УДК 519.925.51

Рутицька В.В.[1], к.т.н.

Алгоритм оптимальної диверсифікації портфеля акцій

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: vlarut@gmail.com

V.V. Rutytska[1], Ph.D.

Algorithm of optimal portfolio diversification

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: vlarut@gmail.com

Розглядається задача про побудову оптимального початкового інвестиційного портфеля акцій.
Ключові слова: математична модель, оптимальне інвестування, портфель акцій.

The problem of optimal portfolio diversification is investigated. In a class of ordinary differential equations constructed mathematical models of the dynamics of the formation of the market value per share and stock portfolio. Such models are needed to build the trajectories of the market price of shares and the optimal portfolio diversification. Initially, based on the method of variation of arbitrary constants is based procedure that enables an analytical solution of the corresponding equation. Based on the mathematical model of the market value per share the model of the dynamics of the portfolio is constructed. This model is used to its maximum diversification and building the initial values of the optimal vector of shares of different types in the portfolio. At that applies mathematical set theory and methods of optimal control theory. The problem of partitioning of investment interval on subintervals. On each of them solves the problem of constructing an optimal investment portfolio taking into account constraints on the control.

We also consider the problem of identification of parameters of the mathematical model of the dynamics of formation of the market value per share. For this purpose built procedure that allows you to build a guaranteed set, you always get the desired financial performance of investment operations.

Key Words: mathematical model, control parameters of portfolio, diversification of the investment portfolio

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

При розв'язанні математичних задач фондового ринку значний інтерес може являти задача про побудову оптимального початкового портфеля цінних паперів при визначеному рівні його очікуваної прибутковості для заданого моменту часу у майбутньому.

Побудуємо алгоритм, який дозволить визначити структуру оптимального інвестиційного портфеля шляхом конструювання послідовності оптимальних на інтервалах керувань, починаючи з останнього, де значення цільової функції у кінцевий момент часу відоме. Математично формулювання такої задачі може бути записано так

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = f(r_p(t), u(t), t), \qquad (1)$$

$r_p(t_k) = r_p^k$, $t_{k-1} \le t \le t_k$, $u(t_i) \in U(t)$, де $U(t)$ – множина допустимих керувань, $i = \overline{1, k}$.

$$I(u(t_{k-1}), t_{k-1}) = \min_{u_{k-1}}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} f_0(r_p(t), u(t), t)dt + \Phi(r(t_k))\right). \qquad (2)$$

Вважаємо, що функція $\Phi(r(t_k))$ – відома. Тут момент часу t_k – заданий; $u = (u_1, ..., u_r)$; керування $u = u(t)$ є кусково - неперервною на заданому відрізку; $f(r_p, u, p, t)$ - задана неперервна та обмежена функція.

Для розв'язання задачі оптимального інвестування у цінні папери (1) – (2) застосовують такі методи:

- підхід Г. Марковиця, що використовує допустиму та ефективну множини, криві байдужості інвестора;

- розбиття загальної двокритеріальної задачі оптимізації інвестиційного портфеля на дві однокритеріальні;
- методи технічного аналізу;
- методи фундаментального аналізу.

Постановка задачі (1) – (2) є доволі загальною і серед невідомих додатково містить t_{k-1} та $r_p(t_{k-1})$, що, відповідно, є моментом часу переключення керування та очікуваною прибутковістю інвестиційного портфеля у цей момент часу. У такій постановці задача є надзвичайно складною, тому спробуємо спростити її. За моменти диверсифікації можемо розглянути відомі $t_0, t_1, ..., t_k$. Необхідно визначити $r_p(t_i),\ i = \overline{1,k}$.

Розглянемо математичну модель формування ринкової вартості інвестиційного портфеля і побудуємо аналітично відповідну траєкторію.

На інтервалі часу $t \in [t_0, T]$ рівняння, що описує прибутковість портфеля акцій r_p, має вигляд

$$r_p(t) = \sum_i x_i(t) r_i(t), \tag{3}$$

де x_i – частка акцій і-того виду у портфелі; r_i – очікувана прибутковість акцій і-того виду. Продиференціювавши обидві частини (1) за t, отримаємо

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = \sum_i (r_i(t)\frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t)\frac{dr_i(t)}{dt}). \tag{4}$$

Уведемо нормуючі вирази, які за змістом є оберненим часом реакції системи на зміну динаміки очікуваної прибутковості та структури портфеля

$$\sum_i \frac{\dot{r}_i(t)}{r_i(t)} = 1,\ \sum_i \frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = 1,\ t \in [t_0, t_1].$$

Для $i \neq j$ мають місце співвідношення

$$\sum_i x_i(t) r_i(t) \frac{f_i}{r_i(t)} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{f_j}{r_j(t)},$$

$$\sum_i \frac{x_i(t) r_i(t)}{x_i(t)} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_i x_i(t) r_i(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) \times r_i(t) \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}.$$

Динамічна модель формування ринкової вартості портфеля акцій матиме вигляд

$$\frac{dr_p(t)}{dt} = 2r_p(t) - \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) (\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}). \tag{4}$$

Це лінійне рівняння першого порядку і застосуємо метод варіації довільної сталої для побудови його загального розв'язку.

$$\frac{dr_p(t)}{dt} - 2r_p(t) = 0.$$

$$r_p(t) = c_1 \ell^{2t}, \tag{5}$$

де c_1 – довільна стала. Згідно методу варіації довільної сталої, вважатимемо

$$c_1 = c_1(t). \tag{6}$$

Підставимо розв'язок (5) у диференціальне рівняння (4), беручи до уваги (6). Отримаємо

$$c_1(t) = -\int \ell^{-2t} \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) (\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}) dt,$$

Тоді

$$r_p(t) = -\ell^{2t} \int \ell^{-2t} \sum_i \sum_j x_i(t) r_i(t) (\frac{f_j}{r_j(t)} \times \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{1}{x_j(t)}) dt. \tag{7}$$

Останнє співвідношення, при припущеннях, зроблених вище, описує динаміку формування ринкової вартості портфеля ризикованих цінних паперів. Більш детальний його аналіз вказує на дві важливі властивості, які характеризують ринкову вартість портфеля і полягають в тому, що ця динаміка залежить від динаміки як очікуваної прибутковості акцій, так і зміни структури портфеля. У співвідношенні (7) f_j є правою частиною диференціального рівняння, яке описує динаміку формування ринкової вартості акції [2] і за своєю структурою та змістом відповідає ринковій моделі Шарпа [1].

Отримали можливість побудувати послі довність траєкторій на вибраних інтервалах часу, що дозволяє сформувати структуру початкового інвестиційного портфеля.

Разом з тим, такий підхід не дозволяє ефективно впливати на структуру інвестицій і не в повній мірі використовує властивості математичного опису, що наведений у математичній моделі (4).

Окрім іншого, вона містить множник $\frac{dx_j(t)}{dt} * \frac{1}{x_j(t)}$, який описує можливі зміни структури інвестицій.

Скористаємось цією можливістю для побудови оптимальних на інтервалах керувань, маючи на меті сформувати оптимальний початковий портфель. Для останнього інтервалу задача матиме такий вигляд

$$t \in [t_{k-1}, t_k], \tag{8}$$

$$r_p(t_k) = r_p^k, \tag{9}$$

$$r_p(t_{k-1}) = r_p^{k-1} = \sum_{j=1}^{l} x_j(t_{k-1}) r_j(t_{k-1}), \tag{10}$$

динаміка формування ринкової вартості однієї акції $\frac{dr_j}{dt}$, $(j = \overline{1,l})$ при цьому описується відповідною моделлю, яка наведена і детально описана в [2], має вигляд

$$\frac{dr_j(t)}{dt} = (\alpha_1 SM_{ind}(t) + \alpha_2 I(t)) r_j(t) + \sum_{i=1}^{N} \beta_{ij} r_j(t),$$

$j = \overline{1,n}$.

Задача полягає у побудові функції керування $x_j(t)$, яка дозволить здійснити оптимальний перехід від точки r_p^k до точки r_p^{k-1}.

Для спрощення подальших викладок математичну модель (4) наведемо в більш загальній формі

$$\dot{r}_p = f^p(r_p, x_i, \dot{x}_i, r_i, \dot{r}_i),\ i = \overline{1,l} \tag{11}$$

Критерій якості, що дає можливість визначити оптимальний за ринковою вартістю портфель інвестицій для моменту часу t_{k-1}, запишемо у вигляді

$$\sum_{j=1}^{l} x_j(t_{k-1}) r_j(t_{k-1}) \to \max_x \tag{12}$$

При розв'язанні задачі оптимального керування (9), (11), (12) скористаємось методом послідовних наближень.

Як змінна фазового стану розглядається ринкова вартість портфеля акцій r_p. За керуючі параметри, згідно з моделлю, - вектор

$$u(t) = (x_i(t), r_i(t), \frac{dx_i(t)}{dt}, \frac{dr_i(t)}{dt}). \tag{13}$$

Обчислювальна процедура методу послідовних наближень полягає у конструюванні послідовності допустимих керувань $\{u^k(t)\}$ такої, що на кожному наступному кроці

$$u^{k+1}(t) = Ru^k(t),\ k = 0,1,2,...,$$

де u^0 – деяке початкове наближення вектора керувань; $Ru(t)$ – довільна допустима функція, що надає максимуму функції Гамільтона за керуванням. Особливістю постановки та застосування методу послідовних наближень є той факт, що на функцію керувань $u(t)$, $t \in [t_1, t_{k-1}]$ у кожен момент часу накладаються досить жорсткі обмеження

$$u(t_i) \in U(t_i), \tag{14}$$

де $U(t_i)$ – множина допустимих керувань, яка характеризує наявність на ринку необхідної кількості відповідного виду цінних паперів.

Наведена вище процедура дає можливість побудувати послідовність керувань, що дозволяє здійснити оптимальний перехід від точки $r_p(t_k)$ до точки $r_p(t_{k-1})$. Застосувавши послідовно кроки цього алгоритму отримаємо структуру оптимального початкового портфеля інвестицій.

Застосуємо апарат множин досяжності [3], щоб отримати можливість застосувати розроблені алгоритми для практичного застосування.

Згідно означення, множиною досяжності $D(t, s, M)$ системи керування (4) з умовою на кінці траєкторії (9) при $t \le s$ є сукупність кінців траєкторій $r(\cdot)$ цієї системи, що починаються у момент s в точках множини початкових станів M.

Виходячи із положень класичної теорії Г. Марковиця, приходимо до висновку, що у кожен момент часу володіння портфелем цінних паперів інвестор аналізує множину альтернатив, з якої обирає єдину оптимальну для нього у даний момент часу. Застосуємо формальний математичний алгоритм, побудований вище і який використовує множинні оцінки станів системи у вибрані моменти часу. Розв'язок задачі Коші для системи (4) при умові (9) позначимо

$$r_p = r_p(t, s, r_{k-1}^p).$$

Сформулюємо питання, які необхідно вирішити при побудові оптимального початкового портфеля інвестицій для відомої його бажаної прибутковості у кінцевий момент часу.

1. Знаючи множину досяжності $D(t, s, M)$ системи керування (9), можна оцінити можливості керування. Так, є змога дати відповідь на питання , чи можливо перевести систему керування (9) у заданий фазовий стан $r_p^*(t)$ у деякий фіксований момент часу $t < s$. Для цього достатньо перевірити приналежність вектора $r_p^*(t)$ множині $D(t, s, M)$.

2. Перевести систему (9) у заданий момент часу t нам задану множину N у фазовому просторі. Ця задача, очевидно, має розв'язок у тому і тільки у тому випадку, коли

$$N \cap D(t, s, M) \neq 0.$$

3. Знайти таке керування $u(t)$ і такий вектор $r(s) \in M$, що для системи (9) при виконанні обмежень (14) досягається оптимальне значення функціонала

$$J = F(r_p(t)),\ t < s. \quad (15)$$

Задача п. 3 з критерієм (15) може бути сформульована як задача про пошук мінімуму функціонала на множині досяжності

$$F^* = \min_{r_p \in D(t,s,M)} F(r_p). \quad (16)$$

Сформульована вище задача вже не є задачею оптимального керування, а являється задачею мінімізації функції n змінних на заданій множині. Таким чином, задачі (15) або (16) дозволяють послідовно отримувати множини траєкторій, що дають можливість інвестору приймати практичні рішення про оптимальний склад інвестиційного портфеля. Така постановка задачі і побудований алгоритм її розв'язання значно розширюють можливості при інвестуванні, адже у кожен момент диверсифікації є можливість отримати множину альтернатив, еквівалентних з точки зору обраних критеріїв якості. Інвестор, як і в класичному підході Г. Марковиця, має можливість врахувати при прийнятті рішення додаткові фактори, що можуть виникати в процесі практичного інвестування і пов'язані з особливостями процесу моделювання динаміки системи.

Запропонована математична процедура диверсифікації портфеля інвестицій дає можливість для динамічних математичних моделей однієї акції та портфеля акцій розв'язати задачу вибору початкового портфеля інвестицій при відомому значенні його очікуваної прибутковості на обраний у майбутньому момент часу.

Список використаних джерел

1. *Шарп У.* Инвестиции / *Уильям Ф. Шарп, Гордон Дж. Александер, Джеффри В. Бэйли.* –Москва: Инфра-М, 1999. –с.1027.
2. *Гаращенко Ф.Г. /* Качественный анализ математических моделей инвестиционного менеджмента / Гаращенко Ф.Г., Кулян В.Р., Рутицкая В. В. // Кибернетика и вычислительная техника. – 2005. – №148. –с. 3-10.
3. *Крылов И.А* Алгоритм метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления / Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. – Москва: Наука, 1971. –с. 247.

References

1. SHARPE, W., ALEXANDER, G. and BAILEY, J. (1995) *Investments*. New Jersey: Prentice Hall.
2. GARASHCHENKO, F., KULYAN, V. and RUTITSKAYA, V. (2005*)* Quality analysis of mathematical models of investment management: *Cybernetics and computing engineering*. 148. p.3-10.
3. KRYLOV, I. and CHERNOUSKO, F. (1971) *Algorithm of method of progressive approximations for the decision of optimal control problems*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 28.01.2014 р.