УДК 517.956

Анікушин А. В., к.ф.-м.н., асистент
Номіровський Д. А., д.ф.-м.н., професор

Якісний аналіз лінійних диференціальних моделей псевдогіперболічного типу в деяких класах узагальнених функцій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: anik_andrii@ukr.net
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: kashpir@mail.ru

A. V. Anikushyn, Ph.D.
D. A. Nomirovskii, Ph.D.

Qualitative analysis of linear differential pseudohyperbolic equations in some classes of distributions

Department of Computational Mathematics of Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: anik_andrii@ukr.net
Department of Computational Mathematics of Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: kashpir@mail.ru

Вивчається крайова задача для лінійного диференціального псевдогіперболічного оператора третього порядку. Диференціальний оператор діє у просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу просторів Соболева. Розглядається узагальнена постановка. Доведено, що псевдогіперболічний оператор задовольняє ланцюг апріорних нерівностей в різних класах узагальнених функцій. Доведено теореми існування та єдиності розв'язку псевдогіперболічного рівняння.

Ключові слова: пседвогіперболічне рівняння, якісний аналіз, узагальнені функції, розв'язок.

The paper deals with linear third order differential pseudo-hyperbolic equations defined in a cylindrical domain. We require that the state function of the equations satisfies the homogeneous initial and boundary conditions of the first, second, or third types. The main operator of the pseudo-hyperbolic equation is required to be uniformly elliptic with respect to the space variables.

The chief result of the article is the existence and uniqueness theorems for the pseudo-hyperbolic equations in the terms of theory of distributions (generalized functions) of finite order. Since the problem is considered in the weak formulations, we continuously extend the classical pseudo-hyperbolic operator and its adjoint operator to operators defined in certain spaces of distributions. This allows us to prove an infinite chain of a priori inequalities for the extended pseudo-hyperbolic operators and their adjoint operators. The proof is based on using specific auxiliary integral and differential operators with respect to the time variable. The existence and uniqueness theorems for both the pseudo-hyperbolic equations and their adjoint ones proceed from these inequalities.

Key Words: pseudo-hyperbolic equation, qualitative analysis, distributions, solution.

Статтю представив д.т.н., с.н.с. Кудін В.І.

У циліндричній області $(t,\xi)\in Q=(0,T)\times\times\Omega$, де $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — обмежена однозв'язна область з регулярною межею $\partial\Omega$, розглянемо лінійний диференціальний псевдогіперболічний оператор:

$$\mathcal{L}u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+B(u). \qquad (1)$$

Диференціальні оператори A та B не залежать від часової змінної t і задаються стандартними загальними диференціальними виразами другого порядку за просторовими змінними $\xi==(\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Наприклад,

$$A(u)=-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{\xi_i})_{\xi_j}+\sum_{i=1}^{n}a_iu_{\xi_i}+au.$$

Вимагається, щоб оператор A був рівномірно еліптичним в області $\overline{\Omega}$.

Межа $\partial\Omega$ області Ω складається з трьох регулярних частин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Покладемо $\Gamma_i = (0,T)\times\gamma_i$, де $i\in\{1,2,3\}$. Функція стану $u(t,\xi)$ задовольняє однорідні крайові умови:

$$u|_{\Gamma_1} = \frac{\partial_{\mathcal{L}} u}{\partial\vec{n}}|_{\Gamma_2} = \Big(a_0(x)u + \frac{\partial_{\mathcal{L}} u}{\partial\vec{n}}\Big)|_{\Gamma_3} = 0 \quad (2)$$

та початкові умови:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

де $\partial_{\mathcal{L}} u/\partial\vec{n} = (\operatorname{grad}_{\mathcal{L}} u, \vec{n})_{\mathbb{R}^n}$, а $\mathcal{L}$-градієнт $\operatorname{grad}_{\mathcal{L}}$ визначено в [1].

В статті [1] для оператора $\mathcal{L}$ доведено апріорні нерівності в деяких просторах узагальнених функцій скінченного порядку:

$$\|u\|_{W_0^0} \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^1)^*} \leqslant c_2\|u\|_{H_0^1} \leqslant \leqslant c_3\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^1)^*} \leqslant c_4\|u\|_{W_0^1}, \quad (4)$$

де $u(t,\xi)$ — довільна функція простору W_0^1, c_i — додатні сталі, що не залежать від $u(t,\xi)$.

Допоміжні інтегро-диференціальні оператори, які використано у доведенні нерівностей (4), дозволяють встановити подібні співвідношення для спряженого псевдогіперболічного оператора. Крім цього, на основі отриманих апріорних нерівностей можна вивчати лінійний псевдогіперболічний оператор, що діє в інших парах просторів. Зокрема, нерівності (4) можна "зсунути" на диференціальний оператор d^k/dt^k при довільних цілих значеннях k.

Розповсюдимо позначення $u^{(k)}$ для k-ої похідної за змінною t для функції $u \in L_0$ на випадок цілих від'ємних значень k . У випадку $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$ під $u^{(k)}$ будемо розуміти функцію, яку одержано після $|k|$-кратного застосування до функції $u(t,\xi)$ оператора інтегрування

$$u(t,\xi) \to \int_0^t u(\tau,\xi)\,d\tau.$$

Використовуючи інтегральний оператор

$$v(t,\xi) \to \int_T^t v(\tau,\xi)\,d\tau,$$

введемо для кожної функцій $v \in L_T$ подібне позначення: $v^{[k]}$. Зауважимо, що функція $v^{[k]}$ для $k\geqslant 0$ визначається як звичайна k-та похідна функції $v \in L_T$ за змінною t.

Використовуючи наведені позначення, уведемо до розгляду простори W_0^k, H_0^k, W_T^k і H_T^k для випадку цілих значень k. Наприклад, під W_T^k будемо розуміти простір, побудований як поповнення множини функцій L_T за нормою:

$$\|v\|^2_{W_T^k} = \sum_{i=1}^n \int_Q \Big(v_{\xi_i}^{[k]}\Big)^2\,dQ.$$

Зрозуміло, що природне розширення лінійного відображення $u \to u^{(k)}$, де $k \in \mathbb{Z}$, з множини L_0 на весь простір W_0^l, де $l \in \mathbb{Z}$, задає ізометрію між простором W_0^l (або відповідно H_0^l) і простором W_0^{l-k} (відповідно H_0^{l-k}).

З аналогічних причин розширення відображення $v \to v^{[k]}$, де $k \in \mathbb{Z}$, задає ізометрію між простором W_T^l (або відповідно H_T^l) і простором W_T^{l-k} (відповідно H_T^{l-k}).

Для всіх u і $k, m \in \mathbb{Z}$ виконується рівність:

$$(u^{(k)})^{(m)} = u^{(k+m)}.$$

Зокрема, рівність $(u^{(1)})^{(-1)} = u$, яку формально можна подати у вигляді:

$$\int_0^t u_t(\tau,\xi)d\tau = u(t,\xi),$$

справджується для всіх W_0^0, незважаючи на те, що простір W_0^0 містить і такі нескінченно диференційовні функції $u(t,\xi)$, які не обертаються в нуль при $t = 0$.

Аналогічне твердження має місце і для відображення: $v \to v^{[k]}$.

Використовуючи формулу інтегрування частинами і початкові умови на функції u і v, можна показати, що для довільних функцій $u \in L_0$ і $v \in L_T$ має місце рівність:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} &= (u, v_{tt} - av_t + bv)_{L_2(Q)} + \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^t u_{\xi_i} d\tau, a_{ij}v_{\xi_j tt} - b_{ij}v_{\xi_j t}\right)_{L_2(Q)} + \quad (5)\\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\int_0^t u_{\xi_i} d\tau, a_i v_{tt} - b_i v_t\right)_{L_2(Q)} - \\ &- \left(\int_0^t a_0 u d\tau, v_t\right)_{L_2(\Gamma_3)}.\end{aligned}$$

Праву частину останньої рівності (5) можна розглядати як означення розширення оператора $\mathcal{L}$ до оператора (за яким збережемо попереднє позначення), що діє в просторах $\mathcal{L}\colon H_0^0 \to (W_T^2)^*$ і визначений на всьому просторі H_0^0.

Неважко довести, що розширений оператор $\mathcal{L}\colon H_0^0 \to (W_T^2)^*$ є лінійним і неперервним. Спряжений лінійний неперервний оператор $\mathcal{L}^*\colon W_T^2 \to (H_0^0)^*$ також визначається правою частиною рівності (5).

Лема 1. *Нехай $\mathcal{L}\colon H_0^0 \to (W_T^2)^*$. Для довільної функції $u \in H_0^0$ мають місце нерівності*

$$\|u\|_{W_0^{-1}} \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^2)^*} \leqslant c_2\|u\|_{H_0^0}, \qquad (6)$$

де c_1, c_2 — додатні сталі, що не залежать від функції $u(t,\xi)$.

Доведення. Якщо до виразу, визначеному правою частиною рівності (5), застосувати нерівність Коші-Буняковського в інтегральній формі і нерівність Фрідріхса, то отримаємо доведення правої частини (6).

Для доведення нерівності $\|u\|_{W_0^{-1}} \leqslant \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^2)^*}$ розглянемо значення функціонала $\mathcal{L}u \in (W_T^2)^*$ на елементі

$$v^{[-1]}(t,\xi) = \int_T^t v(\tau,\xi)\,d\tau,$$

де функція $v(t,\xi)$ — розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$e^{Mt}(v_t - v) = \int_0^t u(\tau,\xi)\,d\tau, \quad v|_{t=T} = 0. \qquad (7)$$

Відзначимо, що легко встановити належність функції $v^{[-1]}(t,\xi)$ простору W_T^2. Справді, оскільки функція $u(t,\xi)$ належить простору H_0^0, то функція $u^{(-1)}(t,\xi)$ належить простору H_0^1. З леми 1 роботи [1] випливає, що функція $e^{-Mt}u^{(-1)}(t,\xi)$ є елементом простору W_0^0. Використовуючи лему 3 роботи [1] і посилаючись на рівність (7), маємо, що $v \in W_T^1$. Тому $v^{[-1]}(t,\xi)$ належить простору W_T^2.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, можна показати, що має місце рівність:

$$\left\langle \mathcal{L}u, v^{[-1]}\right\rangle_{W_T^2} = \left\langle \mathcal{L}(-u^{(-1)}), v\right\rangle_{W_T^1}.$$

Ураховуючи те, що функції $u^{(-1)}$ і v зв'язані між собою рівністю (7), для оцінки знизу виразу $\left\langle \mathcal{L}(-u^{(-1)}), v\right\rangle_{W_T^1}$ можна повторити міркування леми 4 статті [1]. Це дозволяє стверджувати, що для деякої досить великої додатної сталої c мають місце співвідношення:

$$c\left\langle \mathcal{L}(-u^{(-1)}), v\right\rangle_{W_T^1} \geqslant \|u^{(-1)}\|^2_{W_0^0} + \|v\|^2_{W_T^1} =$$
$$= \|u\|^2_{W_0^{-1}} + \|v^{[-1]}\|^2_{W_T^2} \geqslant 2\|u\|_{W_0^{-1}}\|v^{[-1]}\|_{W_T^2}.$$

Застосовуючи до виразу $\left\langle \mathcal{L}u, v^{[-1]}\right\rangle_{W_T^2}$ нерівність Шварца, отримуємо:

$$c\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^2)^*}\|v^{[-1]}\|_{W_T^2} \geqslant c\left\langle \mathcal{L}u, v^{[-1]}\right\rangle_{W_T^2} \geqslant$$
$$\geqslant 2\|u\|_{W_0^{-1}}\|v^{[-1]}\|_{W_T^2}.$$

Якщо в останній нерівності ліву і праву частини скоротити на $\|v^{[-1]}\|_{W_T^2}$, то отримаємо ліву частину нерівностей (6). □

Використовуючи формулу інтегрування частинами, праву частину рівності (5) для всіх $u \in \in L_0$ і $v \in L_T$ можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned}(u, v_{tt} - av_t + bv)_{L_2(Q)} + (a_0u, v)_{L_2(\Gamma_3)} -\\ - \sum_{i,j=1}^{n}\left(u_{\xi_i}, a_{ij}v_{\xi_j t} - b_{ij}v_{\xi_j}\right)_{L_2(Q)} - \\ - \sum_{i=1}^{n}\left(u_{\xi_i}, a_i v_t - b_i v\right)_{L_2(Q)}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Отриманий вираз задає звуження оператора $\mathcal{L}\colon H_0^0 \to (W_T^2)^*$. Такий звужений оператор буде визначений на всій множині W_0^0 та буде діяти у просторах $\mathcal{L}\colon W_0^0 \to (H_T^2)^*$.

Лема 2. *Нехай $\mathcal{L}\colon W_0^0 \to (H_T^2)^*$. Для довільної функції $u \in W_0^0$ має місце нерівність*

$$\|u\|_{H_0^0} \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^2)^*} \leqslant c_2\|u\|_{W_0^0}, \qquad (9)$$

де c_1, c_2 — додатні сталі, що не залежать від функції $u(t,\xi)$.

Доведення. Якщо до виразу (8) застосувати нерівність Коші-Буняковського в інтегральній формі і нерівність Фрідріхса, то отримаємо доведення правої частини (9).

Для доведення нерівності $\|u\|_{H_0^0} \leqslant \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^2)^*}$ розглянемо значення функціонала $\mathcal{L}u$ на елементі $v(t,\xi)$, де функція $v(t,\xi)$ —

розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$e^{Mt}(v - v_t + \beta v_{tt}) = u, \;\; v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0.$$

Відзначимо, що з леми 2 статті [1] випливає, що функція $v(t,\xi)$ належить простору W_T^2, а отже і простору H_T^2. Використовуючи формулу інтегрування частинами, можна показати, що має місце рівність:

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{H_T^2} = \left\langle \mathcal{L}(-u^{(-1)}), v_t \right\rangle_{H_T^1}.$$

Ураховуючи, що функції $u^{(-1)}$ і v зв'язані між собою співвідношенням

$$e^{Mt}(v - v_t + \beta v_{tt}) = \left(u^{(-1)}\right)_t,$$

для оцінки знизу виразу $\left\langle \mathcal{L}(-u^{(-1)}), v_t\right\rangle_{H_T^1}$ можна повторити міркування леми 5 статті [1]. Це дозволяє стверджувати, що для деякої досить великої додатної сталої c мають місце співвідношення:

$$c\left\langle \mathcal{L}(-u^{(-1)}), v_t \right\rangle_{H_T^1} \geqslant \|u^{(-1)}\|^2_{H_0^1} + \|v_t\|^2_{H_T^1} =$$
$$= \|u\|^2_{H_0^0} + \|v\|^2_{H_T^2} \geqslant 2\|u\|_{H_0^0}\|v\|_{H_T^2}.$$

Застосовуючи до виразу $\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{H_T^2}$ нерівність Шварца:

$$c\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^2)^*}\|v\|_{H_T^2} \geqslant c\,\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{H_T^2} \geqslant 2\|u\|_{H_0^0}\|v\|_{H_T^2}$$

і скорочуючи на $\|v\|_{H_T^2}$, завершуємо доведення леми: $\square$

Міркуючи аналогічним чином, доведені апріорні нерівності можна "зсунути" на оператор $u \to u^{(k)}$ для довільного цілого значення k. Таким чином, має місце теорема.

Теорема 1. *Для довільного числа $k\in\mathbb{Z}$ і довільної функції $u \in W_0^k$ мають місце нерівності*

$$\|u\|_{W_0^{k-1}} \leqslant c_1\|\mathcal{L}u\|_{(W_T^{2-k})^*} \leqslant c_2\|u\|_{H_0^k} \leqslant$$
$$\leqslant c_3\|\mathcal{L}u\|_{(H_T^{2-k})^*} \leqslant c_4\|u\|_{W_0^k},$$

де c_i — додатні сталі, що не залежать від функції $u(t,\xi)$.

Використовуючи міркування двоїстості, аналогічні апріорні нерівності можна довести і для спряженного оператора $\mathcal{L}^*$.

Теорема 2. *Для довільного числа $k\in\mathbb{Z}$ і довільної функції $v \in W_T^k$ мають місце нерівності*

$$\|v\|_{W_T^{k-1}} \leqslant c_1\|\mathcal{L}^*v\|_{(W_0^{2-k})^*} \leqslant c_2\|v\|_{H_T^k} \leqslant$$
$$\leqslant c_3\|\mathcal{L}^*v\|_{(H_0^{2-k})^*} \leqslant c_4\|v\|_{W_T^k},$$

де c_i — додатні сталі, що не залежать від функції $v(t,\xi)$.

З тверджень теорем 1, 2 випливає ін'єктивність операторів $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$.

Вивчимо питання існування та єдиності розв'язку псевдогіперболічного операторного рівняння $\mathcal{L}u = f$. У випадку, коли права частина f є узагальненою функцією певного скінченного порядку, деякі результати щодо існування та єдиності узагальненого розв'язку лінійного псевдогіперболічного рівняння отримано в та інших роботах [2-7].

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{L}$ — псевдогіперболічний оператор.*

1. *Для довільної правої частини $f \in (W_T^k)^*$, де $k \in \mathbb{Z}$, існує єдиний розв'язок $u \in W_0^{1-k}$ рівняння $\mathcal{L}u = f$.*
2. *Для довільної правої частини $f \in (H_T^k)^*$, де $k \in \mathbb{Z}$, існує єдиний розв'язок $u \in H_0^{2-k}$ рівняння $\mathcal{L}u = f$.*

Доведення. Доведемо лише першу частину теореми. Друга частина доводиться аналогічно.

Маємо $f \in (W_T^k)^* \subset (W_T^{k+1})^*$. Використовуючи нерівності теореми 2, маємо, що для всіх функцій $v \in W_T^{k+1} \subset H_T^{k+1} \subset W_T^k$ виконуються нерівності:

$$\left|\langle f, v\rangle_{W_T^{k+1}}\right| = \left|\langle f, v\rangle_{W_T^k}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|f\|_{(W_T^k)^*}\|v\|_{W_T^k} \leqslant c_1\|f\|_{(W_T^k)^*}\|\mathcal{L}^*v\|_{(W_0^{1-k})^*}.$$

Зважаючи на ін'єктивність оператора $\mathcal{L}^*$, вираз $\langle f, v\rangle_{W_T^{k+1}}$ можна розглядати як означення деякого лінійного неперервного функціонала $l(\omega)$ від $\omega = \mathcal{L}^*v$, визначеного на множині $\mathcal{L}^*(W_T^{k+1}) \subset (H_0^{1-k})^*$ простору $(W_0^{1-k})^*$.

За теоремою Хана-Банаха цей функціонал може бути неперервно розширений на весь простір $(W_0^{1-k})^*$. З рефлексивності простору W_0^{1-k} випливає існування такого елемента $u \in W_0^{1-k}$, що функціонал l допускає представлення у вигляді $l(\omega) = \langle \omega, u \rangle_{W_0^{1-k}}$. Підставляючи $\omega = \mathcal{L}^* v$ в рівність $l(\omega) = \langle \omega, u \rangle_{W_0^{1-k}}$, отримуємо

$$\langle f, v \rangle_{W_T^{k+1}} = \langle \mathcal{L}^* v, u \rangle_{W_0^{1-k}} = \\ = \langle \mathcal{L}u, v \rangle_{H_T^{k+1}} = \langle \mathcal{L}u, v \rangle_{W_T^{k+1}}.$$

Звідки, зважаючи на довільність функції $v \in \in W_T^{k+1}$, маємо $\mathcal{L}u = f$.

Єдиність розв'язку випливає з ін'єктивності оператора $\mathcal{L}$. □

Аналогічна теорема має місце і для спряженого оператора $\mathcal{L}^*$.

Теореми 1-3 можуть бути використані для розв'язання задачі оптимального керування та дослідження керованості псевдогіперболічної системи, зокрема, для встановлення траекторної та фінальної керованостей в різних класах керуючих впливів, доведення існування оптимального програмного керування системою через праву частину рівняння, вивчення диференціальних властивостей функціонала якості, побудови чисельних методів наближеного розв'язання задачі оптимального керування, побудови чисельних методів наближеного розв'язання псевдогіперболічного рівняння та дослідження збіжності запропонованих чисельних методів [2,3].

Список використаних джерел

1. *Номіровський Д. А.* Апріорні нерівності для лінійних диференціальних псевдогіперболічних моделей / Д. А. Номіровський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2013. — №1. — С. 215-220.

2. *Lyashko S. I.* Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters / S. I. Lyashko. — London : Kluwer Academic Publishers, 2002. — 466 p.

3. *Ляшко С. И.* Обобщенное управление линейными системами / С. И. Ляшко. — К. : Наукова думка, 1998. — 472 с.

4. *Палієнко Л.І.* Моделювання та узагальнена оптимізація у псевдогіперболічних системах : дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Л. І. Палієнко — К., 1999. — 122 с.

5. *Семенов В.В.* Моделі і методи узагальненої оптимізації лінійних систем з розподіленими параметрами : дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / В. В. Семенов. — К., 2002. — 153 с.

6. *Номировский Д. А.* О единственной разрешимости псевдогиперболических уравнений с сингулярными правыми частями / Д. А. Номировский // Математические заметки. — 2006. — Т. 80, В. 4. — С. 582-595.

7. *Аникушин А. В.* Обобщенное оптимальное управление системами, которые описываются линейными интегро-дифференциальными уравнениями с неотрицательно-определенными интегральными операторами / А. В. Аникушин // Проблемы управления и информатики. — 2014. — №1. — С. 33-41.

References

1. NOMIROVSKII, D. (2013) A priori inequalities for linear differential pseudohyperbolic equations. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics.* 1. p.215-220.

2. LYASHKO, S. (2002) *Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters*. London: Kluwer Academic Publishers.

3. LYASHKO, S. (1998) *Generalized Optimal Control of Linear Systems*. Kiev: Naukova dumka.

4. PALIENKO, L. (1999) *Simulation and generalized optimization of pseudohyperbolic systems* (Candidate's dissertation).

5. SEMENOV, V. (2002) *Models and methods of generalized optimization for linear systems with distributed parameters* (Candidate's dissertation).

6. NOMIROVSKII, D. (2006) Unique solvability of pseudohyperbolic equations with singular right-hand sides. *Mathematical Notes*. 80 (4). p.550-562.

7. ANIKUSHYN, A. (2014) Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 46 (6). p.58-67.

Надійшла до редакції 22.05.2014