УДК 539.3.

Т.М. Прощенко, к.ф.-м.н.

**Про крайові задачі трансверсально – ізотропних пластин прикладної теорії типу Тимошенка.**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова, 4д.
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

T.M. Proshchenko, PhD.

**About the boundary value problems transversely - isotropic plates of applied theory of Timoshenko type.**

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d.
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

*Викладено спосіб зведення крайових задач згину трансверсально – ізотропних пластин прикладної теорії типу Тимошенка до задач теорії функцій комплексної змінної. Розглянуто випадки деформування пластини при різних видах граничних напружень.*
*Ключові слова: трансверсально – ізотропна пластина, крайові задачі.*

*The article presents the method of reduction of bend boundary value problems transversely - isotropic plate of applied theory of Timoshenko type to problems of theory of functions of a complex variable. It is assumed that the plate of constant thickness is under action of transverse stresses. Stress state of the plate is described by the equations of equilibrium and elasticity relations. The three types of boundary conditions defined on a curved edge plates: rigidly fixed edge; hinged edge; edge free from stress are considered. To erect of posed boundary value problems to problems of theory of functions of a complex variable are introduced complex variables and associated with them differential operators. The general solution of the equilibrium equation is represented by the real part of the sum of two random analytic functions and particular solutions of equation which are determined with particular boundary conditions.*
*Key Words: transversely - isotropic plate, boundary value problems.*

Статтю представив Я.О. Жук, д.ф.-м.н., професор.

**Вступ.** Для розрахунків напружено - деформованого стану анізотропних пластин виготовлених із армованих композитних матеріалів, використовують прикладні теорії, що дозволяють врахувати деформації поперечного зсуву. Широке застосування знаходять теорія типу Тимошенко [1], Е. Рейсснера [2], С.А. Амбарцумяна [3] та ін. У [4, 5] зазначається, що до прикладних теорій можна віднести математичну теорію І.Н. Векуа в першому наближенні. В даній роботі, наслідуючи метод [4], викладено спосіб зведення крайових задач згину трансверсально - ізотропних пластин теорії типу Тимошенка до задач теорії функцій комплексної змінної.

**Постановка задачі і основні співвідношення.** Припустимо, що пластина постійної товщини $h$ ($h = const$) знаходиться під дією нормованих поперечних напружень $\sigma_{33}^{-}$, $\sigma_{33}^{+}$, прикладених до лицьових граничних пластин $h_3 = \pm h/2$. Пружна рівновага пластини описується системою рівнянь [5]

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + p = 0\,; \quad \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} - Q_1 = 0\,;$$
$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0\,, \qquad (1)$$

де $M_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta = 1,2$) – згинаючі та скручуючий моменти, $Q_\alpha$ ($\alpha = 1,2$) – перерізуючі сили, $p = \sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-}$. Співвідношення пружності, що зв'язують зусилля і моменти з прогином серединної площини $w$ і кутами повороту нормалі $\vartheta_1$ і $\vartheta_2$, визначаються рівностями [6]

$$M_{11} = D\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2}\right); \; M_{22} = D\left(\nu \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_2}\right);$$
$$M_{12} = \frac{(1-\nu)D}{2}\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x_1}\right) = 0\,;$$
$$Q_\alpha = \frac{Eh}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \vartheta_\alpha\right); \; (\alpha = 1,2)\,, \qquad (2)$$

в яких $a = E/k^2G'$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – циліндрична жорсткість, $E$ - модуль пружності, $G'$ - поперечний модуль зсуву, $\nu$ - коефіцієнт Пуассона, $k^2$ - коефіцієнт зсуву. Згідно (2), рівняння рівноваги (1) набудуть вигляду

$$\Delta w + \theta + \frac{a}{Eh} p = 0;$$

$$\Delta \vartheta_\alpha + \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} - \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} + \vartheta_\alpha\right) = 0 \quad (\alpha = 1,2), \quad (3)$$

де $\theta = \partial\vartheta_1/\partial x_1 + \partial\vartheta_2/\partial x_2$ .

Якщо ввести функцію $\omega$ згідно формул

$$\vartheta_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} - \mu h^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\Delta w + \frac{a}{Eh} p\right) - (-1)^\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x_\beta}$$
$$(\alpha, \beta = 1,2;\ \alpha \neq \beta), \quad (4)$$

то система (3) зведеться до таких рівнянь

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D}\left(p - \mu h^2 \Delta p\right)\ \Delta\Delta w = \frac{1}{D}\left(p - \mu h^2 \Delta p\right), \quad (5)$$

$$\Delta \omega - \frac{\lambda}{h^2}\omega = 0. \quad (6)$$

Тут $\mu = \dfrac{aD}{Eh^3} = \dfrac{D}{k^2G'h^3}$, $\lambda = \dfrac{2k^2G'h^3}{(1-\nu)D}$.

Вважатимемо край пластини криволінійним з нормаллю $n$ і дугою $s$. Розглянемо найбільш вживані граничні умови на краю пластини:

а) жорстко закріпленого краю

$$w = 0; \quad \vartheta_n = 0; \quad \vartheta_s = 0, \quad (7)$$

де $\vartheta_n$, $\vartheta_s$ – кути повороту нормалі;

в) шарнірно опертого

$$w = 0; \quad M_n = 0; \quad M_{ns} = 0, \quad (8)$$

і с) вільного від напружень

$$Q_n = 0; \quad M_n = 0; \quad M_{ns} = 0. \quad (9)$$

**Метод зведення крайових задач до задач теорії функцій комплексної змінної.** Вводимо змінні $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ і пов'язані з ними диференціальні оператори $2\partial_{\bar z} = \partial/\partial x_1 + i\,\partial/\partial x_2$, $2\partial_z = \partial/\partial x_1 - i\,\partial/\partial x_2$. Помножимо друге ($\alpha = 2$) рівняння (4) на $i$ та складемо з першим ($\alpha = 1$):

$$\vartheta_+ = \vartheta_1 + i\vartheta_2 = -2\partial_{\bar z}\left[w + \mu h^2\left(\Delta w + ap/Eh\right) + i\omega\right]. \quad (10)$$

Застосуємо до функції $\vartheta_+$ із (10) операцію $\partial_z$ і у знайденій рівності розглянемо дійсну частину. Врахувавши рівняння (5), отримаємо значення $\theta = -\left(\Delta w + ap/Eh\right)$, що узгоджуються з формулою (3).

Співвідношення пружності (2) у комплексній формі записуються таким чином

$$Q_+ = \frac{Eh}{a}\left(2\partial_{\bar z} w + \vartheta_+\right); \quad M_{11} + M_{22} = (1+\nu)D\theta;$$
$$M_{11} - M_{22} + 2iM_{12} = 2(1-\nu)D\partial_{\bar z}\vartheta_+. \quad (11)$$

Представимо розв'язок рівняння (5) у вигляді

$$w = 2\,\mathrm{Re}\,\bar{z}\left[\phi(z) + \chi(z)\right] + w_0, \quad (12)$$

де $\phi(z)$, $\chi(z)$ – довільні аналітичні функції, $w_0$ - частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Згідно з (12) визначаємо функції кутів повороту

$$\theta = -4\left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\right] - \left(\Delta w_0 + ap/Eh\right);$$
$$\vartheta_+ = -2\left[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + 4\mu h^2\overline{\phi''(z)} + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar z}\omega\right] -$$
$$-2\partial_{\bar z}\left[w_0 + \mu h^2\left(\Delta w_0 + ap/Eh\right)\right]. \quad (13)$$

Враховуючи (13), рівності (11) набудуть вигляду

$$Q_+ = -\frac{2Eh}{a}\left(i\partial_{\bar z}\omega + \nu_1^* h^2\overline{\phi''(z)}\right) - 2D\partial_{\bar z}\tilde{w}_0;$$
$$M_{11} + M_{22} = -4(1+\nu)D\left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\right] -$$
$$-(1+\nu)D\tilde{w}_0; \quad M_{11} - M_{22} + 2iM_{12} =$$
$$= -4(1-\nu)D\left[z\overline{\phi''(z)} + \nu_1^* h^2\overline{\phi'''(z)} + \overline{\chi'(z)} + i\partial_{\bar z}^2\omega\right] -$$
$$-4(1-\nu)D\partial_{\bar z}^2\left[w_0 + \mu h^2\tilde{w}_0\right], \quad (14)$$

де $\nu_1^* = 4\mu$, $\tilde{w}_0 = \Delta w_0 + ap/Eh$.

На границі $L$ області $S$ перерізуюча сила і моменти визначаються формулами

$$Q_n = -\mathrm{Im}\left(Q_+\frac{\partial \bar z}{\partial s}\right); \quad M_n + iM_{ns} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[M_{11} + M_{22} - \left(M_{11} - M_{22} + 2iM_{12}\right)\left(\frac{\partial \bar z}{\partial s}\right)^2\right]. \quad (15)$$

Враховуючи (14), матимемо

$$Q_n = \frac{Eh}{a}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\omega + i\nu_1^* h^2\left[\phi'(z) - \overline{\phi'(z)}\right]\right\} - Q_n^{(0)}; \quad (16)$$

$$M_n + iM_{ns} = 2(1-\nu)D\left\{-\nu^*\left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\right] +\right.$$

$$+\left[z\phi''(z)+\nu_1^* h^2\overline{\phi'''(z)}+\overline{\chi''(z)}+i\frac{\partial^2\omega}{\partial\overline{z}^2}\right]\left(\frac{\partial\overline{z}}{\partial s}\right)^2\Bigg\}+$$

$$+2(1-\nu)D\left(M_n^{(0)}+iM_{ns}^{(0)}\right). \qquad (17)$$

Тут $\nu^*=(1+\nu)/(1-\nu)$; $Q_n^{(0)}=D\dfrac{\partial\tilde{w}_0}{\partial n}$;

$$M_n^{(0)}+iM_{ns}^{(0)}=-\frac{\nu^*}{4}\Delta\tilde{w}_0+\frac{\partial^2}{\partial\overline{z}^2}\left[w_0+\mu h^2\tilde{w}_0\right]\left(\frac{\partial\overline{z}}{\partial s}\right)^2.$$

У випадку а) задача зводиться до знаходження голоморфних функцій $\phi(z)$, $\chi(z)$ і дійсного розв'язку рівняння (6) при умовах

$$\overline{z}\phi(z)+z\overline{\phi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)}=-w_0;$$

$$\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\nu_1^* h^2\overline{\phi''(z)}+\overline{\chi'(z)}+i\partial_{\overline{z}}\omega=$$

$$=-i\left(\vartheta_n^{(0)}+i\vartheta_s^{(0)}\right)\frac{\partial z}{\partial s}, \qquad (18)$$

де $\vartheta_n^{(0)}$, $\vartheta_s^{(0)}$ - -кути повороту нормалі.

Для шарнірно опертого краю дані функції визначаються із граничних умов

$$\overline{z}\phi(z)+z\overline{\phi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)}=-w_0;$$

$$-\nu^*\left[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}\right]+\left[z\overline{\phi''(z)}+\nu_1^* h^2\overline{\phi'''(z)}+\right.$$

$$\left.+\overline{\chi''(z)}+i\partial_{\overline{z}}^2\omega\right]\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=-\left(M_n^{(0)}+iM_{ns}^{(0)}\right). \qquad (19)$$

Прирівнюючи до нуля праві частини рівностей (16) і (17), отримаємо умови для задачі з вільним від напружень краєм пластини. Цим умовам можна надати іншого вигляду, якщо розглянути значення головного вектора $Z_n$ і головного моменту $X_n+iY_n$ всіх сил згідно формул

$$Z_n=\int_L Q_n ds;$$

$$X_n+iY_n=-i\int_L zQ_n ds+\int_L\left(M_n+iM_{ns}\right)dz.$$

Враховуючи (16) і (17), після деяких перетворень отримуємо такі умови

$$\varkappa^*\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\nu_1^* h^2\overline{\phi''(z)}+$$

$$+\overline{\chi'(z)}+i\partial_{\overline{z}}\omega=f(z)+c;$$

$$\omega+i\nu_1^* h^2\left[\phi'(z)-\overline{\phi'(z)}\right]=f_3(z)+c_3, \qquad (20)$$

де $\varkappa^*=-(3+\nu)/(1-\nu)$; $f(z)$, $f_3(z)$ – задані значення функцій; $c$, $c_3$ – константи.

## Список використаних джерел

1. *Naghdi P.M.* Foundation of elastic shell / P.M. Naghdi // Quarterly of Applied Mathematics. – 1957. – v. 14, № 4 – P. 369 – 380.
2. *Reissner E.* On transverse bending of plates, including the effects of the stress state of a transverse shear deformation / E. Reissner // International Journal of Solids and Structures. – 1975. – v. 11. – P. 569 – 573.
3. *Амбарцумян С.А.* Терия анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян. – Москва: Наука, 1967. – 266 с.
4. *Хома И.Ю.* О сведении краевых задач изгиба трансверсально – изотропных пластин к задачам теории функций комплексного переменного / И.Ю. Хома // Теореическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 14 – 18.
5. *Khoma I.Yu*. Representation of the solution of the equilibrium equations for a nonthin transversely isotropic plate / I.Yu. Khoma // Journal of Mathematical Sciences – 2000. – 101, № 6. – P. 3577 – 3584.
6. *Морозов Н.Ф.* Избранные двумерные задачи теории упругости / *Н.Ф. Морозов.* – Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1978. – 182 с.

## References

1. NAGHDI, P. (1957) Foundation of elastic shell. *Quarterly of Applied Mathematics*. 14 (4). p. 369 – 380.
2. REISSNER, E. (1975) On transverse bending of plates, including the effects of the stress state of a transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures.* 11. p. 569 – 573.
3. AMBARTSYMIAN, S. (1967) *Teoriia anizotropnyukh plastin.* Moskva: Nauka.
4. KHOMA, I. (2009) O svedenii krayevyukh zadach izhiba transversalno – izotropnyukh plastin k zadacham teorii funktsii kompleksnoho peremennoho. *Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika.* 1 (46). c. 14 – 18.
5. KHOMA, I. (2000) Representation of the solution of the equilibrium equations for a nonthin transversely isotropic plate. Journal of Mathematical Sciences. 101 (6). p. 3577 – 3584.
6. MOROZOV, N. (1978) *Izbrannyie dvymernyie zadachi teorii uprugosti*. Leningrad: Izdatelstvo Leningradskogo universiteta.

Надійшла до редколегії 28.08.2014