

УДК 535.016:537.8

Рапопорт Ю. Г.<sup>1</sup>, к. ф.-м. н., с. н. с.,  
Бордман А. Д.<sup>2</sup>, д. ф.-м. н., проф.

Yu.G. Rapoport<sup>1</sup>, PhD., Sen. Sci. Res.,  
A. D. Boardman<sup>2</sup>, Dr. Sci., Prof.

**Моделювання «від характеристик метачастинки до характеристик нелінійних хвиль в шаруватих активних бі-анізотропних метаматеріалах з об'ємними та поверхневими нелінійностями»**

**Modeling “from the characteristics of a metaparticle to the characteristics of nonlinear waves in layered active bi-anisotropic metamaterials with the volume and surface nonlinearities”**

<sup>1</sup>Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,  
e-mail: yuriy.rapoport@gmail.com

<sup>1</sup>Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv,  
Volodymyrska st., 64/13,  
e-mail: yuriy.rapoport@gmail.com

<sup>2</sup>Центр з досліджень матеріалів та фізики ім. Джоуля, університет Селфорду, M5 4WT UK (Велика Британія)  
e-mail: A.D.Boardman@salford.ac.uk

<sup>2</sup>Joule Material & Physics Research Centre,  
University of Salford, M5 4WT UK  
e-mail: A.D.Boardman@salford.ac.uk

*Розвинутий «наскрізний» метод моделювання «від характеристик окремої метачастинки до характеристик нелінійних хвиль в бі-анізотропних шаруватих активних метаматеріалах з об'ємними та поверхневими нелінійностями» та досліджені нові хвильові ефекти в нелінійних активних гіротропних шаруватих структурах .*

*Ключові слова: нелінійні, хвилі, бі-анізотропні метаматеріали, шаруваті, активні середовища.*

*"Pass-through" method is developed for modeling "from characteristics of separate metaparticle to characteristics of nonlinear waves in layered bi-anisotropic active metamaterials with volume and surface nonlinearities". Method includes (1) modeling and characterization of separate, in general case, bi-anisotropic/chiral metaparticle (BIAMP) with nonlinear "load", based on consideration of corresponding nonlinear equivalent electric circuit; 2) nonlinear characterization of a media which includes such metaparticles; (3) developed method, which in this case can be considered as a method for the derivation of nonlinear evolution equations in layered structures (NEELS)[1], which allows modeling nonlinear wave propagation and corresponding wave effects. Numerical estimations demonstrate a great effectiveness of amplification of electromagnetic waves in active metamaterials with two types of "active loads", namely (a) split ring resonators (SRR) with active elements characterizing by negative differential conductivity and (b) BIAMP with nonlinear capacitive elements for a parametric three-wave amplification of two counter propagating electromagnetic pulses. New wave effects in gyrotropic active nonlinear structures with parametric coupling are investigated.*

*Key Words: nonlinear, waves, bi-anisotropic metamaterials, layered, active media.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Єжов С.М.

### Вступ

Розвинутий «наскрізний» метод моделювання нелінійних хвиль в активних шаруватих «метаматеріальних» структурах включає (1) моделювання і характеристику окремої (в загальному випадку бі-анізотропної « $\Omega$  - частинки»)/метачастинки (БІАМЧ) [1, 2] з «нелінійним навантаженням» на основі розгляду відповідної (нелінійної) еквівалентної

електричної схеми; (2) характеристику нелінійного середовища, що включає такі метачастинки; (3) розвинутий метод, який є різновидом методу виведення нелінійних еволюційних рівнянь в шаруватих середовищах (НЕРШС) [1] для бі-анізотропного метаматеріалу і моделювання нелінійних хвиль, як таких, та відповідних хвильових ефектів. Можливе «надефективне» підсилення електромагнітних хвиль (ЕМХ) в активних середовищах з

кільцевими резонаторами з розривом (КРР), а також нелінійними активними БіАМЧ [1, 2]. Досліджені нові хвильові ефекти в нелінійних активних гіротропних шаруватих структурах.

### Метод локальних струмів для гомогенізації метаматеріалу з бі-анізотропними метачастинками за межами «методу збурень»

Запропонований, наскільки нам відомо, вперше, підхід, для гомогенізації біанізотропного середовища, є принципово відмінним від методу збурень. Розглянемо бі-анізотропний метаматеріал, де всі БіАМЧ лежать в паралельних площинах і всі є паралельними/однаково орієнтованими (див. рис.1. а, б) [2]. Лінійна  $M_n^{lin}$  та нелінійна  $M_n^{nl}$

складові магнітної поляризації, напрямлені паралельно нормалі до площини магнітної петлі (для всіх метачастинок в середовищі, що розглядається, цей напрямок є одним і тим же, який прийемо за  $z$  та позначеної індексом « $n$ »), рис. 1. б. Лінійна  $P_l^{lin}$  та нелінійна  $P_l^{nl}$  складові електричної поляризації напрямлені вздовж «вусиків» (всіх) БіАМЧ (прийемо цей напрямок за  $x$  та позначимо індексом « $l$ »). (див. рис. 1. а). Компоненти лінійної поляризуємості визначаються за допомогою представлення електричної та магнітної поляризації  $\Omega$ -частинки (див. еквівалентну схему на рис. 1. б) через відповідні («локальні») струми, які визначаються «локальними полями» [1-3]:

$$\begin{aligned} \chi_{ee0}^{lin} &= (Nl^2 / i\omega)[(Z_{0cg}^{-1} + Z_{LN}^{-1}) / (Z_{an} Z_{00N}^{-1})] = (\chi_{ee0} f / A)(F_{me0} + F_{ee1}), \chi_{ee0} = \varphi v_{res}^2 (L_{eff} / L)^{-1} \\ \chi_{mmm0}^{lin} &= -i(NS^2 \omega / c^2)[(Z_{0cg}^{-1} + Z_{aN}^{-1}) / (Z_{Ln} Z_{00N}^{-1})] = (\chi_{mmm0} \bar{\omega}^2 / A)(F_{me0} + F_{mm1}), \chi_{mmm0} = \varphi (L_{eff} / L)^{-1} \\ \chi_{ment}^{lin} &= -\chi_{emtn}^{lin} = (NlS / c) / (Z_{aN} Z_{LN} Z_{00N}^{-1}) = -(i\chi_{me0} f \bar{\omega} / A) F_{me0}, \chi_{me0} = \sqrt{\chi_{ee0} \chi_{mmm0}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$F_{me0} = 1 + i\psi \bar{\omega}, F_{mm1} = -i\psi \bar{\omega} (C_{N0} / C_{eff}), F_{ee1} = -(1-f)\bar{\omega}^2 - i\psi \bar{\omega}^3 (C_{Cg} / C_{eff}), \varphi = NS^2 / c^2 L_{eff},$$

$$v_{res} = cl / S \omega_{res}, \bar{\omega} = \omega / \omega_{res}, \omega_{res}^2 = (L_{eff} C_{eff})^{-1}, L_{eff} = (L + L_1), C_{eff} = (C_{Cg} + C_{N0} + C_{aeff})$$

$$C_{aeff} = (1 - C_a C_p^{-1})^{-1} C_a, L_1 = 4\pi S^2 N / (3\mu_{host} c^2), C_p^{-1} = 4\pi N l^2 / (3\epsilon_{host}), A = 1 - \bar{\omega}^2 + iq\psi \bar{\omega} \quad (2)$$

$$q = [1 - \bar{\omega}^2 (1 - C_{N0} / C_{eff})], Z_{aN} = Z_a + i(C_p \omega)^{-1} = (i\omega C_{aeff})^{-1}, Z_a = (i\omega C_a)^{-1}, Z_{LN} = Z_L + i\omega L_1 = i\omega L_{eff}$$

$$Z_L = i\omega L, Z_{00N}^{-1} = Z_{0Cg}^{-1} + Z_{aN}^{-1} + Z_{LN}^{-1}, Z_{0Cg}^{-1} = Z_0^{-1} + Z_{Cg}^{-1}, Z_0^{-1} = (i\omega C_{0N})^{-1}, Z_{Cg}^{-1} = (i\omega C_g)^{-1}, f = C_{aeff} / C_{eff}$$

В (1), (2),  $A$  – резонансний знаменник, імпеданси  $Z_L, Z_{Cg}, Z_a, Z_0$  характеризують елементи еквівалентної схеми бі-анізотропної метачастинки (рис. 1. а, б);  $L, C_g, C_{N0}, C_a$  – індуктивність «магнітної петлі» та ємності зазору БіАМЧ, лінійної частини нелінійного елемента, поміщеного в зазорі та «вусиків» електричного диполу, що входить в склад БіАМЧ, відповідно; ефективні індуктивність та обернена ємність,  $L_1, C_p^{-1}$  включають «колективний ефект» взаємодії між метачастинками у наближенні Максвелла-Гарнета [1-3];  $\psi$  – параметр

дисипативних втрат;  $N, c, l$  – концентрація БіАМЧ, швидкість світла в вакуумі, та довжина металевих «вусиків» БіАМЧ, відповідно.  $S$  та  $L_{eff}$  – площа та ефективна індуктивність магнітної петлі бі-анізотропної частинки, відповідно, що включає вклад ефекту взаємодії між частинками;  $\bar{\omega}, \omega, \omega_{res}$  – нормована частота, частота електромагнітного поля і резонансна частота метаматеріалу з БіАМЧ (отримана, наскільки нам відомо, вперше в явному вигляді), відповідно. Для нелінійних поляризацій отримані формули [1, 2], які включають елементи нелінійних поляризуємостей/сприйнятливостей:

$$\begin{aligned} P_{NLI} &= \chi_{ee}(|F|^2)E_l + \chi_{em}(|F|^2)H_n, M_{NLn} = \chi_{me}(|F|^2)E_l + \chi_{mm}(|F|^2)H_n, \chi_{mm}(|F|^2) = -\varphi(1 + i\psi \bar{\omega})G(|F|^2), \\ \chi_{ee}(|F|^2) &= -\varphi v^2 f^2 \bar{\omega}^2 (1 + i\psi \bar{\omega})G(|F|^2), \chi_{me}(|F|^2) = -\chi_{em}(|F|^2) = -i\varphi v f \bar{\omega} (1 + i\psi \bar{\omega})G(|F|^2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} R &\equiv |U_N^{(1)}|^2; G(|F|^2) = [A(A + BR(|F|^2))]^{-1} \times BR(|F|^2), F = q_l E_l + q_n H_n \equiv f \bar{\omega}^2 \bar{u}_l + i\bar{\omega} \bar{H}_n, \bar{u}_l = lE_l / U_{0k}, \\ \bar{H}_n &= v^{-1}(lH_n / U_{k0}); \bar{U}_N^{(1)}(A + B|\bar{U}_N^{(1)}|^2) = -F; |B|^2 R^3 + 2\text{Re}(AB^*)R^2 + |A|^2 R - f^2 |F|^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

В (4),  $v = v_{res} / \bar{\omega}$ ,  $B = -\bar{\omega}^2 [\alpha_{N1} q_2 + (1/2) \alpha_{N2}]$ ,  
 $q_2 = \alpha_{N1} \bar{\omega}^2 \{1 - 4\bar{\omega}^2 + 2i\bar{\omega}[1 - 4\bar{\omega}^2(1 - C_{N0} / C_{eff})]\}^{-1}$ ;  
 $q_{1,n}$  - коефіцієнти в лінійній комбінації  
електричного та магнітного полів, що входить в  
 $F$  та визначає компоненти діад нелінійних  
сприйнятливостей (3); ці коефіцієнти легко  
знайти з (4). В (4) входять дві еквівалентні  
форми рівняння для визначення  $R \equiv |U_N^{(1)}|^2$ ,  $U_N^{(1)}$  -  
(комплексна) амплітуда основної (першої)  
гармоніки напруги на нелінійному елементі  
 $C = C(U)$  (рис. 1. а, б). Тут нелінійний/активний  
елемент навантаження БІАМЧ вважається  
емнісним (діод, див. [3] та посилання в [3]). Для  
нелінійних струму  $I_N$ , заряду  $q_N$  та напруги  $U_N$   
маємо  $I_N = dq_N / dt = [C_{0N} + C_{1N}(U_N / U_{0k}) +$   
 $C_{2N}(U_N / U_{0k})^2] dU_N / dt$ ;  $\alpha_{N1} \equiv C_{1N} / C_{eff}$ ,  
 $\alpha_{N2} \equiv C_{2N} / C_{eff}$ ;  $U_{0k}$  - характерна напруга.

### Нелінійні електромагнітні хвилі з параметричною взаємодією.

Якщо амплітуда хвилі накачки на частоті  
 $2\omega$  не залежить від координати  $Y$ , умови  
параметричного синхронізму двох зустрічних  
імпульсів, що поширюються у  
метаматеріальному хвильоводі в напрямку  $Y$  з  
частотами  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  та хвильовими числами  
 $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$  при наявності квадратичної нелінійності  
мають вигляд  $2\omega = \omega + \omega$ ,  $0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ . Отримана  
система рівнянь [1, рівн. (27)] забезпечує  
можливість моделювання зустрічних хвиль з  
амплітудами  $A_{1,2}$  в бі-анізотропному нелінійному  
хвильоводі/шаруватому середовищі з  
урахуванням квадратичної нелінійності (і  
параметричного підсилення), та ефектів  
самовпливу, при наявності нелінійностей, що  
відповідають широкому класу нелінійних  
функцій. Рівняння виведені за допомогою  
розвинутого загального методу для хвиль в  
шаруватій системі зі слабкими (об'ємною та/або  
поверхневою) нелінійностями [1, рівн. (6)] (метод  
НЕРШС). Показана принципова можливість  
параметричного підсилення (2+1)  
квазісолітонних імпульсів в біанізотропних  
шаруватих середовищах (рис. 1). Використовуючи [1, рівн. (27)], отримуємо, за  
порядком величини, при  $\partial / \partial y = 0$ ,  $\partial / \partial z = 0$ , та

нехтуючи ефектами самовпливу,  $\partial A_{1,2} / \partial t \sim$   
 $PAR_{TM}^{(0)}(\omega A_{2,1}^*)$ ;  
 $PAR_{TM}^{(0)} = iQ_0 A_3$ ;  $PAR_{TM}^{(0)} \sim \alpha_{N1} \times$   
 $\times [(1 - 4\bar{\omega}^2) |1 - \bar{\omega}^2|^{1/2} \times (1 + L_1 / L)]^{-1} \times$   
 $\times 8\pi v_{res}^2 \chi \bar{\omega}^4 I_0 (S\omega_{res} / c\phi_k) A_3$ . Тут  $I_0 = 2/3$ ,  
 $\phi_k = 0.5 B$  - «масштаб» електричного потенціалу,  
 $\mu_{host}$  - магнітна проникність «вміщуючого  
середовища», в яке введені БІАМЧ. Оцінюємо  
для ТМ мод падаючих хвиль; враховуючи  
симетрію компонент полів, отримуємо  
 $PAR_{TM}^{(0)} \neq 0$  для БІАМЧ, розташованих тільки в  
одній, (наприклад, нижній) половині хвильоводу  
[1] (рис. 1 е); покладемо (див. [1-3] і посилання в  
цих роботах)  $\omega_{res} \sim 1.25 \cdot 10^{11} s^{-1}$ ,  $\alpha_{N1} \sim 10^{-2}$   
 $\bar{\omega} \sim 1$ ,  $|1 - \bar{\omega}^2| \sim 10^{-2}$ ,  $l_0 \equiv S\omega_{res} / c \sim 3 \cdot 10^{-2} cm$ ,  
 $r_0 \sim 0.05 cm$ ,  $S = \pi r_0^2 \sim 7.5 \cdot 10^{-3} cm^2$ ,  $N \sim 200 cm^{-3}$ ,  
(амплітуда накачки)  $A_3 \sim 1.5 A / m$ . Така  
амплітуда відповідає помірній накачці з  
напруженістю магнітного поля  $\sim 2 \cdot 10^{-2} E(Oe)$ .  
При  $|A_1| \sim |A_2|$ , величина ефективного «часу  
підсилення»  $t_{char}$  за порядком величини є такою  
ж, як період огинаючої сигнального імпульсу,  
 $\omega t_{char} \sim 1$ . Це означає дуже високу ефективність  
параметричної взаємодії. При якісних чисельних  
розрахунках (рис. 1 з), врахована кубічна  
дефокусуюча нелінійність. Падаючий  
«сигнальний» імпульс має ширину, близьку до  
такої для структури на рис.1 з, нормовану  
інтенсивність  $\sim 0.3$  та «дзвіноподібну» форму  
розподілу по ширині. Для виявлення умови  
лінійного підсилення електромагнітних хвиль  
(EMX) в активному метаматеріалі, де активні  
навантаження включені в КРР, використовуємо  
[1, рівн. (6)] для метаматеріалів з метачастинками  
у формі КРР у лінійному наближенні. Отримуємо  
«ефективну довжину» або обернений  
просторовий інкремент підсилення EMX [3]:  
 $L_{ampl} = 2k_y [\varepsilon k_0^2 (-\mu_{eff}^0)]^{-1}$  або  
 $L_{ampl} / \lambda \sim \sqrt{\mu_{eff}^0 / \varepsilon} [(-\mu_{eff}^0) \pi]^{-1}$ , де  $\lambda = 2\pi / k_y$ ;  
магнітна проникність  $\mu$  дорівнює  $\mu \equiv \mu' + i\mu''$ , де  
 $\mu', \mu''$  - дійсна та уявна частини  $\mu$ , відповідно.  
Зробимо оцінку для таких параметрів  
метаматеріалу та «активної провідності»  
( $g_0 \equiv 1 / R_D < 0$ ) діоду Ганна/«активного  
навантаження» [3] КРР:  $\omega = 2\pi \cdot 10^{10} s^{-1}$ ,

$C_{eff} \sim 4.3 \cdot 10^{-2} \text{ pF}$ ,  $|g_0| \sim 6.25 \cdot 10^{-7} \text{ Ом}^{-1}$ ,  
 $S_D \sim 1 \text{ мкм}^2$   $R_L \sim 0.1 \text{ Ом}$ ,  $R_{eff} \gg R_L + g_0(\omega C_g)^2 \sim$   
 $(-0.25) \times 10^{-2} \text{ Ом}$ ,  $N \sim 200 \text{ см}^{-3}$ ,  $\epsilon \sim -2$ . Тут  $S_D$  -  
ефективна площа поперечного перерізу  
активного кристалу в діоді (зокрема, GaAs) [2, 3].

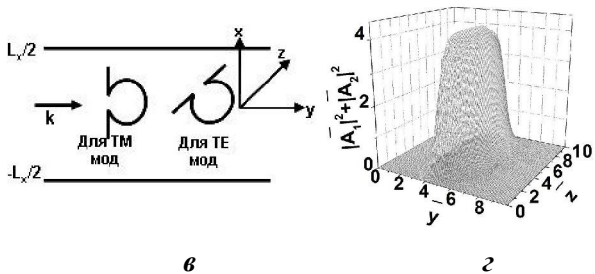
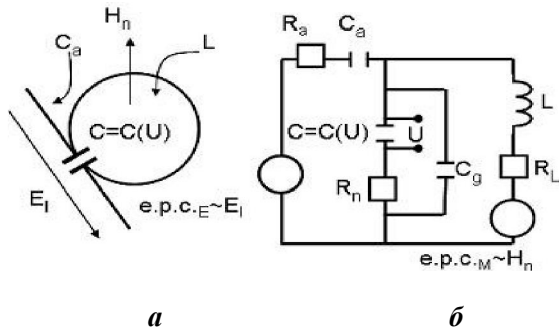


Рис. 1. *a*- бі-анізотропна  $\Omega$  - частинка/БІАМЧ; *b* – еквівалентна схема БІАМЧ, ліва та права частини якої характеризують електричний та магнітний диполі з відповідними електрорушійними силами (е. р. с.), див. [1-3] та посилення в цих роботах; *в* - бі-анізотропний плоский хвильовод; всі БІАМЧ розміщені однаково і в одній/паралельних площинах;  $z$ –

сумарна інтенсивність «сигнального» імпульсу та зустрічного «імпульсу холостого ходу», з параметричною накачкою; координати  $Y, Z$  та інтенсивність подані у відносних одиницях.

Отримуємо [1,3]  $\mu_{eff0} \sim -1$ ,  
 $|\mu_{eff0}''/\mu_{eff0}'| \sim 10^{-2}$ ;  $L_{ampl}/\lambda \sim 30$ . Маємо активне середовище, де можуть поширюватися ЕМХ з підсиленням, і з амплітудами, що змінюються повільно. При збільшенні  $S_D \sim 70 \text{ мкм}^2$ , отримуємо можливість «надефективного» підсилення ЕМХ в активному метаматеріалі з «негативною фазовою поведінкою», а саме  $|\mu_{eff0}''/\mu_{eff0}'| \sim 0.3$ ,  $L_{ampl}/\lambda \sim 1$ , що і означає «надвисоку» ефективність підсилення.

### Нові хвильові ефекти в нелінійних активних гіротропних шаруватих структурах

Розглянемо двовимірні імпульси в гіротропних активних нелінійних середовищах. Застосування методу НЕРШС до магнітостатичних хвиль (МСХ) в гіротропних шарах/феритових плівках (товщиною  $L$ ) при наявності параметричної взаємодії, зокрема для обернених об'ємних МСХ (ООМСХ, див. [4], а також рис. 1 в роботі [1]) призводить до еволюційного рівняння в диференційній формі [1, 4]  $\partial/\partial x_i P_i + \partial/\partial t W_{1,1l} = F_{NL1} + F_{PAR}$ , де  $F_{PAR} = \gamma h_0 (h_{1ly}^* m_{2lx}^* - h_{1lx}^* m_{2ly}^*)$ ,

$$P_i = 1/(4\pi) \text{div} \{ [\varphi_{1l}^* \vec{b}_1] + [\varphi_1 \vec{b}_{1l}^*] \}_i + \alpha [(\partial m_{1x} / \partial t)(\partial m_{ilx}^* / \partial x_i) + (\partial m_{1x}^* / \partial t)(\partial m_{1x} / \partial x_i) + (\partial m_{1y} / \partial t)(\partial m_{ily}^* / \partial x_i) + (\partial m_{1y}^* / \partial t)(\partial m_{1y} / \partial x_i)], F_{PAR} = \gamma h_0 (h_{1ly}^* m_{2lx}^* - h_{1lx}^* m_{2ly}^*)$$

$$W_{1,1l} = 1/(4\pi) (\epsilon \vec{e}_{1l} \vec{e}_{1l}^* + \vec{h}_1 \vec{h}_{1l}^*) + (4\pi \omega_H / \omega_M) (m_{1x} m_{1lx}^* + m_{1y} m_{1ly}^*) + \alpha [(\partial m_{1x} / \partial x_i)(\partial m_{ilx}^* / \partial x_i) + (\partial m_{1y}^* / \partial x_i)(\partial m_{1y} / \partial x_i)] + \beta_S (m_{1x} m_{1lx}^*),$$

$$F_{NL1} = -i \omega \{ (4\pi\gamma / \omega_M) [m_{1ly}^* (\delta m_{x11} + \delta m_{x12}) + m_{1lx}^* (\delta m_{y11} + \delta m_{y12}) + h_{1lz}^* (m_{1z} + m_{2z})] \}$$

В (5),  $\gamma$ ,  $\omega_{H,M}$  - гіромагнітне відношення, циклотронна частота  $\gamma H_0$  та  $4\pi\gamma M_0$ , відповідно,  $H_0, M_0$  - постійне магнітне поле та намагніченість насичення, відповідно (див. [1, 4] та посилення в цих роботах); змінне поле  $\vec{h}$  МСХ визначається через магнітостатичний потенціал  $\phi$  як  $\vec{h} = -\vec{\nabla}\phi$ ,  $|\vec{e}| \rightarrow 0$  для МСХ. «Сигнальна» та «хвиля/імпульс холостого ходу» позначені індексами «1» та «2», відповідно,  $\vec{m}$  та  $\vec{b}$  -

намагніченість та магнітна індукція для відповідних хвиль. Отримане рівняння описує еволюцію 1-ї (сигнальної) хвилі, і аналогічне рівняння записується для зустрічної хвилі «холостого ходу» (індекс «2»). Індекси «1» та «2» позначають відповідні лінійні хвилі [1, 4]. Для ООМСХ хвиля з індексом «1» має амплітуду, що повільно змінюється в часі та просторових напрямках  $Y$  та  $Z$  (які лежать в площині феритової плівки товщини  $L$ ). Член  $F_{PAR}$  описує

параметричну взаємодію (див. [1, 4] та посилання в цих роботах) хвиль сигнальної та холостого ходу,  $h_0$  - амплітуда хвилі накачки. Групова швидкість  $\vec{V}_g$  пакету ООМСХ,  $\vec{H}_0$  та поле накачки  $\vec{h}_0$  направлені вздовж Z. Накачка має частоту  $2\omega$ , сигнальна та зустрічна ООМСХ мають частоту  $\omega$  та однакові за модулем хвильові числа  $\pm k_z$  [1, 4];  $\alpha$ ,  $\beta_s$  характеризують обмінну взаємодію та поверхневу одновісну анізотропію, відповідно. Член  $F_{NL1}$  описує нелінійність, що діє на хвилю 1 за рахунок (1) самовпливу

$$\delta m_{x11} = \gamma(\tilde{h}_{y1} m_{z1} - \tilde{h}_{z1} m_{y1})^{(1)}, \delta m_{y11} = \gamma(\tilde{h}_{x1} m_{z1} - \tilde{h}_{z1} m_{x1}) \quad \text{та (2) крос-взаємодії з хвилею}$$

$$2, \delta m_{x12} = \gamma(\tilde{h}_{y2} m_{z1} - \tilde{h}_{z2} m_{y1})^{(1)} + \gamma(\tilde{h}_{y1} m_{z2} - \tilde{h}_{z1} m_{y2})^{(1)};$$

$$\delta m_{y12} = \gamma(\tilde{h}_{x2} m_{z1} - \tilde{h}_{z2} m_{x1})^{(1)} + \gamma(\tilde{h}_{x1} m_{z2} - \tilde{h}_{z1} m_{x2})^{(1)}$$

«Тильди» над позначеннями компонент (ефективних) магнітних полів означають включення до відповідних компонентів вкладів від обмінної взаємодії та поверхневої анізотропії; верхній індекс «1» означає виділення у відповідних членах, з урахуванням (нелінійних) 0-ї та 2-ї гармонік та нелінійних граничних умов для них, компонентів на частоті ( $\omega$ ) основної гармоніки (див. [1, 4]). В результаті інтегрування еволюційного рівняння в диференціальній формі по нормалі до структури (X для ООМСХ), в параболичному наближенні отримуємо .

$$\begin{aligned} & \partial U_1 / \partial t + V_{g1} \partial U_1 / \partial z + (i/2)(\partial^2 \omega / \partial k_z^2)(\partial^2 U_1 / \partial z^2) + i \partial \omega / \partial (k_y^2)(\partial^2 U_1 / \partial y^2) = \\ & F_{NLV} + F_{NLS} + F_{PAR}; F_{NLV} = F_{NLVx} + F_{NLVy} + F_{NLz}; F_{PARV} = (1/W_{V1}) \int_{-L/2}^{L/2} F_{PAR} dx. \\ & F_{NLVy} = -(1/W_{V1})(4\pi\gamma / \omega_M) i \omega \int_{-L/2}^{L/2} m_{1y}^* (\delta m_{x11} + \delta m_{x12}) dx, \\ & F_{NLVz} = -(1/W_{V1})(4\pi\gamma / \omega_M) i \omega \int_{-L/2}^{L/2} [\tilde{h}_{1z}^* (m_{1z} + m_{2z})]^{(1)} dx, \\ & F_{NLx} = -(1/W_{V1})(4\pi\gamma / \omega_M) i \omega \int_{-L/2}^{L/2} m_{1x}^* (\delta \tilde{m}_{y11} + \delta \tilde{m}_{y12}) dx + \\ & (1/W_{V1})(4\pi\gamma / \omega_M) i \omega \alpha \int_{-L/2}^{L/2} (\partial m_{1x} / \partial x) \{ \partial [(m_{1z} + m_{2z}) m_{2x}^*] / \partial x \} dx, W_{V1} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{1,110} dx \end{aligned} \quad (6)$$

Рівн. (6) відповідає [(4), рівн. (7)], а у випадку відсутності параметричної взаємодії зводиться до [(1), рівн. (8)] (див. також посилання в [1, 4]). Тут амплітуда  $U_1$ , що повільно змінюється, визначається так:

$\phi_1 = (1/2)U_1(t, z, y)f(x) \exp[i(\omega t - k_z Z)] + c.c.$ , де  $f(x)$  - функція, що описує розподіл магнітостатичного потенціалу для лінійної ООМСХ вздовж напрямку, нормального (X) до феритової плівки [4]. В (6),  $W_{1,110}$  отримано підстановкою величин з індексом "11" замість величин з індексом "1" у вираз для  $W_{1,11}$  у відповідному зі співвідношень (5). Замітимо, що величини  $\delta \tilde{m}_{y11; y12}$  можуть бути отримані з величин  $\delta m_{y11; y12}$  шляхом заміни

$\tilde{h}_{x1,2} \rightarrow \tilde{h}_{x1,2}$ ;  $\tilde{h}_{1,2x} \equiv h_{1,2x} + \alpha (\partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2) m_{1,2x}$ . Член  $F_{NLS}$ , що описує поверхневу нелінійність, пов'язану з наявністю ефекту нелінійності в просторовій дисперсії і відповідних «додаткових граничних умовах», детально розглянутий в [4, 1]. Для безобмінних ООМСХ з параметричною взаємодією, з (6) (та аналогічного рівняння для амплітуди огинаючої зустрічного імпульсу) отримуємо систему рівнянь у вигляді [1, рівн. (26)] (див. також посилання в [1, 4]). Для безобмінних ООМСХ у відсутності параметричної взаємодії, член, що описує «об'ємну» нелінійність в (6), приймає вигляд .

$$\begin{aligned} & F_{NLV} = -iN^{(0)}_{BVMSW} |U_1|^2 U_1, N^{(0)}_{BVMSW} = -\partial \omega / \partial |U_1|^2 \equiv -\Delta \omega_{NL} / |U_1|^2 \approx (16\pi^2 M^2_0 \omega_H)^{-1} \omega \omega_M (1 - \mu) \times \\ & \{1 + [(\mu - 1)^2 + \mu_a^2]^{-1} (\omega_M / \omega_H)\}^{-1} \left[ \int_0^l (\partial f(x) / \partial x)^2 dx \right]^{-1} \int_0^l (\partial f(x) / \partial x)^4 dx > 0; \\ & \mu_a = -\omega_M \omega / (\omega^2 - \omega_H^2); \mu = (\omega^2 - \omega_{\perp}^2) / (\omega^2 - \omega_H^2); \omega_{\perp}^2 = \omega_H (\omega_H + \omega_M) \end{aligned} \quad (7)$$

При  $\omega_H \sim \omega_M$ ,  $|k_z|L \ll 1$ , отримуємо з (7), за порядком,  $N_{BVMSW}^{(0)} \sim [(4\pi M_0)^2 l^2]^{-1} (\omega \omega_M / 4\omega_H)$ . Для інших типів МСХ (прямих об'ємних та поверхневих (ПМСХ)) нелінійні коефіцієнти наведені в [4, рівн. (14)-(16)] і показано, що, за порядком величини, значення нелінійних коефіцієнтів для ООМСХ та ПМСХ відповідають тим, що наведені в роботах інших авторів; еволюційне рівняння, що описує вищі нелінійні дисперсію та дифракцією та вищі лінійні ефекти наведене в [4, рівн. (12)]; відмітимо, що булети [1, 4] в метаматеріалах з негативною фазою [2, 3] можуть формуватися при позитивних знаках коефіцієнтів  $g_{1,2}, N$  в [4, рівн. (12)]; метод НЕРШС для електромагнітних хвиль в гіротропних середовищах з поверхневими нелінійностями див. в [4]. У випадку параметричної взаємодії отримані нові ефекти: (1) формування нових типів «ножеподібних булетів» [1, 4] у «вузьких» феритових хвильоводах; (2) для відносно невеликих величин амплітуд вхідного імпульсу та великих значень поля накачки, інтегральні інтенсивності сигнального та імпульсу «холостого ходу» мають тенденцію до зрівнювання після закінчення дії накачки (система «забуває»

початкові умови); (3) для помірних значень амплітуд вхідного імпульсу та відносно малої величини поля накачки, поперечне розщеплення хвилі «холостого ходу» пояснюється «нелінійною фазовою розстройкою».

### Висновки

«Наскрізний» метод моделювання хвиль в активних нелінійних структурах (застосовний і для ТГц та оптичного діапазонів) включає: (1) характеристизацію окремої БІАМЧ з «нелінійним навантаженням», (2) нову нелінійну характеристизацію метаматеріалу, (3) метод НЕРШС для бі-анізотропного середовища. Ефективними є параметричне підсилення зустрічних імпульсів та лінійне підсилення в метаматеріалах з БІАМЧ, навантаженими на нелінійні ємнісні елементи та з КРР, навантаженими на діоди (Ганна) з негативною диференційною провідністю [3], відповідно. В гіротропних нелінійних активних шаруватих структурах отримані нові типи «ножеподібних булетів» у «вузьких» хвильоводах та пояснені нові нелінійні ефекти при формуванні активних хвильових структур.

### References

1. Рапопорт Ю.Г. Загальний метод для виведення еволюційних рівнянь та моделювання нелінійних хвиль у шаруватих активних середовищах з об'ємними та поверхневими нелінійностями / Ю. Г. Рапопорт // Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2014. – №1. – С. 281–288.
2. Boardman A.D. Weakly nonlinear waves in layered bi-anisotropic metamaterials / A.D. Boardman, R. Mitchell-Thomas, Yu.G. Rapoport // Proc. of 3rd Intern. Congr. on Adv. Electromagn. Mater. in Microwaves and Optics: Metamaterials-2009. London, UK. – 2009. - P. 495-497.
3. Boardman A.D. Creating stable gain in active metamaterials / A.D. Boardman, Yu.G. Rapoport, N. King, V.N. Malnev // J. Opt. Soc. Am. B. – 2007. - V. 24. - No. 10. – P. A53-A61.
4. Rapoport Yu. Метод для виведення нелінійних еволюційних рівнянь в шаруватих структурах (НЕРШС): приклад нелінійних хвиль в гіротропних шарах / Yu. Rapoport, V. Grimalsky, S. Zaspel // Вісник Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка. Серія Фізика. – 2012. – №14/ 15. – С. 72–76.

1. RAPOPORT, YU.G. (2014) General method for the derivation of the evolution equations and modeling nonlinear waves in active layered structures with surface and volume nonlinearities. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics & Mathematics*. (1). p. 281–288.
2. BOARDMAN, A.D., MITCHEL-THOMAS, R., RAPOPORT, YU.G. (2009) Weakly nonlinear waves in layered bi-anisotropic metamaterials. In *3rd Intern. Congr. on Adv. Electromagn. Mater. in Microwaves and Optics: Metamaterials-2009*. 30th Aug. to 4th Sept. 2009. London. pp. 495-497.
3. BOARDMAN, A.D., RAPOPORT, YU.G., KING, N., MALNEV, V.N. (2007) Creating stable gain in active metamaterials. *J. Opt. Soc. Am. B*. 10. p. A53-A61.
4. RAPOPORT YU., GRIMALSKY V., ZASPEL. C. (2012) Method for the derivation of nonlinear evolution equations in layered structures (NEELS): an example of nonlinear waves in gyrotropic layers. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series Physics*. 14/15. p. 72–76.

Надійшла до редколегії 26.06.15