t_i}^i} \in (1,2,..., n_{k_{t_i}^i}) = J_{k_{t_i}^i} .$$

Сукупність t_i-індексів F_i для усіх можливих значень індексів $j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, ..., j_{k_{t_i}^i}$ утворює множину $E_i = J_{k_1^i} \times J_{k_2^i} \times \ldots \times J_{k_{t_i}^i}$, яка містить $N_i = \prod_{l \in f_i} n_l$ елементів, $i=1,2,\ldots$.

Доповненням $\bar{f}_i = f \setminus f_i$ підмножини f_i до множини f є множина елементів, що не входять в f_i, $i=1,2,\ldots$. Доповненню $\bar{f}_i$ відповідають множини $\overline{F_i} = F \setminus F_i$ і $\overline{E_i} = \prod_{l \in \bar{f}_i} J_l$, $i=1,2,\ldots$.

Зауважимо, що множини E_i і $\overline{E_i}$ пов'язані між собою: прямий добуток цих множин дає множину $E = E_i \times \overline{E_i}$, а для заданих множин F_i і $\overline{F_i}$ справедлива рівність $\{x_{j_1, j_2, ..., j_s}\} = \{x_F\} = \{x_{F_i \overline{F_i}}\}$ для довільного f_i, $i=1,2,\ldots$.

Сукупність усіх компонентів s-індексної матриці $\{x_F\}$ з фіксованими індексами $F_i = (j_{k_1^i}, j_{k_2^i}, ..., j_{k_{t_i}^i})$ є $(s-t_i)$-мірним перерізом орієнтації $\overline{F_i}$, який позначають $X_{F_i}^{\overline{F_i}}$ [1]. Переріз $X_{F_i}^{\overline{F_i}}$ утворює $(s-t_i)$-індексну підматрицю $\{x_{\overline{F_i}}\}$ матриці $\{x_F\}$. Число перерізів орієнтації F_i дорівнює $N_i = \prod_{l \in f_i} n_l$ - потужності множини E_i, $i=1,2,\ldots$.

З метою скорочення і спрощення записів введемо такі позначення:

$$\sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \cdots \sum_{j_s \in J_s} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \sum_{J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_s} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \sum_E x_F . \quad (4)$$

Суму (4) назвемо повною сумою. Частковими сумами на множинах E_i будемо називати суми

$$\sum_{j_{k_1^i} \in J_{k_1^i}} \sum_{j_{k_2^i} \in J_{k_2^i}} \cdots \sum_{j_{k_{t_i}^i} \in J_{k_{t_i}^i}} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \sum_{J_{k_1} \times J_{k_2} \times \ldots \times J_{k_{t_i}}} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \sum_{E_i} x_F .$$

Якщо для значень часткової суми змінних $x_{j_1 j_2 \cdots j_s}$ задано обмеження, тоді відповідна рівність (або нерівність) має вигляд:

$$\sum_{E_i} x_F = \sum_{E_i} x_{F_i \overline{F_i}} = (\le) b_{F_i}^{(i)} , \overline{F_i} \in \overline{E_i} . \quad (5)$$

Введемо s-індексні матриці $\{c_F\}$, $\{a_F^{(1)}\}$, $\{a_F^{(2)}\}, \ldots, \{a_F^{(m)}\}$, а також m підмножин f_i, $i \in I = \{1,2,...,m\}$. Використовуючи введені позначення, сформулюємо багатоіндексну ЗЛП у найбільш загальному вигляді:

визначити набір елементів $X=\{x_F\}$, що мінімізує лінійну функцію

$$L(X) = \sum_E c_F x_F \qquad (6)$$

і задовольняє обмеженням

$$\sum_{E_1} a_F^{(1)} x_F = b_{F_1}^{(1)}, \overline{F_1} \in \overline{E_1} ; \sum_{E_2} a_F^{(2)} x_F = b_{F_2}^{(2)}, \overline{F_2} \in \overline{E_2} ;$$
$$\ldots ; \quad \sum_{E_m} a_F^{(m)} x_F = b_{F_m}^{(m)}, \overline{F_m} \in \overline{E_m} ; \qquad (7)$$
$$x_F \ge 0, \quad F \in E . \qquad (8)$$

Сформульована задача (6)-(8) є s-індексною задачею розподілення ресурсів і позначається R_s [1]. Загальна модель (6), (7) припускає ряд часткових формулювань. Наприклад, при $a_F^{(i)} = 1$, $F \in E$, $i \in \{1,2,...,m\}$, отримуємо s-індексну транспортну задачу: знайти набір елементів $X=\{x_F\}$, що мінімізує лінійну функцію

$$L(X) = \sum_E c_F x_F \qquad (9)$$

і задовольняє обмеженням

$$\sum_{E_1} x_F = b_{F_1}^{(1)}, \overline{F_1} \in \overline{E_1} ; \sum_{E_2} x_F = b_{F_2}^{(2)}, \overline{F_2} \in \overline{E_2} ;$$
$$\ldots ; \sum_{E_m} x_F = b_{F_m}^{(m)}, \overline{F_m} \in \overline{E_m} ; \qquad (10)$$
$$x_F \ge 0, \quad F \in E . \qquad (11)$$

Транспортну задачу (9)-(11) позначимо символом T_s.

Нехай підмножини F_i, $i \in \{1,2,...,m\}$, - це усі можливі сполучення по d елементів із s елементів множини *F*. При цьому, $t_1 = t_2 = \dots \dots = t_m = d$, де $m = C_s^d$.

Модель (9)-(11) є симетричною *s*-індексною задачею з *d*-гіперпланарними сумами. Для визначення кількості груп обмежень, що накладаються на змінні задачі, модель (9)-(11) ще називають (*m,d*)-гіперпланарною *s*-індексною транспортною задачею і позначають $T_s - mP_d$. Якщо *d*=1, то отримуємо симетричну *s*-індексну *s*-аксіальну транспортну задачу [1]: визначити набір елементів $X = \{x_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, що мінімізує функцію

$$L(X) = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\dots\sum_{j_s=1}^{n_s} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} \quad (12)$$

і задовольняє обмеженням

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = b^{(1)}_{j_2 j_3 \dots j_s}, \ j_k \in J_k,$$
$$k \in \overline{f_1} = \{2,3,4,\dots, s\};$$
$$\sum_{i=1}^{n_2} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = b^{(2)}_{j_1 j_3 \dots j_s}, \ j_k \in J_k,$$
$$k \in \overline{f_2} = \{1,3,\dots, s\}; \qquad \dots; \quad (13)$$
$$\sum_{i=1}^{n_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = b^{(s)}_{j_1 j_2 \dots j_{s-1}}, \ j_k \in J_k,$$
$$k \in \overline{f_s} = \{1,2,3,\dots, s-1\};$$
$$x_{j_1 j_2 \dots j_s} \ge 0, \ j_k \in J_k,$$
$$k \in \overline{f_s} = \{1,2,3,\dots, s\}. \quad (14)$$

Тут $f_1 = \{1\}$, $f_2 = \{2\}$, …, $f_s = \{s\}$, *m=s*.

У випадку *m=s, d=s-1* отримуємо симетричну модель, що називається s-індексною *(s,s-1)* - гіперпланарною транспортною задачею, яка позначається $T_s - sP_{s-1}$ [2]. Ця задача формулюється таким чином: знайти набір елементів $X = \{x_{j_1 j_2 \dots j_s}\}$, що мінімізує функцію $L(X)$ виду (12) і задовольняє обмеженням

$$\sum_{j_2=1}^{n_2}\sum_{j_3=1}^{n_3}\dots\sum_{j_s=1}^{n_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = b_{j_1}^{(1)}, \ j_1 \in J_1;$$
$$\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_3=1}^{n_3}\dots\sum_{j_s=1}^{n_s} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = b_{j_2}^{(2)}, \ j_2 \in J_2; \quad (15)$$
$$\dots; \ \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\dots\sum_{j_{s-1}=1}^{n_{s-1}} c_{j_1 j_2 \dots j_s} x_{j_1 j_2 \dots j_s} = b_{j_s}^{(s)}, \ j_s \in J_s;$$
$$x_{j_1 j_2 \dots j_s} \ge 0, \ j_1 \in J_1, \ j_2 \in J_2, \dots, \ j_s \in J_s. \quad (16)$$

У даному випадку маємо
$f_i = \{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,s\}$, $\bar{f}_i = \{i\}$.

Таким чином, модель *s*-індексної транспортної задачі однозначно задається набором множин $f_1, f_2, \dots, f_m$, що визначають структуру системи обмежень, і набором чисел $(n_1, n_2, \dots, n_s)$, що встановлює розмірність задачі, яка дорівнює $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_s$.

Існування розв’язків багатоіндексної транспортної задачі.

Сформулюємо ряд необхідних та достатніх умов існування розв’язків різних типів *s*-індексних транспортних задач.

Розглянемо *s*-індексу транспортну задачу T_s у вигляді (9)-(11). Для довільних $(i,k) \in I \times I$, $I = \{1,2,\dots, m\}$ введемо позначення

$$f_{ik} = f_i \bigcup f_k, \ f_k' = f_{ik} \setminus f_i, \ f_i' = f_{ik} \setminus f_k.$$

Підмножини f_{ik}, f_k', f_i', $i,k \in I$, породжують відповідні індексні елементи:
$F_{ik} \in E_{ik}$, $\overline{F}_{ik} \in \overline{E}_{ik}$, $F_i' \in E_i'$, $\overline{F_i'} \in \overline{E_i'}$, $F_k' \in E_k'$, $\overline{F_k'} \in \overline{E_k'}$.

Теорема 1 (умова балансу)[1]. Для існування розв’язку *s*-індексної транспортної задачі (9)-(11) необхідно, щоб для $\forall i,k \in I$ виконувались умови

$$\sum_{E_k'} b^{(i)}_{\overline{F}_i} = \sum_{E_i'} b^{(k)}_{\overline{F}_k} = S_{\overline{F}_{ik}}, \ \overline{F}_{ik} \in \overline{E}_{ik}. \quad (17)$$

Наслідок. Для існування розв’язку *s*-аксіальної транспортної задачі (12)-(14) необхідно, щоб для $\forall i,k \in I$ виконувалися умови

$$\sum_{j_k=1}^{n_k} b^{(i)}_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_s} = \sum_{j_i=1}^{n_i} b^{(k)}_{j_1 j_2 \dots j_{k-1} j_{k+1} \dots j_s}. \quad (18)$$

Теорема 2 [1].Нехай для усіх пар $(i,k) \in I \times I$ справедливо $\bar{f}_i \bigcap \bar{f}_k = \varnothing$. Тоді для існування розв’язку *s*-індексної транспортної задачі (9)-(11) необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\sum_{\overline{E}_k} b^{(i)}_{\overline{F}_i} = \sum_{\overline{E}_i} b^{(k)}_{\overline{F}_k} = S_0, \ (i,k) \in I \times I. \quad (19)$$

Остаточно, існує принаймні один план $\hat{X} = \{\hat{x}_F\}$ багатоіндексної транспортної задачі, цільова функція *L(X)* обмежена знизу на множині її планів. Отже, задача (9)-(11) має розв’язок.

Формулювання нечітких багатоіндексних транспортних задач

Формулювання нечітких транспортних задач може розглядатися з урахуванням двох різних принципових підходів, для яких є характерною неможливість чіткої формалізації тих чи інших параметрів задачі. Для першого випадку транспортна задача (наприклад, (12), (15),(16)) може мати нечіткий набір індексів проміжних пунктів $j_1 \in J_1$, ..., $j_s \in J_s$. Для цього у роботі [4] запропонований підхід, що дозволяє формалізувати довільну задачу оптимізації і отримати деякий розв'язок, який враховує нечіткий вибір індексів обмежень.

Більш наближеним до реальних транспортних проблем є інший спосіб формулювання нечіткої багатоіндексної задачі [5]. Він полягає у заданні величин потреб споживачів або пропускних спроможностей проміжних пунктів у вигляді нечітких величин і перетворенні отриманої задачі до параметричної задачі оптимізації спеціального вигляду. Для транспортної задачі (12), (15), (17) нечітка задача може бути сформульована у вигляді пошуку оптимуму цільової функції (12), що задовольняє обмеженням

$$\sum_{j_2=1}^{n_2}\sum_{j_3=1}^{n_3}\cdots\sum_{j_s=1}^{n_s} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \tilde{b}_{j_1}^{(1)},\ j_1 \in J_1;$$

$$\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_3=1}^{n_3}\cdots\sum_{j_s=1}^{n_s} c_{j_1 j_2 \cdots j_s} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \tilde{b}_{j_2}^{(2)},\ j_2 \in J_2;$$

$$\ldots; \tag{21}$$

$$\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_{s-1}=1}^{n_{s-1}} c_{j_1 j_2 \cdots j_s} x_{j_1 j_2 \cdots j_s} = \tilde{b}_{j_s}^{(s)},\ j_s \in J_s;$$

$x_{j_1 j_2 \cdots j_s} \geq 0$, $j_1 \in J_1$, $j_2 \in J_2$, ..., $j_s \in J_s$, де величини потреб $\tilde{b}_{j_1}^{(1)},\ldots,\tilde{b}_{j_s}^{(s)}$ визначаються нечіткими трикутними числами [5].

На завершення варто зазначити, що ідея використання багатоіндексних транспортних задач є важливим прикладним інструментом у наукових дослідженнях у різних галузях економіки та транспорту [6].

Список використаних джерел

1. *Раскин Л.Г.* Многоиндексные задачи линейного программирования/ Л.Г. Раскин, И.О.Кириченко. – Москва: Радио и связь, 1982. – 240 с.
2. *Junginger W.* (1993) On representatives of multi-index transportation problems // Eur. J. Oper. Res. 66(3). p. 353-371.
3. *Spieksma, F.C.R.* (2000) Multi-index assignment problems: complexity, approximation, applications. In Pardalos, P.M. and Pitsoulis, L.S. (eds). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – P.1-11.
4. *Мащенко С.О.* Принятие решений при нечетком множестве состояний природы/ С.О.Мащенко. – Saarbrucken: LAP Lambert AP, 2013. – 109 с.
5. *Ivohin E.V.* Single-objective linear programming problems with fuzzy coefficients and resources/ E.V.Ivohin, Almodars B.S. Kaml. //Journ.Comp.& Appl.Math. – 2013. –1. – P.28-34.
6. *Серая О.В.* Многоиндексные нелинейные транспортные задачи / О.В.Серая, О.И. Дунаевская//Информационные и управляющие системы на железнодорожном транспорте. – Харьков: ХГИЖТ, 2009. – №5. – С.25-30.

References

1. RASKIN L. and KIRICHENKO I. (1982) *Multiindex linear programming problems* – Moskva: Radio and communication.
2. JUNGINGER W. (1993) *On representatives of multi-index transportation problems*. Eur.J.Oper.Res. 66(3). p.353-371.
3. SPIEKSMA, F.C.R. (2000) *Multi-index assignment problems: complexity, approximation, applications*. In Pardalos, P.M. and Pitsoulis, L.S. (eds). Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – P.1-11.
4. MASCHENKO, S. (2013) *Decision support on fuzzy set of nature state*. – Saarbrucken: LAP Lambert AP.
5. IVOHIN E. and ALMODARS B. (2013) *Single-objective linear programming problems with fuzzy coefficients and resources*. Journ.Comp.&Appl.Math. 1. p.28-34.
6. SERAYA O. and DUNAEVSKAYA O. (2009) *Multi-index nonlinear transportation problems.* Informatic and control systems on railway transport. Kharkiv: KSIZT. 5. p.25-30.

Надійшла до редколегії 27.02.2014