УДК 51-77+519.854

Донченко В.С., д.ф.-м.н., проф.,
Тарасова О.В., аспірант

Матрична множинна регресія

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: voldon@univ.kiev.ua
e-mail: olga_ta@bigmir.net

V. S. Donchenko, Doctor of Sciences (Physics & Mathematics), Full Professor,
O. V. Tarasova, Postgraduate Student.

Matrix multiple regression

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: voldon@univ.kiev.ua
e-mail: olga_ta@bigmir.net

Запропоновано до розгляду клас матричних функцій набору матричних аргументів: матричну множинну регресію. У рамках розвитку концепції кортежних операторів розроблено математичний апарат сингулярного (SVD) розкладу та техніки псевдообернення (ПдО) за Муром-Пенроузом, що дозволяє поставити та конструктивно розв'язати задачу оцінки методом найменших квадратів (МНК) для множинної матричної регресії.

Ключові слова: матрична множинна регресія, псевдоінверсія, медіабізнес.

The class of matrix functions with set of matrix arguments (matrix multiple regression) is offered for consideration. The mathematical apparatus of singular (SVD) decomposition and of pseudoinverse technique (PDO) by Moore-Penrose is developed in this paper. The development of mathematical apparatus is made within the concept of cortege operators. The materials of this paper allow to formalize and to solve constructively the estimation problem by the method of least squares (OLS) for multiple matrix regression. OLS-estimation algorithm is proposed and realized for with unknown parameters vector of the matrix functions class in solving forecast. The example of forecasting with the use of the matrix multiple regression is shown for TV Viewing Ukrainian data. As shown in the example, matrix multiple regression can be used for mediabusiness parameters forecasting problems with acceptable business planning processes accuracy. Moreover the forecast indicators accuracy for commercial time slots higher than for noncommercial; that fact is especially important for commercial media planning and planning the TV-media business processes.

Key Words: multiple regression matrix, pseudoinversion, mediabusiness.

Статтю представив д.т.н., проф.. Гаращенко Ф.Г.

Задача групування інформації [1]: задача відновлення залежності і задача класифікації, кластеризації і розпізнавання образів, - це задача принципової важливості у прикладних дослідженнях. Важливим класом математичних структур ([2]) є евклідові простори числових векторів. Їх використання визначається багатством структурних зв'язків евклідових просторів в цілому та розвинутою технікою оперування у цих просторах, в тому числі сингулярний (SVD) розклад в псевдообернення (ПдО) у цих просторах [3-5]. Відмітимо значну роль М.Ф. Кириченко що розвиває ПдО-техніку [6]. Тим не менше, використання евклідових просторів числових векторів стає обмежуючим у розв'язанні прикладних задач, якими є, зокрема, задачі розпізнавання мови (speech recognition) та обробки зображень. У таких задачах природній представник досліджуваних об'єктів – це матриці: зокрема, спектрограми і матриці зображень. У роботі [7] запропоновано концепцію кортежних операторів, що дозволяє перенести SVD – і ПдО-техніки на евклідові простори матриць фіксованої розмірності; згадані техніки використано для побудови відстані відповідності у задачах кластеризації. У роботах [8-9] запропоновано основи векторного і матричного методів найменших квадратів з прикладами прикладного застосування для макро- та мікроекономічних показників.

Теоретичні основи матричної множинної регресії

1. **Теорема В1**. (Базова теорема про SVD-розклад [7].) Нехай A - лінійний оператор між

двома абстрактними евклідовими просторами $A: E_1 \to E_2$, $A^*: E_2 \to E_1$ - спряжений до нього, $r = rankA = \dim \Re(A)$. Тоді:

1) загальна кількість ненульових сингулярностей (пари власний вектор – власне число) двох операторів AA^*, A^*A дорівнює r;
2) набір власних чисел $\lambda_1^2 \geq \cdots \geq \lambda_r^2 > 0$ згаданих операторів є спільним;
3) власні вектори відповідних наборів сингулярностей $(u_i, \lambda_i^2), (v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1, r}$ пов'язані співвідношенням: $u_i = \dfrac{Av_i}{\lambda_i}, v_i = \dfrac{A^* u_i}{\lambda_i}, i = \overline{1, r}$;
4) оператор може бути представлений у вигляді $Ax = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i (v_i, x), x \in E_1$

2. *Визначення*. Псевдооберненим до оператора $A: E_1 \to E_2$ - позначатимемо A^+ - називається оператор $A^+: E_2 \to E_1$, що визначається співвідношенням $A^+ y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i (u_i, y), y \in E_2$.

3. **Теорема В3**. Значення $A^+ y$ є мінімальним за нормою рішенням оптимізаційної задачі мінімізації для $x \in E_1$ функціоналу $\| Ax - y \|^2$: $A^+ y = \underset{\substack{z \in A\mathrm{rg}\min \| Ax - y \|^2 \\ x \in E_1}}{\arg\min} \| z \|^2$.

4. **Теорема В4**. (Дослідження СЛАР.) У прийнятих вище позначеннях, необхідною і достатньою умовою розв'язуваності відносно системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) $Ax = y, y \in E_2$ є умова $\left(y, (I_{E_2} - AA^+) y \right) = 0$, а множина всіх розв'язків має такий вигляд:

$$A^+ y + (I_{E_1} - A^+ A) E_1 \tag{1}$$

У разі нерозв'язуваності СЛАР: $\left(y, (I_{E_2} - AA^+) y \right) > 0$, - множина, що визначається співвідношенням (1), описує множину $A\mathrm{rg}\min \| Ax - y \|^2$, тобто множина всіх $x \in E_1$ розв'язків оптимізаційної задачі найкращого квадратичного наближення правої частини СЛАР значеннями лівої частини. Усі елементи множини (1) у такому разі називаються псевдорозв'язками.

5. Множинну матричну регресію з матричними значеннями визначимо у детермінованій постановці: як матричну функцію Y матричного кортежа-рядка $\alpha_{1,K} = (X_1 \vdots \ldots \vdots X_K)$, $X_k \in R^{m \times n}$, $k = \overline{1, K}$ такого виду $Y(\alpha_{1,K}) = \beta_1 X_1 + \cdots \beta_K X_K, \beta_k \in R^1, k = \overline{0, K}$, що визначаються на основі спостережень $(\alpha_{1,K}^{(i)}, Y_i), i = \overline{1, N}$, де в свою чергу $Y_i = Y(\alpha_{1,K}^{(i)}), \alpha_{1,K}^{(i)} = (X_1^{(i)} \vdots \ldots \vdots X_K^{(i)}), i = \overline{1, N}$.

6. Відображення $\wp_{\alpha_{1,K}}: R^K \to R^{m \times n}$, що визначається таким співвідношенням: $Y(\alpha_{1,K}) = \beta_1 X_1 + \cdots \beta_K X_K \equiv \wp_{\alpha_{1,K}} \beta$, де кортежним оператором називається $\beta^T = (\beta_1, .., \beta_K), \beta \in R^K$, у відповідності з [7].

7. Будемо позначати так само:

– χ_Y - матричний стовпчиковий кортеж, отриманий зі значень спостережень $Y_i, i = \overline{1, N}$:

$$\chi_Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdots \\ Y_N \end{pmatrix} Y_i, i = \overline{1, N};$$

– $\chi_{N,1}^{(j)}, j = \overline{1, K}$ - стовпчиковий кортеж довжини N, отриманий із j-тих компонент рядкових кортежів $\chi_{1,K}^{(i)}, i = \overline{1, K}$;

– $\alpha_{N,K}$ - строковый кортеж довжини K, отриманий зі стовпчикових кортежів $\chi_{N,1}^{(j)}, j = \overline{1, K}$: $\alpha_{N,K} = (\chi_{N,1}^{(1)} \vdots \ldots \vdots \chi_{N,1}^{(K)})$;

– $\wp_{\alpha_{N,K}}: R^K \to R^{N, m \times n}$ - матричний кортежний оператор з евклідового простору R^K в евклідовому просторі стовпчикових кортежів довжини N з матриць розмірності $m \times n$ і покомпонетним скалярним добутком для $\chi_1 = \begin{pmatrix} Y_1^{(1)} \\ \cdots \\ Y_N^{(1)} \end{pmatrix} \in R^{N, m \times n}, \chi_2 = \begin{pmatrix} Y_1^{(2)} \\ \cdots \\ Y_N^{(2)} \end{pmatrix} \in R^{N, m \times n}$ у такому вигляді $(\chi_1, \chi_2)_{N, m \times n} = \sum_{i=1}^{N} (Y_i^{(1)}, Y_i^{(2)})_{tr}$.

8. Оцінка $\hat{\beta} \in R^K$ методу найменших квадратів невідомого параметру матричної множинної регресії з матричними значеннями природнім чином визначається як розв'язок оптимізаційної задачі мінімізації функціоналу

$\sum_{i=1}^{N} \| Y_i - \wp_{\alpha_{1,K}^{(i)}} \beta \|_{m\times n}^2$ методу найменших квадратів:

$$\hat{\beta} = \underset{\substack{\beta \in \mathrm{Argmin} \sum_{i=1}^{N} \|Y_i - \wp_{\alpha_{1,K}^{(i)}} \beta\|_{m\times n}^2 \\ \beta \in R^K}}{\arg\min} \| \beta \|^2 \qquad (2)$$

9. Стандартним чином МНК-оцінку $\hat{Y}(\alpha_{1,K}), \alpha_{1,K} = (X_1 \vdots \ldots \vdots X_K), X_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}$ матричної множинної регресії будемо визначати співвідношенням

$$\hat{Y}(\alpha_{1,K}) = \wp_{\alpha_{1,K}} \hat{\beta} = \sum_{k=1}^{K} \hat{\beta}_k X_k, X_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}.$$

10. Очевидно, в силу покомпонентного визначення скалярного добутку матричних кортежів, все одно стовпчикових чи рядкових кортежів, функціонал методу найменших квадратів

$$A(\beta) = \| Y - \wp \beta \| = \| \chi - \beta \chi \|, \chi = \begin{pmatrix} Y \\ \cdots \\ Y \end{pmatrix}$$

матричної регресії може бути записано за стовпчиковими матричними кортежами.

11. **Лема**. Функціонал методу найменших квадратів матричної регресії $A(\beta)$ може бути представлено у вигляді:

$$A(\beta) = \sum_{i=1}^{N} \| Y_i - \wp_{\alpha_{1,K}^{(i)}} \beta \|_{m\times n}^2 =$$

$$= \| \chi_Y - \sum_{j=1}^{K} \beta_j \chi_{N,1}^{(j)} \|_{N,m\times n}^2 = \| \chi_Y - \wp_{\alpha_{N,K}} \beta \|^2$$

.

12. **Теорема 1**. Розв'язком оптимізаційної задачі (2) є $\hat{\beta}$, що визначається співвідношенням:

$$\hat{\beta} = \wp_{\alpha_{N,K}}^{+} \chi_Y \qquad (3)$$

Доведення Теореми 1 витікає із загального варіанту SVD-розкладу, визначення псевдоінверсії та дослідження СЛАР для лінійних операторів між абстрактними евклідовими просторами (Теорема В3).

13. **Теорема 2.** Оператор $\wp_{\alpha_{1,K}}^{*} \wp_{\alpha_{1,K}} : R^K \to R^K$ задається стандартним чином матрицею F, що є матрицею Грама Г для набору векторів $\chi_{N,1}^{(j)}, j = \overline{1,K}$:

$$\Gamma = \left((\chi_{N,1}^{(i)}, \chi_{N,1}^{(j)})_{N,m\times n} \right)_{i,j=\overline{1,K}}.$$

Доведення Теореми 2 проводиться так само, як і у [7]: спочатку обчисленням спряженого оператора $\wp_{\alpha_{N,K}}^{*}$ до оператору $\wp_{\alpha_{1,K}}$, що визначається співвідношенням:

$$\wp_{\alpha_{N,K}}^{*} \chi = \begin{pmatrix} (\chi, \chi_{N,1}^{(1)})_{N,m\times n} \\ \cdots \\ (\chi, \chi_{N,1}^{(K)})_{N,m\times n} \end{pmatrix}, \chi \in R^{N,m\times n}.$$

Підстановка у (3) значення $\chi = \wp_{\alpha_{N,K}} \beta = \sum_{j=1}^{K} \beta_j \chi_{N,1}^{(j)}$ завершує доведення.

Позначимо $(v, \lambda), i = \overline{1,r}$ набір ненульових сингулярностей – пар «власні вектори – власні числа», - оператору, що задається матрицею F: $r = rankF, \lambda_1^2 \geq \cdots \geq \lambda_r^2 > 0$. Нагадаємо, мова йде про власні вектори і власні числа матриці.

14. **Теорема**. Задача SVD–розкладу кортежного оператора $\wp_{\alpha_{N,K}}$ зводиться до стандартної задачі на власні числа для матриць: при $(v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$ - ненульових сингулярностей матриці F набор «спряжених сингулярностей»: $(\chi_{U,i}, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$, при збереженні набору власних чисел, визначається співвідношенням $\chi_{U,i} = \dfrac{\wp_{\alpha_{N,K}} v_i}{\lambda_i}, i = \overline{1,r}$, а SVD–розклад кортежних операторів $\wp_{\alpha_{N,K}}, \wp_{\alpha_{N,K}}^{+}$ представляються співвідношеннями, відповідно:

$$\wp_{\alpha_{N,K}} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \chi_{U,i} v_k^T : R^K \to R^{m\times n},$$

$$\wp_{\alpha_{N,K}}^{+} \chi = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-1} v_k (\chi_{U,i}, \chi)_{N,m\times n} : R^{N,m\times n} \to R^K, \qquad (6)$$

де $\chi \in R^{N,m\times n}$

15. **Теорема 3.** Оцінка МНК вектору невідомих параметрів визначається співвідношенням

$$\hat{\beta} = \wp_{\alpha_{N,K}}^{+} \chi_Y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-1} v_k (\chi_{U,i}, \chi_Y)_{N,m\times n}.$$

Доведення Теореми 3 отримується із прямого застосування Теореми 1.

16. **Алгоритм обчислення $\hat{\beta}$:**

1. Побудова стовпчикових «компонентних» кортежів $\chi_{N,1}^{(j)}, j = \overline{1,K}$.
2. Побудова матриці Грама Г стовпчикових «компонентних» кортежів.

3. Обчислення ненульових сингулярностей $(v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$ матриці Грама Г стовпчикових «компонентних» кортежів.
4. Обчислення власних кортежів $\chi_{U,i} : \chi_{U,i} = \frac{\wp_{\alpha_{N,K}} v_i}{\lambda_i}, i = \overline{1,r}$ оператора $\wp_{\alpha_{N,K}} \wp^*_{\alpha_{N,K}}$.
5. Обчислення скалярних добутків $(\chi_{U,i}, \chi_Y)_{N,m\times n}, i = \overline{1,r}$.
6. Обчислення $\hat{\beta}$ за формулою $\hat{\beta} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-1} v_k (\chi_{U,i}, \chi_Y)_{N,m\times n}$.

17. Варіант обчислювальної формули розв'язку через задачу на власні значення для матриці Грама:

$$\hat{\beta} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-1} v_k (\lambda_k^{-1} \wp_\alpha v_k, \chi_Y)_{N,m\times n} = \\ = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^{-2} v_k (v_k, \wp_\alpha^* \chi_Y)$$

Далі залишається врахувати, що

$$\wp^*_{\alpha_{N,K}} \chi = \begin{pmatrix} (\chi, \chi_{N,1}^{(1)})_{N,m\times n} \\ \cdots \\ (\chi, \chi_{N,1}^{(K)})_{N,m\times n} \end{pmatrix}, \chi \in R^{N,m\times n}.$$

Приклад використання матричної множинної регресії для прогнозування показників теле перегляду

Частка телеканалу – показник, що характеризує частку телевізійної аудиторії, яка дивилася певний телеканал у певному часовому інтервалі відносно загальної телевізійної аудиторії у той самий часовий період [10]. Розв'язується задача прогнозування річної частки шести телеканалів для годинних інтервалів у межах усередненого тижня 2013 року з дискретизацією за днями тижня (понеділок, вівторок, …, неділя). Використано дані 2006-2013 років з погодинною дискретизацією за днями тижня для усередненого тижня; дані 2013 року використовуються для аналізу модельної точності прогнозування. Повна таблиця даних не наводиться з причини її великого розміру. Задача розв'язується з використанням вище описаного алгоритму обчислення оцінки вектора невідомих параметрів, що застосовується для річних часток каналів, дискретизованих до матриць розмірності 24x7 (години x дні тижня).

1. Побудова стовпчикових «компонентних» кортежів $\chi_{N,1}^{(j)}, j = \overline{1,K}$. Формуються на основі річних даних. Матричне рівняння для кожного з каналів:

$$Y(i) = \beta_1 \chi_{6,1}^{(2006)}(i) + \beta_2 \chi_{6,1}^{(2007)}(i) + \cdots + \\ + \beta_6 \chi_{6,1}^{(2011)}(i) \equiv Y^{2012}(i), \mathrm{i} = \overline{1,6} \quad (4)$$

Для знаходження $\hat{Y}^{2013}(i), \mathrm{i} = \overline{1,6}$ із (4) шукаємо оцінку вектора параметрів $\hat{\beta}$.

2. Побудова матриці Грама Г стовпчикових «компонентних» кортежів – у нашому прикладі матриця покомпонентних скалярних добутків розмірності 6x6.

3. Обчислення ненульових сингулярностей $(v_i, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$ матриці Грама Г стовпчикових «компонентних» кортежів.

$$v_1 = (0.5, -0.3, -0.6, -0.3, 0.1, 0.5), \lambda_1 = 71.7$$
$$v_2 = (0.5, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4, 0.4), \lambda_2 = 759.9$$
$$v_3 = (-0.6, -0.4, 0.0, 0.3, 0.5, 0.4), \lambda_3 = 141.5$$
$$v_4 = (0.0, -0.1, -0.1, 0.6, -0.7, 0.3), \lambda_4 = 31.6$$
$$v_5 = (-0.1, 0.5, -0.7, 0.4, 0.3, -0.3), \lambda_5 = 40.5$$
$$v_6 = (0.4, -0.6, 0.0, 0.4, 0.2, -0.5), \lambda_6 = 50.7$$

4. Обчислення $\chi_{U,i} : \chi_{U,i} = \frac{\wp_{\alpha_{N,K}} v_i}{\lambda_i}, i = \overline{1,r}$.

Отримуємо шість власних кортежів-матриць розмірності 144x7, які не наводимо з причини їх великого розміру.

5. Обчислення скалярних добутків $\mathrm{sk_i} = (\chi_{U,i}, \chi_Y)_{N,m\times n}, i = \overline{1,r}$.

$$\mathrm{sk}_1 = 26.39; \mathrm{sk}_2 = 282.31; \mathrm{sk}_3 = 53.30$$
$$\mathrm{sk}_4 = 9.99; \mathrm{sk}_5 = -6.52; \mathrm{sk}_6 = -29.59$$

6. Обчислення $\hat{\beta}$, що дозволяє обчислити прогноз показників частки шести каналів для 2013 року з погодинною дискретизацією для днів тижня $\hat{\beta} = (-0.11, 0.16, 0.01, 0.05, -0.05, 0.92)$.

Точність прогнозу розраховуємо за критерієм $APE = \left| \frac{y - \hat{y}}{y} \right|$. Середнє значення критерію для кожного з каналів наведено у Таблиці 2 для доби і для часового інтервалу 18:00-24:00 – найбільш комерційно значимого інтервалу. Найбільше значення критерію APE досягається у нічних часових інтервалах,що не є суттєвим для комерційного планування. Як бачимо, точність у комерційних часових інтервалах більш висока, що особливо важливо для комерційного планування бізнес-процесів.

Таблиця 1

Значення критерію APE для частки шести каналів 2013 року

Канал	сутки	18:00-24:00
Канал 1	15,5%	17,1%
Канал 2	19,3%	16,0%
Канал 3	10,1%	8,3%
Канал 4	18,3%	13,4%
Канал 5	12,6%	12,4%
Канал 6	13,0%	10,0%

Порівняємо середні погодинні частки прогнозні, планові і фактичні на прикладі окремих каналів. Канал 3: усереднені частки вихідного дня наведено на Рис 1, буднів – на Рис 2. У середньому значені критерію APE для планових показників Каналу 3 складає 11,5%, а для прогнозного з використанням матричної множинної регресії и апарату псевдоінверсії 6,9%. Така різниця є зрозумілою, якщо канал планує ріст. Проте якщо ріст не планується, то план є оптимістичним, що і підтверджує прогноз. На цьому прикладі показано, що використання прогнозних показників може допомогти перевірити реалістичність планових показників.

Рис. 1 Частка каналу 3 у вихідні дні з погодинною дискретизацією

Для каналу 5: на Рис. 3-4 наведено результати прогнозування. Середнє значення критерію APE для планових показників 10,7%, для прогнозних - 7,2%. Таким чином, прогнозні показники більш точні по відношенню до факту 2013 року. У той самий час, планові частки Каналу 5 більш реалістичні, ніж планові показники Каналу 3. Таким чином, матрична множинна регресія може бути використана для задач прогнозування показників медіабизнесу з прийнятною для планування бізнес-процесів точністю.

Рис. 2 Частка каналу 3 у будні дні з погодинною дискретизацією

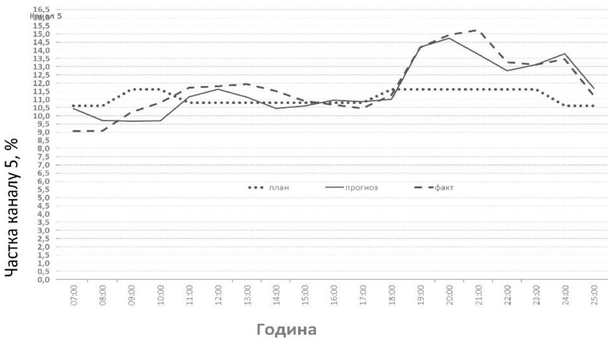

Рис. 3 Частка каналу 5, вихідні дні

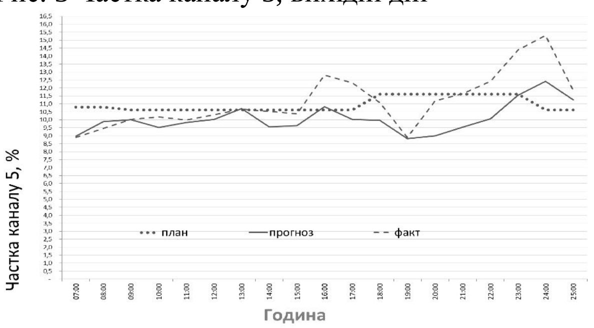

Рис. 4 Частка каналу 5, будні дні

Висновки

Запропоновано до розгляду клас матричних функцій набору матричних аргументів: матричну множинну регресію. У рамках розвитку концепції кортежних операторів розроблено математичний апарат сингулярного (SVD) розкладу і техніку псевдообернення (ПдО) за Муром-Пенроузом, що дозволяє поставити і конструктивно розв’язати задачу оцінки методом найменших квадратів (МНК) для множинної матричної регресії. Запропоновано і реалізовано алгоритм МНК-оцінювання для вектора невідомих параметрів згаданого класу матричних функцій у розв’язуванні задач прогнозу.

Список використаних джерел

1. *Donchenko V.* Recurrent procedure in solving the Grouping Information Problem in Applied Mathematics / V. Donchenko, Ju. Krak, Yu. Krivonos // ITHEA: International Journal Information Theories and Applications. – 2012. – Vol.1, No 1. – P. 62 -77.
2. *Донченко В.* Евклидовы пространства числовых векторов и матриц: конструктивные методы описания базовых структур и их использование / В. Донченко // International Journal “Information technologies & Knowledge”. – 2011. – Vol. 5, No 3. – P. 203-216.
3. *Moore E.H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix. / E.H. Moore // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1920. – No 26, – P. 394-395.
4. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices / R. Penrose // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society – 1955. – 51. – P. 406-413.
5. *Albert A.E.* Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse / A.E. Albert. – Academic Press, 1972, – 180 p.
6. *Kirichenko N.F.* Analytical Representation of Perturbation of Pseudoinverse Matrices / N.F. Kirichenko // Cybernetics and Systems Analysis. – 1997. – Vol.33, No 2. – P. 230-239.
7. *Donchenko V.* “Feature Vectors” in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes / V. Donchenko, T. Zinko, F. Skotarenko // Problems of Computer Intellectualization: international conference, Institute of Cybernetics NASU, ITHEA. – Kyiv, Ukraine, - Sofia, Bulgaria. – 2012. – P. 111-124.
8. *Donchenko V.* Vectors and matrixes least square method: foundation and application examples / V. Donchenko, I. Nazaraga, O. Tarasova // International Journal Information Theories and Applications. – 2013. – Vol.20, No 4. – P.311-322.
9. *Donchenko V.* Matrixes least squares method and examples of its application / V. Donchenko, I. Nazaraga, O. Tarasova // International Journal Information Technologies & Knowledge. – 2013. – Vol.7, No 4. – P.325–336.
10. *Назаров М.* Зарубежные рынки телевизионной рекламы: сравнительное исследование / М. Назаров – Москва: ООО «НИПКЦ Восход–А», 2011. – 364 с.

References

1. DONCHENKO, V., KRAK, JU., KRIVONOS, YU. (2012) Recurrent procedure in solving the Grouping Information Problem in Applied Mathematics *ITHEA: International Journal Information Theories and Applications.* 1(1). p. 62 -77.
2. DONCHENKO, V. (2011) Evklidovy prostranstva chislovyh vektorov I matrits: konstruktivniie metody opisaniia bazovyh struktur i ih *International Journal “Information technologies & Knowledge”*. 5(3). p. 203-216.
3. MOORE, E.H. (1920) On the reciprocal of the general algebraic matrix *Bulletin of the American Mathematical Society*. 26. p. 394-395.
4. PENROSE, R. (1955) A generalized inverse for matrices *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 51. p. 406-413.
5. ALBERT, A.E. (1972) *Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse.* Academic Press.
6. KIRICHENKO, N.F. (1997) Analytical Representation of Perturbation of Pseudoinverse Matrices *Cybernetics and Systems Analysis*. 33(2). p. 230-239.
7. DONCHENKO, V., ZINKO, T., SKOTARENKO, F. (2012) “Feature Vectors” in Grouping Information Problem in Applied Mathematics: Vectors and Matrixes. In *Problems of Computer Intellectualization Conference, ITHEA*, Kyiv, Ukraine, - Sofia, Bulgaria: Institute of Cybernetics NASU. pp. 111-124.
8. DONCHENKO, V., NAZARAGA, I., TARASOVA, O. (2013) Vectors and matrixes least square method: foundation and application examples *International Journal Information Theories and Applications*. 20(4) p. 311-322.
9. DONCHENKO, V., NAZARAGA, I., TARASOVA, O. (2013) Matrixes least squares method and examples of its application *International Journal Information Technologies & Knowledge.* 7(4) p. 325–336.
10. NAZAROV, M. (2011) *Zarubezhniie rynki televizionnoj reklamy: sravnitelnoe isledovani*. Moskva: OOO NIKPTs Voshod-A.

Надійшла до редколегії 24.03.2015