Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки **2015, 2** *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*

УДК 519.8

Мащенко С.О., д. ф.-м. н., проф.,
Моренець В.І., аспірант

С-ядро кооперативної гри з нечіткою множиною дозволених коаліцій

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: msomail@yandex.ua
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

S.O. Mashchenko, D.Sci (Phys-Math.), Prof.,
Morenets V.I., Grad. Stud.

C- core of cooperative game with the fuzzy set of admissible coalitions

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,

e-mail: msomail@yandex.ua
e-mail: v.i.morenets@gmail.com

Розглядається кооперативна гра в характеристичній формі з нечіткою множиною допустимих коаліцій. Показано, що С-ядро цієї гри буде нечіткою множиною типу 2 (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення), побудована її функція належності. Запропонована трьох-критеріальна задача пошуку раціонального розв'язку. Розглянутий підхід до отримання наближеного розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: кооперативна гра, функція належності, нечітка множина типу 2, ядро гри.

The problem of the choice of an equitable distribution of profits among the players, if they agree to cooperation, but not clearly understand what the coalition may be admissible. This is due to the fact that in many real-life situations, not every group of players has the ability to cooperate and therefore all the coalition can not be formed. The well-known concept of C-core cooperative games generalized to the case of fuzzy sets of admissible coalition players. In this case, it can be described as the intersection of fuzzy set of crisp sets of distributions which satisfy to principle of separation. It is the fuzzy set of type 2 (a fuzzy set, membership function which takes a fuzzy values). This membership function is build. A three-criteria optimization problem of finding a rational solution is proposed. The approach to obtain an approximate solution of this problem is considered. The proposed approach extends the scope of the theory of fuzzy sets in case of cooperative games with fuzzy set of permissible coalitions and may provide a new approach to solving other problems of game theory.

Keywords: cooperative game, membership function, fuzzy set of type 2, core of game.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. Кооперативна теорія ігор розв'язує задачу «справедливого» розподілу прибутку між гравцями у випадку їхньої співпраці. Тим не менш, у багатьох реальних життєвих ситуаціях, не кожна група гравців має можливість співпрацювати і тому всі коаліції не можуть утворюватися. В цьому випадку виникає кооперативна гра з обмеженою кооперацією. Причини обмежень на створення можливих коаліцій можуть бути різними, наприклад обмеження, які викликані правами; обмеження на максимальну кількість гравців, яким дозволена співпраця; обмеження, які пов'язані з відсутністю зв'язку між гравцями, або обмеження, які викликані потребою у згоді начальників гравців на формуванні коаліції з іншими.

Класична кооперативна гра у характеристичній формі $\langle N,v\rangle$ задається набором гравців $N=\{1,...,n\}$, $n\geq 2$, і характеристичною функцією $v:2^N\to R^1$, яка для кожної коаліції гравців дорівнює її гарантованому виграшу, причому $v(\varnothing)=0$, $v(S\bigcup T)\geq v(S)+v(T)$ для $\forall S,T\subset N$, $S\bigcap T=\varnothing$.

У більш загальному випадку, коли деякі коаліції можуть бути забороненими, кооперативна гра може бути описана трійкою $\langle N,v,\Omega\rangle$, де $\Omega\subseteq 2^N\setminus N$ – набір можливих коаліцій (в яких гравці можуть співпрацювати разом), і називається грою з обмеженою кооперацією. Знаходження справедливого розподілу виграшу всієї спільноти гравців для гри з обмеженою кооперацією представляє собою більш загальну проблему, ніж для звичайної кооперативної гри. Через це будь-який розв'язок гри з обмеженою кооперацією є узагальненням деякого розв'язку класичної кооперативної гри. Узагальнення вектора Шеплі для ігор з обмеженою кооперацією розглядалися R. Myerson [1], пізніше їх аналізували G. Owen [2] і P. Borm, G. Owen і S.Tijs [3]. E.Algaba, J.Bilbao, P.Borm і J.Lopez [4, 5] вважають, що часткова модель співпраці на основі так званих союзних стійких систем є узагальненням ситуації спілкування.

В деяких випадках буває складно чітко вказати заборонені коаліції. В цій роботі розглядається С-ядро кооперативної гри з нечіткою множиною дозволених коаліцій.

С-ядро кооперативної гри. Спочатку розглянемо класичну кооперативну гру у характеристичній формі $\langle N,v\rangle$. Одним із методів розподілу виграшу $v(N)$ всієї спільноти гравців є С-ядро, яке складається з поділів (векторів $x=(x_1,...,x_n)$ таких, що $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ та $x_i \ge v(\{i\})$ для $\forall i\in N$), які задовольняють умовам $\sum_{i\in S} x_i \ge v(S)$ для $\forall S\subset N$. Як правило С-ядро містить більше одного елемента, тому виникає проблема вибору. Ця проблема може розв'язуватися різними методами, але всі вони зводяться до знаходження у певному сенсі «центра» С-ядра. Для цього розв'язується задача математичного програмування:

$$g(x)\to \min ,$$
$$\sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ S\in 2^N \setminus N ,$$
$$\sum_{i\in N} x_i = v(N) ,$$

де $g(x)$ – деяка функція, за допомогою якої вибирають конкретний поділ з С-ядра. Вигляд цієї функції залежить від предметної області та домовленості між гравцями.

С-ядро кооперативної гри з нечіткою множиною дозволених коаліцій. Припустимо, що гравці не можуть чітко сказати, які коаліції з множини $\Omega = 2^N \setminus N$ усіх можливих, можуть бути дозволеними, а їм відома лише функція належності $\mu(S)$, $S\in\Omega$, нечіткої множини $\tilde{\Omega}\subseteq\Omega$ дозволених коаліцій. Тоді виникає кооперативна гра з нечіткою множиною дозволених коаліцій, яка задається трійкою $\langle N,v,\tilde{\Omega}\rangle$. Якщо узагальнити на цей випадок метод розподілу виграшу всієї спільноти гравців згідно до концепції С-ядра, то ми одержимо задачу, яку можна сформулювати у так:

$$g(x)\to \min , \tag{1}$$
$$\sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ S\in\tilde{\Omega}, \tag{2}$$
$$\sum_{i\in N} x_i = v(N), \tag{3}$$

де запис (2) слід розуміти таким чином. Нехай $F_S = \{x=(x_1,...,x_n) \mid \sum_{i\in N} x_i = v(N),\ \sum_{i\in S} x_i \ge v(S)\}$ – множина векторів x, які задовольняють умові (2) для коаліції $S\in\Omega$ та умові (3). Тоді запис вигляду (2) означає, що множина допустимих розв'язків системи (2), (3) повинна задаватися множиною $\tilde{F} = \bigcap_{S\in\tilde{\Omega}} F_S$, де згідно [7] $\bigcap_{S\in\tilde{\Omega}} F_S$ – перетин нечіткої множини $\tilde{M}$ чітких множин F_S, який представляє собою нечітку множину типу 2.

Перетин нечіткої множини чітких множин. Визначимо це поняття відповідно до підходу, який був запропонований в [7].

В просторі R^n визначимо функцію належності (характеристичну функцію) чіткої множини F_S, $S\in\Omega$, яку позначимо

$$\phi_S(x) = \begin{cases} 1, & \sum_{i\in S} x_i \ge v(S), \\ 0, & \sum_{i\in S} x_i < v(S). \end{cases}$$

Для довільного $x\in R^n$ введемо відношення домінування на множині коаліцій Ω.

Говоритимемо, що коаліція $S\in\Omega$ домінує коаліцію $T\in\Omega$ для $x\in R^n$ і позначати це $S\overset{x}{\succ}T$, якщо справедливі такі нерівності: $\phi_S(x)\le\phi_T(x)$, $\mu(S)\ge\mu(T)$ і хоча б одна з них строга.

Позначимо

$$\tilde{\mu}(x,S) = \begin{cases} \mu(S), & S\in PO(x), \\ 0, & S\notin PO(x), \end{cases}$$

де $PO(x) = \{S\in\Omega \mid T\overset{x}{\not\succ}S,\ \forall T\in\Omega\}$.

Перетином нечіткої множини $\tilde{\Omega}$ чітких множин F_S, $S\in\Omega$, називається [7] $\tilde{F} = \bigcap_{S\in\tilde{\Omega}} F_S$ - нечітка множина типу 2, яка задається трійками $(x,\psi(x,y))$, де

$\psi : R^n \times Y \to \{0,1\}$ – функція належності нечіткого відображення $\tilde{\Phi}$, що виконує роль нечіткої функції належності, яка визначена таким чином:

$$\psi(x,y) = \max_{S\in\Omega}\{\mu(x,S) \mid \varphi_S(x) = y\},$$

якщо $\exists S \in \Omega \;\; \varphi_S(x) = y$;

$$\psi(x,y) = 0,$$

якщо $\forall S \in \Omega \;\; \varphi_S(x) \neq y$;

x – елемент простору R^n;

y – елемент універсальної множини $Y = \{0,1\}$ значень функції належності $\psi(x,y)$ нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2.

Значення $\psi(x^0,1)$ можна розуміти як ступінь належності вектора $x^0 \in R^n$ множині $\tilde{F}$. Відповідно значення $\psi(x^0,0)$ має сенс ступеню відсутності належності $x^0 \in R^n$ множині $\tilde{F}$.

Оскільки функція приналежності $\phi(x,y)$ однозначно визначає нечітке відображення $\tilde{\Phi}$, яке, у свою чергу, однозначно визначає нечітку множину $\tilde{F}$ типу 2, то надалі називатимемо $\phi(x,y)$ функцією належності нечіткої множини $\tilde{F}$ типу 2, а її значення – достовірністю ступеня належності $y \in Y = [0,1]$ елемента простору R^n нечіткій множині $\tilde{F}$ типу 2.

Позначимо $S^* = Arg\max_{T\in\Omega}\mu(T)$ – множину коаліцій з максимальним ступенем належності до нечіткої множини допустимих коаліцій.

Спростити побудову функції належності $\psi(x,y)$ дозволяє наступна теорема [7].

Теорема. Нехай F_S, $S \in \Omega$, – чіткі множини, які задані в просторі R^n відповідними характеристичними функціями $\phi_S(x)$, $x \in R^n$, $S \in \Omega$; $\mu(S)$, $S \in \Omega$, – функція належності нечіткої множини коаліцій $\tilde{\Omega}$. Для того, щоб нечітка множина $\tilde{F}$ типу 2, яке задана функцією належності $\psi(x,y)$, $x \in R^n$, $y \in \{0,1\}$, була перетином нечіткої множини $\tilde{\Omega}$ чітких множин F_S, $S \in \Omega$, тобто $\tilde{F} = \tilde{\bigcap}_{S\in\tilde{\Omega}} F_S$ необхідно и достатньо, що б для $x \in R^n$:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{\phi_S(x)=0}\mu(S), & \exists S \in \Omega \;\; \phi_S(x) = 0, \\ 0, & \forall S \in \Omega \;\; \phi_S(x) = 1, \end{cases}$$

$$\psi(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega}\mu(S), & \forall S \in S^* \;\; \phi_S(x) = 1, \\ 0, & \exists S \in S^* \;\; \phi_S(x) = 0. \end{cases}$$

З викладених вище міркувань стає зрозуміло, що множина $\tilde{F}$ є нечіткою множиною типу 2, яка задається функцією належності $\psi(x,y)$, $x \in R^n$, $y \in \{0,1\}$, де

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{\phi_S(x)=0}\mu(S), & \exists S \in \Omega \;\; \sum\limits_{i\in S} x_i < v(S), \\ 0, & \forall S \in \Omega \;\; \sum\limits_{i\in S} x_i \geq v(S), \end{cases} \tag{4}$$

- достовірність недопустимості $x \in R^n$;

$$\psi(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega}\mu(S), & \forall S \in S^* \;\; \sum\limits_{i\in S} x_i \geq v(S), \\ 0, & \exists S \in S^* \;\; \sum\limits_{i\in S} x_i < v(S), \end{cases} \tag{5}$$

- достовірність допустимості вектора $x \in R^n$.

Пошук раціональних поділів. В реальній ігровій ситуації гравці прагнутимуть мінімізувати окрім цільової функції $g(x)$ ще й достовірність $\psi(x,0)$ недопустимості поділу, а також максимізувати достовірність $\psi(x,1)$ його допустимості. Таким чином, перед гравцями постає наступна трьохкритеріальна задача:

$$\begin{aligned} & g(x) \to \min, \\ & \psi(x,0) \to \min, \\ & \psi(x,1) \to \max,\; x \in R^n. \end{aligned} \tag{6}$$

Позначимо SO – множину оптимальних за Слейтером (слабо оптимальних за Парето) розв'язків цієї задачі. Нагадаємо, що розв'язок x^* називається оптимальним за Слейтером для задачі вигляду (6) якщо $\nexists x \in X$, для якого мають місце нерівності: $g(x^*) > g(x)$, $\psi(x^*,1) < \psi(x,1)$, $\psi(x^*,0) > \psi(x,0)$.

Загальним раціональним розв'язком задачі (1) – (3) знаходження розподілу виграшу всієї спільноти гравців в кооперативній грі $\langle N, v, \tilde{\Omega} \rangle$ з нечіткою множиною дозволених коаліцій називається нечітка множина $\tilde{X}$ типу 2 з функцією належності

$$\psi_{\tilde{X}}(x,y) = \begin{cases} \psi(x,y), & x \in SO, \\ 0, & x \notin SO, \end{cases}$$

де $y \in Y = \{0,1\}$.

У разі, коли гравців цікавить конкретний раціональний розв'язок задачі (1) – (3), то його можна вибрати з множини SO за допомогою того або іншого методу багатокритеріальної оптимізації, вирішивши задачу (6).

Легко перевірити, що оптимальний розв'язок $x*$ «чіткого аналога» (1) – (3) належатиме множині SO із значенням достовірності його недопустимості $\psi(x^*,0)=0$. Назвемо цей розв'язок тривіальним розв'язком задачі (1) – (3). Нас, в першу чергу, цікавитимуть нетривіальні розв'язки задачі (1) – (3), які мають строго додатну достовірність недопустимості.

Оптимальний за Слейтером нетривіальний розв'язок $x*$ задачі (6) будемо називати раціональним розв'язком задачі (1) – (3) з достовірностями $\psi(x^*,1)$ і $\psi(x^*,0)$ відповідно його допустимості і недопустимості.

Позначимо $\Omega^{\xi}=\{S\in\Omega\mid \mu(S)\le\xi\}$ множину коаліцій, які мають ступені належності нечіткій множині дозволених коаліцій $\tilde{\Omega}$ не більше за $\xi\in(0,1)$. Спробуємо спростити задачу (6).

Твердження 1. Нехай $\xi\in(0,1)$ – задане значення параметра, тоді якщо задача:

$$g(x)\to\min_{x\in R^n}, \tag{7}$$

$$0<\psi(x,0)\le\xi,\ \sum_{i\in N}x_i=v(N), \tag{8}$$

$$\sum_{i\in S}x_i\ge v(S),\ \ S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}. \tag{9}$$

має оптимальний розв'язок, то він буде раціональним розв'язком задачі (1) – (3) з достовірністю допустимості $\mu^{\max}=\max_{S\in\Omega}\mu(S)$ і з достовірністю недопустимості не більше за ξ.

Доведення. Припустимо супротивне, що $x^*\notin SO$. Тоді $\exists\hat{x}$, який задовольняє умовам (8) і (9), для якого мають місце нерівності: $g(\hat{x})<g(x^*)$, $\psi(\hat{x},1)>\psi(x^*,1)$, $\psi(\hat{x},0)<\psi(x^*,0)$.

Оскільки x^* – допустимий розв'язок задачі (7) – (9), то з (5) випливає, що $\psi(x^*,1)=\max_{S\in\Omega}\mu(S)=\mu^{\max}$. Тоді з записаних вище нерівностей виходить, що $\psi(\hat{x},0)<\psi(x^*,0)\le\xi$ і $\psi(\hat{x},1)>\psi(x^*,1)\ge\mu^{\max}$. Оскільки, згідно (5) $\psi(\hat{x},1)\le\mu^{\max}$, то отримали суперечність.

Твердження доведене.

Спробуємо далі спростити задачу (6).

Твердження 2. Нехай $\xi\in(0,1)$ – задане значення параметра, тоді якщо задача:

$$\min_{T\in\Omega^{\xi}}\min_{x\in R^n}g(x); \tag{10}$$

$$\sum_{i\in T}x_i<v(T);\ \sum_{i\in N}x_i=v(N); \tag{11}$$

$$\sum_{i\in S}x_i\ge v(S),\ \ S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}. \tag{12}$$

має оптимальний розв'язок, то він буде раціональним розв'язком задачі (1) – (3) з достовірністю допустимості $\mu^{\max}=\max_{S\in\Omega}\mu(S)$ і з достовірністю недопустимості не більше за ξ.

Доведення. Нехай $\xi\in(0,1)$. Позначимо Q – множину допустимих розв'язків задачі (7) – (9), а P^T – множину допустимих розв'язків – (10) – (12). Спочатку покажемо, що

$$\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T=Q. \tag{13}$$

Покажемо включення $\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T\subseteq Q$. Якщо $\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T=\varnothing$, то воно є очевидним. Нехай $x^*\in\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T\ne\varnothing$. Припустимо супротивне, що $x^*\notin Q$. Тоді можливі два випадки. В першому випадку не виконується умова (8), тобто $\psi(x^*,0)>\xi$. Звідси з формули (4) отримаємо $\psi(x^*,0)=\max_{S\in\Omega}\{\mu(S)\mid \sum_{i\in S}x_i<v(S)\}>\xi$. Тоді $\exists S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}$, для якого $\sum_{i\in S}x_i^*<v(S)$, що суперечить умові (12). В другому випадку не виконується умова (9), тобто $\exists S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}$, для якого $\sum_{i\in S}x_i^*<v(S)$. Тоді не виконується відповідна умова (12) і тому $x^*\notin P^T\ \forall T\in\Omega^{\xi}$ і як наслідок $x^*\notin\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T$. Отримали суперечність. Таким чином, $x^*\in Q$ і тому $\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T\subseteq Q$.

Покажемо включення $Q\subseteq\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T$. Якщо $Q=\varnothing$, то воно очевидне. Нехай $x^*\in Q\ne\varnothing$. Припустимо супротивне, що $x^*\notin\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}}P^T$. Тоді $x^*\notin P^T\ \forall T\in\Omega^{\xi}$. Оскільки умови (9) і (12) співпадають, то $\sum_{i\in S}x_i^*\ge v(S)\ \forall S\in\Omega^{\xi}$. Оскільки $\Omega^{\xi}=\{S\in\Omega\mid \mu(S)\le\xi\}$, то з формул (4) випливає або $\psi(x^*,0)=\max_{S\in\Omega}\{\mu(S)\mid \sum_{i\in S}x_i^*<v(S)\}>\xi$, або $\psi(x^*,0)=0$. В обох випадках одержуємо суперечність з умовою (8). Таким чином,

$x^* \notin \bigcup_{T\in\Omega^\xi} P^T$, звідси випливає $Q \subseteq \bigcup_{T\in\Omega^\xi} P^T$ і справедлива рівність (13).

Завершимо доведення твердження. З рівності (13) очевидно випливає еквівалентність задач (7) – (9) і (10) – (12), чого достатньо на підставі твердження 1 для доведення.

Твердження доведене.

Таким чином, згідно до запропонованого підходу для знаходження раціонального розв'язку задачі (1) – (3) достатньо зробити наступне:

- вибрати число $\xi \in (0,1)$, яке згідно твердженню 2 характеризує максимальну для гравців достовірність недопустимості розв'язку;
- побудувати множину коаліцій $\Omega^\xi = \{S \in \Omega \mid \mu(S) \le \xi\}$, які мають ступінь належності до допустимих не більше заданого числа $\xi \in (0,1)$;
- для кожної коаліції $T \in \Omega^\xi$ розв'язати задачу:

$$\min_{x\in R^n} g(x);$$
$$\sum_{i\in T} x_i < v(T);\ \sum_{i\in N} x_i = v(N);$$
$$\sum_{i\in S} x_i \ge v(S),\ \ S \in \Omega \setminus \Omega^\xi.$$

якщо вона має розв'язок, то позначимо його $x^{(T)}$, в протилежному випадку вибираємо наступну коаліцію $T \in \Omega^\xi$;

- з отриманих розв'язків $x^{(T)}$, $T \in \Omega^\xi$, вибираємо рекордне $\hat{x}$ за значенням цільової функції, тобто $g(\hat{x}) = \arg\min_{T\in\Omega^\xi} g(x^{(T)})$.

Висновок. На закінчення слід зазначити, що запропонований підхід розширює область застосування теорії нечітких множин на випадок кооперативних ігор з нечіткою множиною допустимих коаліцій і може дати новий підхід до розв'язання інших постановок ігрових задач з нечіткою структурою.

Список використаних джерел

1. *Myerson R.B.* Graphs and cooperation in games / R.B. Myerson // Math. Oper. Res. – 1977.– 2. – pp. 225–229.
2. *Owen G.* Values of graph-restricted games / G. Owen // SIAM J. Algebraic and Discrete Methods. – 1986. – 7. – pp. 210–220.
3. *Borm P.* On the position value for communication situations / Borm P., Owen G., Tijs S. // SIAM J. Disc. Math. – 1992. –5. – pp. 305–320.
4. *Algaba E.* The position value for union stable systems / Algaba E., Bilbao J.M., Borm, P., Lopez J.J. // Math. Meth. Oper. Res. – 2000. –52. –pp. 221–236.
5. *Algaba E.* The Myerson value for union stable structures / Algaba E., Bilbao J.M., Borm, P., Lopez J.J. // Math. Meth. Oper. Res. 54. – 2001. pp. 359–371.
6. *Мащенко С.О.* Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений / Мащенко С.О. // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 62 – 68.
7. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С.А. Орловский. – М. : Наука, 1981.

References

1. MYERSON, R.B. (1977) Graphs and cooperation in games. Math. Oper. Res. 2. pp. 225–229.
2. OWEN, G. (1986) Values of graph-restricted games. SIAM J. Algebraic and Discrete Methods 7. pp. 210–220.
3. BORM, P.; OWEN, G.; TIJS, S. (1992) On the position value for communication situations. SIAM J. Disc. Math. 5. pp. 305–320.
4. ALGABA, E.; BILBAO, J.M.; BORM, P.; LOPEZ, J.J. (2000) The position value for union stable systems. Math. Meth. Oper. Res. 52. pp. 221–236.
5. ALGABA, E.; BILBAO, J.M.; BORM, P.; LOPEZ, J.J. (2001) The Myerson value for union stable structures. Math. Meth. Oper. Res. 54. pp. 359–371.
6. MASHCHENKO, S. (2013) The problem of the mathematical programming with the fuzzy set of indexes of constraints. *Cybernetics and systems analysis*. 49(1). pp. 62 – 68.
7. ORLOVSKY, S. (1981) *Problems of decision making at fuzzy initial information*. Moskva: Nauka.

Надійшла до редколегії 11.06.2015.