УДК 517.977

Подлипенко Ю.К.[1], д.ф.-м.н., проф.,
Горбатенко М.Ю.[2], к.ф.-м.н., асистент,
Перцов А.С.[3], к.ф.-м.н., асистент

Наближені мінімаксні оцінки лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: yourip@mail.ru
[2] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 58000, м. Чернівці, вул.. Університетська, 28,
e-mail: mykola.gorbatenko@gmail.com
[3] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 58000, м. Чернівці, вул. Університетська, 28,
e-mail: pertsov@ukr.net

Yu. K. Podlypenko[1], Prof.,
M. Yu. Gorbatenko[2], PhD,
A. S. Pertsov[3], PhD

Approximate minimax estimates of linear continuous functionals from solutions of system of mixed variational equations

[1] Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: yourip@mail.ru
[2] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58000, Chernivtsi, Universytetska st., 28,
e-mail: mykola.gorbatenko@gmail.com
[3] Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 58000, Chernivtsi, Universytetska st., 28,
e-mail: pertsov@ukr.net

В даній статті вводиться поняття наближених мінімаксних середньоквадратичних оцінок значень лінійних неперервних функціоналів від розв'язків системи змішаних варіаційних рівнянь, до якої зводиться крайова задача для еліптичного рівняння 2-го порядку, і доводиться їх збіжність до точних мінімаксних оцінок.

Ключові слова: мінімаксні оцінки, спостереження, системи змішаних варіаційних рівнянь.

In the paper, we introduce the concept of approximate minimax mean-square values of estimates of linear continuous functionals of solutions of mixed variational equations with quadratic constraints on the unknown deterministic data of these problems and the second moments of noise in the observations, which reduces boundary value problem for elliptic equations of 2nd order and have their convergence to the exact minimax estimates.

Proposed new approach for retrieving of the approximate minimax mean-square estimations.

Obtained the new allegations of constructions of minimax estimation to special problems of optimal control systems, which are described by mixed variational equations of elliptic type with quadratic quality criteria. Also received the similar result for the special case when the estimation of the state of the system is directly determined from the solution of the appropriate mixed variational equations system.

Elaborated approximation of their solutions and proved the convergence of approximate solutions to exact. The systems of the linear algebraic equations for finding approximate solutions are given.

Key Words: minimax exstimates, observations, system of mixed variational equations.

Статтю представив д.т.н. Гаращенко Ф. Г.

Вступ. В роботі [1] за спостереженнями випадкових елементів вигляду

$$y_1 = C_1\mathbf{j} + \eta_1, \quad y_2 = C_2\varphi + \eta_2, \qquad (1)$$

де $(\mathbf{j},\varphi) \in H(div;D) \times L^2(\Omega)$ є розв'язком системи змішаних варіаційних рівнянь[1]

[1] З фізичної точки зору, задача задача (2), (3), моделює усталений процес розповсюдження тепла в області D, при цьому функції $\varphi(x)$, $A^{-1}(x)\mathbf{j}(x)$ і $f(x)$ відповідно мають смисл температури, теплового потоку і об'ємної щільності теплових джерел в точці x

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{j}(x),\mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx+\int_D \varphi(x)\,div\,\mathbf{q}(x)dx=0 \quad \forall \mathbf{q}\in H(div;D) \qquad (2)$$

$$\int_D v(x)\,div\,\mathbf{j}(x)dx=\int_D f(x)v(x)dx \;\; \forall v\in L^2(D), \quad (3)$$

$$f\in G_0:=\{\tilde f\in L^2(D): (Q(\tilde f-f_0),\tilde f-f_0)_{L^2(D)}\le 1\}, \qquad (4)$$

$C_1\in\mathcal{L}(L^2(D)^n,H_1)$ і $C_2\in\mathcal{L}(L^2(D),H_2)$ – лінійні неперервні оператори, а похибки η_1 і η_2 в спостереженнях (1) задовольняють умову

$$(\eta_1,\eta_2)\in G_1:=\{\tilde\eta_1\in L^2(\Omega,H_1),\tilde\eta_2\in L^2(\Omega,H_2): \mathbb{E}\tilde\eta_1=0,\,\mathbb{E}\tilde\eta_2=0,\,\mathbb{E}(\xi_1,u_1)_{H_1}(\xi_2,u_2)_{H_2}=0 \;\; \forall u_1\in H_1,\,u_2\in H_2,\;\; \mathbb{E}(\tilde Q_1\tilde\eta_1,\tilde\eta_1)_{H_1}\le 1, \;\; \mathbb{E}(\tilde Q_2\tilde\eta_2,\tilde\eta_2)_{H_2}\le 1\}, \qquad (5)$$

були одержані представлення для мінімаксної оцінки виразу

$$l(\mathbf{j},\varphi):=\int_D(\mathbf{l}_1(x),\mathbf{j}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx+\int_D l_2(x)\varphi(x)dx, \quad (6)$$

тобто для такої оцінки вигляду

$$\widehat{l(\mathbf{j},\varphi)}=(y_1,\hat u_1)_{H_1}+(y_2,\hat u_2)_{H_2}+\hat c, \qquad (7)$$

в якій елементи $\hat u_1\in H_1$, $\hat u_2\in H_2$ і число $\hat c$ визначаються із умови

$$\inf_{u\in H,c\in\mathbb{R}}\sigma(u,c)=\sigma(\hat u,\hat c),$$

де $\sigma(u,c):=\sup_{\tilde f\in G_0,(\tilde\eta_1,\tilde\eta_2)\in G_1}\mathbb{E}\,|\,l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)-\widetilde{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)}\,|^2$,

$(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)$ – розв'язок задачі (2), (3) при $f(x)=\tilde f(x)$, $\widetilde{l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde\varphi)}:=(\tilde y_1,u_1)_{H_1}+(\tilde y_2,u_2)_{H_2}+c$, $\tilde y_1=C_1\tilde{\mathbf{j}}+\tilde\eta_1$, $\tilde y_2=C_2\tilde\varphi+\tilde\eta_2$, $u:=(u_1,u_2)\in H:=H_1\times H_2$.

Тут H_1 і H_2 сепарабельні гільбертови простори над $\mathbb{R}$ із скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_{H_1}$ та $(\cdot,\cdot)_{H_2}$ і нормами $\|\cdot\|_{H_1}$ та $\|\cdot\|_{H_2}$; $L^2(\Omega,H_i)$ – простір Бохнера, що складається з випадкових елементів $\xi_i=\xi_i(\omega)$, визначених на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{B},P)$ зі значеннями в H_i таких, що $\mathbb{E}\|\xi_i(\omega)\|^2_{H_i}<\infty$, $i=1,2$, де $\mathbb{E}$ – символ математичного сподівання; D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з ліпшицевою границею; $H(div;D):=\{\mathbf{v}\in L^2(D)^n, div\,\mathbf{v}\in L^2(D)\}$; $\mathbf{A}=\mathbf{A}(x)=(a_{ij}(x))$ симетрична $n\times n$ – матриця з елементами $a_{ij}\in L^\infty(D)$, для якої існують такі додатні числа μ_1 і μ_2, що виконується нерівність $\mu_1\sum_{i=1}^n\xi_i^2\le\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\le\mu_2\sum_{i=1}^n\xi_i^2$, $\forall x\in D$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, через $\mathbf{A}^{-1}$ позначена, обернена до $\mathbf{A}$; $\mathbf{l}_1$ і l_2 – задані елементи із $L^2(D)^n$ і $L^2(D)$; $u_1\in H_1$, $u_2\in H_2$, $c\in\mathbb{R}$; $f_0\in L^2(D)$ – задана функція; Q, $\tilde Q_1$ і $\tilde Q_2$ – задані в $L^2(D)$, H_1 і H_2 обмежені самоспряжені додатньо визначені оператори, що мають обмежені обернені. Були доведені такі твердження.

Лема 1. *Нехай при фіксованому $u\in H$ пара функцій $(\mathbf{z}_1(\cdot;u),z_2(\cdot;u))\in H(div;D)\times L^2(D)$, визначається як єдиний розв'язок наступної змішаної варіаційної задачі:*

$$\int_D(\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{z}_1(x;u),\mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx+\int_D z_2(x;u)\,div\,\mathbf{q}(x)dx= =\int_D(\mathbf{l}_1(x)-(C_1^tJ_{H_1}u_1)(x),\mathbf{q}(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx \quad \forall\mathbf{q}\in H(div,D), \qquad (8)$$

$$\int_D v(x)\,div\,\mathbf{z}_1(x;u)dx= =\int_D(l_2(x)-(C_2^tJ_{H_2}u_2)(x))v(x)dx \quad \forall v\in L^2(D), \;(9)$$

де $J_{H_i}\in\mathcal{L}(H_i,H_{i'})$ – оператор, який діє з H_i на його спряжений простір $H_{i'}$ та визначається рівністю[2] $(v,u)_{H_i}= \;=<v,J_{H_i}u>_{H_i\times H_{i'}}$ $\forall u,v\in H_i$, *де* $<x,f>_{H_i\times H_{i'}}:=f(x)$ *для* $x\in H_i$, $f\in H_{i'}$, $i=1,2$, $C_1^t:H_{1'}\to L^2(D)^n$ *і* $C_2^t:H_{2'}\to L^2(D)$ – *оператори, транспоновані до* C_1 *і* C_2, *що визначаються співвідношеннями*

$$.\int_D(v(x),C_1^tw(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx=<Cv,w>_{H_1\times H_{1'}}.$$

для всіх $v\in L^2(D)^n$, $w\in H_{1'}$
і

$$\int_D v(x)C_2^tw(x)dx=<Cv,w>_{H_2\times H_{2'}}$$

для всіх $v\in L^2(D)$, $w\in H_{2'}$.

Із (8) і (9) маємо $z_2\in H_0^1(D)$.

Тоді задача знаходження мінімаксної оцінки виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$ *є еквівалентною задачі оптимального керування системою, що*

[2] Цей оператор існує в силу теореми Рісса.

описується задачею (8) – (9) з функцією вартості вигляду

$$I(u) = (Q^{-1}z_2(\cdot;u), z_2(\cdot;u))_{L^2(D)} + (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + \\ +(\tilde{Q}_2^{-1}u_2, u_2)_{H_2} \to \inf_{u\in H}. \qquad (10)$$

В теоремах 1 і 2 з [1] показано, що розв'язок задачі оптимального керування (8) – (10) (а отже, знаходження мінімаксної оцінки) зводиться до розв'язання деяких систем змішаних варіаційних рівнянь спеціального вигляду, тобто має місце такий результат.

Теорема 1 *Існує єдина мінімаксна оцінка значення* $l(\mathbf{j},\varphi)$, *яка має вигляд*

$$l(\mathbf{j},\varphi) = (y_1,\hat{u}_1)_{H_1} + (y_2,\hat{u}_2)_{H_2} + \hat{c} = l(\hat{\mathbf{j}},\hat{\varphi}),$$

де

$$\hat{c} = \int_D \hat{z}_2(x) f_0(x)dx, \quad \hat{u}_1 = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1, \quad \hat{u}_2 = \tilde{Q}_2 C_2 p_2,$$

а функції $\mathbf{p}_1 \in H(div,D)$, $\hat{z}_2, p_2 \in L^2(D)$ *і* $\hat{\mathbf{j}} \in H(div,D)$, $\hat{\varphi} \in L^2(D)$ *знаходяться з розв'язку наступних однозначно розв'язних систем варіаційних рівнянь:*

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{z}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2(x)\, div\, \mathbf{q}_1(x)dx =$$
$$= \int_D (\mathbf{l}_1(x) - C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}_1 \in H(\, div, D), \qquad (11)$$

$$\int_D v_1(x)\, div\, \hat{\mathbf{z}}_1(x)dx =$$
$$= \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2(x)) v_1(x)dx$$
$$\forall v_1 \in L^2(D), \qquad (12)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{p}_1(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+\int_D p_2(x)\, div\, \mathbf{q}_2(x)dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2 \in H(div,D), \quad (13)$$

$$\int_D v_2(x)\, div\, \hat{\mathbf{p}}_1(x)dx = \int_D v_2(x) Q^{-1}\hat{z}_2(x)dx$$
$$\forall v_2 \in L^2(D) \qquad (14)$$

і

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{p}}_1(x), \mathbf{q}_1(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{p}_2(x)\, div\, \mathbf{q}_1(x)dx =$$
$$= \int_D (C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 (y_1 - C_1\hat{\mathbf{j}})(x), \mathbf{q}_1(x))_{R^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}_1 \in H(div,D), \qquad (15)$$

$$\int_D v_1(x)\, div\, \hat{\mathbf{p}}_1(x)dx =$$
$$= \int_D v_1(x) C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 (y_2 - C_2\hat{\varphi})(x)dx$$
$$\forall v_1 \in L^2(D), \qquad (16)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{j}}(x), \mathbf{q}_2(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{\varphi}(x)\, div\, \mathbf{q}_2(x)dx = 0$$
$$\forall \mathbf{q}_2 \in H(div,D), \qquad (17)$$

$$\int_D v_2(x)\, div\, \hat{\mathbf{j}}(x)dx = \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}_2(x) + f_0(x))dx$$
$$\forall v_2 \in L^2(D), \qquad (18)$$

відповідно, в яких рівності (15)–(18) виконуються з ймовірністю 1. Тут $\hat{\mathbf{z}}_1, \hat{\mathbf{p}}_1 \in H(div,D)$, $\hat{p}_2 \in L^2(D)$.

Відзначимо, що функції $\hat{\mathbf{z}}_1(x) = \mathbf{z}_1(x;\hat{u})$ і $\hat{z}_2(x) = z_2(x;\hat{u})$ є розвязком задачі (8)–(9), а $\hat{u}$ – оптимальне керування системою, що описується цими рівняннями з критерієм якості (10).

Основні результати. Далі вводиться поняття наближених мінімаксних середньоквадратичних оцінок виразу $l(\mathbf{j},\varphi)$ і доводиться їх збіжність до $l(\mathbf{j},\varphi)$.

Для формулювання відповідних результатів спочатку дамо таке означення. Нехай W^h – скінченновимірні підпростори деякого гільбертового простору W, де параметр h означає довільний елемент деякої послідовності, яка прямує до нуля, і кожному значенню h відповідає простір $W^h \subset W$. Послідовність підпросторів W^h будемо називати повною в W, якщо для будь-якого елемента $\varphi \in W$ знайдеться послідовность елементів $\varphi^h \in W^h$ така, що

$$\left\|\varphi - \varphi^h\right\|_W \to 0, \quad при \quad h \to 0.$$

Позначимо через V_1^h та V_2^h повні підпростори в $V_1 := H(div,D)$ і $V_2 := L^2(D)$ відповідно, тобто підпростори, що задовольняють умовам

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in H(div,D), \forall \psi \in L^2(D)$$
$$\exists \text{ посл. } \{\boldsymbol{\varphi}^h\}, \{\psi^h\}, \boldsymbol{\varphi}^h \in V_1^h, \psi^h \in V_2^h \text{ такі, що}$$
$$\left\|\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\varphi}^h\right\|_{H(div,D)} \to 0, \quad \left\|\psi - \psi^h\right\|_{L^2(D)} \to 0$$
$$\text{при } h \to 0,$$

Підпростори з такими властивостями відомі та використовуються при розв'язанні крайових задач для еліптичних рівнянь в їх змішаній варіаційній постановці виду (2)–(3) методом скінченних елементів. Прикладом послідовності підпросторів V_1^h, що є повною в $H(div,D)$, у випадку $n=2$ може слугувати послідовність скінченноелементних підпросторів, побудована Рав'яром і Томасом (Raviart P.A., Thomas J.M. [4]) та у випадку $n=3$ – послідовность підпросторів Неделека та Брецці, Дагласа та Фортена (їх детальний опис та властивості див. в роботах [3] та [2]). В якості послідовності підпросторів V_2^h, яка є повною в просторі $L^2(D)$, можна взяти послідовность підпросторів $V_2^h = divV_1^h$.

В якості наближеної мінімаксної оцінки величини $l(\mathbf{j},\varphi)$ візьмемо вираз

$$l^h(\mathbf{j},\varphi) = (\hat{u}_1^h, y_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^h, y_2)_{H_1} + \hat{c}^h,$$

де

$$\hat{u}_1^h = \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1^h, \hat{u}_2^h = \tilde{Q}_2 C_2 p_2^h, \hat{c}^h = \int_D \hat{z}_2^h(x) f_0(x)dx, \quad (19)$$

а функції $\hat{\mathbf{z}}_1^h, \mathbf{p}_1^h \in V_1^h$ і $\hat{z}_2^h, p_2^h \in V_2^h$ знаходяться з розв'язку наступної однозначно розв'язної системи варіаційних рівнянь

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{z}}_1^h(x), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx + \int_D \hat{z}_2^h(x)\, div\,\mathbf{q}_1^h(x)dx =$$
$$= \int_D (\mathbf{l}_1(x) - C_1^t J_{H_1} \tilde{Q}_1 C_1 \mathbf{p}_1^h(x), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}_1^h \in V_1^h, \quad (20)$$

$$\int_D v_1^h(x)\, div\,\hat{\mathbf{z}}_1^h(x)dx =$$
$$= \int_D (l_2(x) - C_2^t J_{H_2} \tilde{Q}_2 C_2 p_2^h(x)) v_1^h(x)dx$$
$$\forall v_1^h \in V_2^h, \quad (21)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{p}_1^h(x), \mathbf{q}_2^h(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+ \int_D p_2^h(x)\, div\,\mathbf{q}_2^h(x)dx = 0 \quad \forall \mathbf{q}_2^h \in V_1^h, \quad (22)$$

$$\int_D v_2^h(x)\, div\,\mathbf{p}_1^h(x)dx = \int_D v_2^h(x) Q^{-1} \hat{z}_2^h(x)dx$$
$$\forall v_2^h \in V_2^h. \quad (23)$$

Відзначимо, що з теореми 2.1 в [2] і з міркувань за допомогою яких була доведена теорема 1, в яких простори $V_1 := H(div, D)$ і $V_2 := L^2(D)$ замінені на V_1^h і V_2^h, відповідно, випливає, що система (20)–(23) однозначно розв'язна.

Теорема 2. *Наближена мінімаксна оцінка* $l^h(\mathbf{j},\varphi)$ *виразу* $l(\mathbf{j},\varphi)$ *при* $h\to 0$ *збігається до мінімаксної оцінки* $l(\mathbf{j},\varphi)$ *цього виразу в тому розумінні, що*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}\,|\, l^h(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^2 = 0,$$

при цьому

$$\lim_{h\to 0} \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}\,|\, l^h(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^2 =$$
$$= \sup_{\tilde{f}\in G_0, (\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2)\in G_1} \mathbb{E}\,|\, l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}))\,|^2,$$

де $\tilde{\varphi}$ *має той же смисл, що і в означенні мінімаксної оцінки, яке міститься на стор. 2,* $l^h(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) = (\hat{u}_1^h, \tilde{y}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^h, \tilde{y}_2)_{H_1} + \hat{c}^h$, $\quad \tilde{y}_1 = C_1\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\eta}_1$, $\tilde{y}_2 = C_2\tilde{\varphi} + \tilde{\eta}_2$.

Доведення. Позначимо через $\{h_n\}$ довільну послідовниість додатних чисел, таку що $h_n \to 0$ при $n\to\infty$. Нехай $\mathbf{z}_1^{h_n}(\cdot;u) \in V_1^{h_n}$, і $z_2^{h_n}(\cdot;u) \in V_2^{h_n}$ – розв'язок задачі

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{z}_1^{h_n}(x;u), \mathbf{q}^{h_n}(x))_{\mathbb{R}^n} dx +$$
$$+ \int_D z_2^{h_n}(x;u)\, div\,\mathbf{q}^{h_n}(x)dx =$$
$$= \int_D (\mathbf{l}_1(x) - (C_1^t J_{H_1} u_1)(x), \mathbf{q}^{h_n}(x))_{\mathbb{R}^n} dx$$
$$\forall \mathbf{q}^{h_n} \in V_1^{h_n}, \quad (24)$$

$$\int_D v(x)\, div\,\mathbf{z}_1^{h_n}(x;u)dx =$$
$$= \int_D (l_2(x) - (C_2^t J_{H_2} u_2)(x)) v^{h_n}(x)dx \;\; \forall v^{h_n} \in V_2^{h_n}. \quad (25)$$

Тоді, внаслідок нерівності (2.36) з [2] і того факту, що підпростори V_1^h і V_2^h є повними в просторах $H(div, D)$ і $L^2(D)$ відповідно, випливає, що

$$\left\| \mathbf{z}_1(\cdot;u) - \mathbf{z}_1^{h_n}(\cdot;u) \right\|_{H(div,D)} +$$
$$+ \left\| z_2(\cdot;u) - z_2^{h_n}(\cdot;u) \right\|_{L^2(D)} \to 0 \quad (26)$$

при $n\to\infty.$

Доведемо тепер, що

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u^{h_n} - \hat{u} \right\|_H = \lim_{n\to\infty} \left(\left\| u_1^{h_n} - \hat{u}_1 \right\|_{H_1} + \left\| u_2^{h_n} - \hat{u}_2 \right\|_{H_2} \right) = 0,$$

де $u^{h_n} = (u_1^{h_n}, u_2^{h_n})$, $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, $H = H_1 \times H_2$.

Покладемо

$$I_n(u) = (Q^{-1} z_2^{h_n}(\cdot;u), z_2^{h_n}(\cdot;u))_{L^2(D)} +$$
$$+ (\tilde{Q}_1^{-1} u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1} u_2, u_2)_{H_2}. \quad (27)$$

Зрозуміло, що

$$\inf_{u\in H} I_n(u) = I_n(u^{h_n}),$$
$$I_n(u^{h_n}) \le I_n(\hat{u}).$$

Внаслідок сильної збіжності $(\mathbf{z}_1^{h_n}(\cdot;\hat{u}), z_2^{h_n}(\cdot;\hat{u}))$ до $(\mathbf{z}_1(\hat{u}), z_2(\hat{u}))$ в просторі $V\times Q,$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} I_n(\hat{u}) = I(\hat{u}),$$

і, отже, $\overline{\lim}_{n\to\infty} I_n(u^{h_n}) \le I(\hat{u}).$ Оскільки $I_n(u^{h_n}) \ge (\tilde{Q}_1^{-1}u_1^{h_n}, u_1^{h_n})_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2^{h_n}, u_2^{h_n})_{H_2}$, то з послідовності $\{u^{h_n}\}$ можна виділити таку підпослідовность $\{u^{h_{n_k}}\}$, що $u^{h_{n_k}} \to \tilde{u}$ слабко в H. В силу напівнеперевності знизу функціонала $I(u)$ в слабкій топології простора H випливає, що

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} I_{n_k}(u^{h_{n_k}}) \ge I(\tilde{u}).$$

Так як

$$I(\tilde{u}) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} I_{n_k}(u^{h_{n_k}}) \le \overline{\lim}_{k\to\infty} I_n(u^{h_{n_k}}) \le I(\hat{u}),$$

то внаслідок єдиності елемента, на якому досягається мінімум функціонала $I(u),$ одержуємо що $\tilde{u} = \hat{u}.$ Це означає, що при $n\to\infty$ зокрема,

$$z_2^{h_n}(\cdot;u^{h_n}) \xrightarrow{\text{м.с.}} z_2(\cdot;\hat{u}) = \hat{z}_2 \quad \text{в} \quad L^2(D).$$

Крім того з сказаного вище випливає, що $I_n(u^{h_n}) \to I(\hat{u}).$ Але тоді

$$(\tilde{Q}_1^{-1}u_1^{h_n}, u_1^{h_n})_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2^{h_n}, u_2^{h_n})_{H_2} \to$$
$$\to (\tilde{Q}_1^{-1}u_1, u_1)_{H_1} + (\tilde{Q}_2^{-1}u_2, u_2)_{H_2},$$

з цієї рівності та з того, що послідовність $\{u^{h_n}\}$ слабко збігається до $\hat{u}$ випливає її сильна збіжність в просторі H.

Далі, нехай тепер $(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\varphi})$ – будь-який розв'язок крайової задачі (2)–(3) при $f(x) = \tilde{f}(x)$. Тоді, внаслідок (19) і (20)–(23), маємо

$$\mathbb{E}\,|\, l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^2 = \mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n}, \tilde{y}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n}, \tilde{y}_2)_{H_1} +$$
$$+\hat{c}^{h_n} - (\hat{u}_1, \tilde{y}_1)_{H_1} - (\hat{u}_2, \tilde{y}_2)_{H_2} - \hat{c}]^2 =$$
$$= \mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, \tilde{y}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, \tilde{y}_2)_{H_2} + \hat{c}^{h_n} - \hat{c}]^2 =$$
$$= [(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, C_1\tilde{\mathbf{j}})_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, C_2\tilde{\varphi})_{H_2} + \hat{c}^{h_n} - \hat{c}]^2 +$$
$$+\mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}]. \qquad (28)$$

Але враховуючи, що $\hat{z}_2^{h_n}$ слабко збігається до $\hat{z}_2$ в просторі $L^2(D)$ і, отже $\hat{c}^{h_n} \to \hat{c}$ при $n\to\infty,$ а також той факт, що $\tilde{f} \in G_0$ і нерівність (див. [2]) $\|\tilde{\mathbf{j}}\|_{H(div,D)} + \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(D)} \le \alpha \|\tilde{f}\|_{L^2(D)}$, де $\alpha = const$, бачимо, що вираз

$$[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, C_1\tilde{\mathbf{j}})_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, C_2\tilde{\varphi})_{H_2} + \hat{c}^{h_n} - \hat{c}]^2 \le$$
$$\le C\left(\|\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1\|_{H_1}^2 + \|\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2\|_{H_2}^2 + (\hat{c}^{h_n} - \hat{c})^2\right)\times$$
$$\times\left(\|\tilde{\mathbf{j}}\|_{H(div,D)}^2 + \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(D)}^2\right) \le$$
$$\le \tilde{C}\left(\|\hat{u}^{h_n} - \hat{u}\|_H^2 + (\hat{c}^{h_n} - \hat{c})^2\right)\|\tilde{f}\|_{L^2(D)}^2 \,(C,\, \tilde{C} = const)$$

прямує до 0 при $n\to\infty.$ Аналогічно доводиться, що останній доданок

$$\mathbb{E}[(\hat{u}_1^{h_n} - \hat{u}_1, \tilde{\eta}_1)_{H_1} + (\hat{u}_2^{h_n} - \hat{u}_2, \tilde{\eta}_2)_{H_2}]$$

в правій частині співвідношення (28) також прямує до 0 при $n\to\infty.$ Звідси та з того, що

$$\mathbb{E}\,|\,l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^{1/2} = \mathbb{E}[l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) +$$
$$+l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^{1/2} \le \left\{\mathbb{E}\,|\,l^{h_n}(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})\,|^2\right\}^{1/2} +$$
$$+\left\{\mathbb{E}[l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi}) - l(\tilde{\mathbf{j}},\tilde{\varphi})]^2\,|\right\}^{1/2}$$

випливає справедливість твердження теореми.

Наведемо тепер аналогічний результат для випадку, коли оцінка стану $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\varphi}$ беспосередньо визначається з розв'язку змішаної системи варіаційних рівнянь (15)–(18).

Теорема 3. *Нехай* $(\hat{\mathbf{j}}^h, \hat{\varphi}^h) \in V_1^h \times V_2^h$ *наближена оцінка стану системи, що визначається із розв'язку варіаційної задачі*

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{p}}_1^h(x), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx + \int_D \hat{p}_2^h(x)\; div\,\mathbf{q}_1^h(x)dx =$$
$$= \int_D (C_1^t J_{H_1}\tilde{Q}_1(y_1(x) - C_1\hat{\mathbf{j}}^h), \mathbf{q}_1^h(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx$$
$$\forall \mathbf{q}_1^h \in V_1^h, \qquad (29)$$

$$\int_D v_1^h(x)\; div\,\hat{\mathbf{p}}_1^h(x)dx = \int_D (C_2^t J_{H_2}\tilde{Q}_2(y_2(x) -$$
$$-C_2\hat{\varphi}^h(x))v_1^h(x)dx \quad \forall v_1^h \in V_2^h, \qquad (30)$$

$$\int_D (\mathbf{A}^{-1}(x)\hat{\mathbf{j}}^h(x), \mathbf{q}_2^h(x))_{\mathbb{R}^n}\,dx +$$
$$+\int_D \hat{\varphi}^h(x) div\,\mathbf{q}_2^h(x)dx = 0 \;\; \forall \mathbf{q}_2^h \in V_1^h, \qquad (31)$$

$$\int_D v_2^h(x)\; div\,\hat{\mathbf{j}}^h(x)dx = \int_D v_2(x)(Q^{-1}\hat{p}_2^h(x) +$$
$$+f_0(x))dx \quad \forall v_2^h \in V_2^h. \qquad (32)$$

Тоді наближену мінімаксну оцінку $l^h(\mathbf{j},\varphi)$ *виразу* $l(\mathbf{j},\varphi)$ *можна представити у вигляді*

$$l^h(\mathbf{j},\varphi) = l(\hat{\mathbf{j}}^h,\hat{\varphi}^h),$$
$$\left\|\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{j}}^h\right\|_{H(div,D)} + \left\|\hat{\varphi}-\hat{\varphi}^h\right\|_{L^2(D)} \to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

Вводячи базиси у просторах V_1^h і V_2^h, задачу (20)–(23) можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Для цього позначимо елементи базисів через $\boldsymbol{\xi}_i$ $(i=1,\ldots,n_1)$ і η_i $(i=1,\ldots,n_2)$, де $n_1 = dimV_1^h$, $n_2 = dimV_2^h$. Належність $\hat{\mathbf{z}}_1^h$, $\mathbf{p}_1^h$ і $\hat{z}_2^h$, p_2^h до просторів V_1^h і V_2^h означає існування констант $\hat{z}_i^{(1)}$, $p_i^{(1)}$ і $\hat{z}_i^{(2)}$, $p_i^{(2)}$ таких, що

$$\hat{\mathbf{z}}_1^h = \sum_{j=1}^{n_1}\hat{z}_j^{(1)}\boldsymbol{\xi}_j, \quad \mathbf{p}_1^h = \sum_{j=1}^{n_1}p_j^{(1)}\boldsymbol{\xi}_j \tag{33}$$

$$\hat{z}_2^h = \sum_{j=1}^{n_2}\hat{z}_j^{(2)}\eta_j, \quad p_2^h = \sum_{j=1}^{n_2}p_j^{(2)}\eta_j. \tag{34}$$

Покладаючи в (20) і (22) $\mathbf{q}_1^h = \mathbf{q}_2^h = \boldsymbol{\xi}_i$ $(i=1,\ldots,n_1)$ та в (21) і (23) $v_1^h = v_2^h = \eta_i$ $(i=1,\ldots,n_2)$ відповідно, отримаємо, що знаходження $\hat{\mathbf{z}}_1^h$, $\mathbf{p}_1^h$, z_2^h і p_2^h із (20)–(23) еквівалентно розв'язанню наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $\hat{z}_j^{(1)}$, $p_j^{(1)}$, $\hat{z}_j^{(2)}$, $p_j^{(2)}$ розкладів (33), (34):

$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(1)}\hat{z}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2}a_{ji}^{(2)}\hat{z}_j^{(2)} + \sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(3)}p_j^{(1)} = b_i^{(1)},$$
$$i=1,\ldots,n_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(2)}\hat{z}_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2}a_{ij}^{(5)}p_j^{(2)} = b_i^{(1)}, \quad i=1,\ldots,n_2,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(1)}p_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{n_2}a_{ji}^{(2)}p_j^{(2)} = 0, \quad i=1,\ldots,n_1,$$
$$\sum_{j=1}^{n_1}a_{ij}^{(2)}p_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{n_2}a_{ij}^{(5)}\hat{z}_j^{(2)} = 0, \quad i=1,\ldots,n_2.$$

де

$$a_{ij}^{(1)} = \int_D(\mathbf{A}^{-1}(x)\boldsymbol{\xi}_i(x),\boldsymbol{\xi}_j(x))_{\mathbb{R}^n}dx, \quad i,j=1,\ldots,n_1,$$
$$a_{ij}^{(2)} = \int_D\eta_i(x)\, div\,\boldsymbol{\xi}_j(x)dx, \quad i=1,\ldots,n_2, \quad j=1,\ldots,n_1,$$
$$a_{ij}^{(3)} = \int_D(C_1^tJ_{H_1}\tilde{Q}_1C_1\boldsymbol{\xi}_i(x),\boldsymbol{\xi}_j(x))_{\mathbb{R}^n}dx, \quad i,j=1,\ldots,n_1,$$
$$a_{ij}^{(4)} = \int_D C_2^tJ_{H_2}\tilde{Q}_2C_2\eta_i(x)\eta_j(x)dx, \quad i,j=1,\ldots,n_2,$$
$$a_{ij}^{(5)} = \sum_{i=1}^{n_2}\hat{z}_i^{(2)}\int_D\eta_j(x)Q^{-1}\eta_i(x)dx, \quad i,j=1,\ldots,n_2,$$
$$b_j^{(1)} = \int_D(\mathbf{l}_1(x),\boldsymbol{\xi}_j(x))_{\mathbb{R}^n}dx, \quad j=1,\ldots,n_1,$$
$$b_j^{(2)} = \int_D l_2(x)\eta_j(x)dx, \quad j=1,\ldots,n_2.$$

Аналогічну систему лінійних алгебраїчних рівнянь можна отримати і для задачі (29)–(32).

Список використаних джерел

1. *Подлипенко Ю.К.* Оцінювання узагальнених розв'язків лінійних еліптичних рівнянь, що допускають змішане варіаційне формулювання. / Ю.К. Подлипенко, М.Ю. Горбатенко // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія:фізико-математичні науки.– 2008.– Випуск 3.– С.158-164.
2. *Brezzi F.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F. Brezzi, M. Fortin // Springer-Verlag New York, Inc, 1991.
3. *Nedelec J.C.* Mixed finite element in $\mathbb{R}^3$ // J.C. Nedelec Numer. Math., 35, pp. 315-341, 1980.
4. *Raviart P.A.* A mixed finite element method for second order elliptic problems / A.P. Raviart, J.M. Thomas // Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Math. 606, Springer-Verlag, New York, 1977.

References

1. PODLYPENKO, Yu.K and GORBATENKO, M.Yu (2008), Evaluation of generalized solutions of linear elliptic equations that allowing the mixed variational formulation, Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics, Vol. 3, pp. 158-164.
2. BREZZI, F. and FORTIN, M (1991), . *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag New York, Inc.
3. NEDELEC, J.C. (1980) *Mixed finite element in* $\mathbb{R}^3$, Numer. Math., 35, pp. 315-341.
4. RAVIART, P.A. and THOMAS, J.M. (1977) *A mixed finite element method for second order elliptic problems*, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, Lecture Notes in Math. 606, Springer-Verlag, New York.

Надійшла до редколегії 10.06.14