УДК 519.946

Маринець В.В.[1], д.ф.-м.н., проф,
Питьовка О.Ю.[2], к.ф.-м.н.,доц.

Один підхід дослідження крайових задач для рівнянь в частинних похідних вищого порядку

[1] ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 88000, м.Ужгород, пл.Народна,3,
e-mail: vasyl-marynets@rambler.ru
[2] Мукачівський державний університет, 89600, м.Мукачево, вул..Ужгородська, 26,
e-mail: oxana_pityovka@bigmir.net

V.V.Marynets[1], doctor of physic. and mathem., prof.,
O.Y.Pityovka[2], candidate of physic. and mathem.

On one approach of the boundary-value problem investigation for the higher-order partial differential equations

[1] Uzhhorod National University of Uzhhorod, 88000, Uzhhorod, Narodna sq., 3,
e-mail: vasyl-marynets@rambler.ru
[2] Mukachevo State University, 89600, Mukachevo, Uzhhorodska str., 26,
e-mail: oxana_pityovka@bigmir.net

Будується одна конструктивна модифікація двостороннього методу дослідження та наближеного інтегрування крайової задачі для нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних третього порядку на площині, коли край області незалежних змінних має складну структуру.

Ключові слова: двосторонній метод, крайова задача, нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних.

This work is about the investigation and approximate integration of the boundary—value problems in the theory of partial differential equations of the hyperbolic type with a complex structure of the bound. We give one approach of the investigation of the Cauchy-Gaursat boundary-value problem for a third order non-linear differential equation of the hyperbolic type with the help of the constructive modification of the two-sided method. On the basis of transformation of the given problem to the equivalent system of integro-differential equations we establish sufficient conditions of existence, regularity of solution of the boundary-value problem, prove theorems about differential inequalities, and give one practical method of construction of the zero approximation functions (functions of the first "blanch").

The alternative two-sided method built for the investigation of boundary-value problems for partial differential equations has a number of advantages upon other monotone two-sided methods.

Key Words: two-sided method, boundary-value problem, non-linear partial differential equation

Статтю представив докт. фіз.-мат. наук, проф. Мішкольцького ун-ту Ронто М.

Дана робота є продовженням досліджень, приведених в[1,2].

Нехай в R^2 задана область

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,\ \text{де}$$

$$D_1 = \{(x,y) \mid x \in [x_0, x_1],\ y \in (g(x), y_1]\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_1],\ y \in (y_1, y_2]\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \mid x \in (x_1, x_2],\ y \in (y_0, y_1]\},$$

$$x_0 < x_1 < x_2,\ y_0 < y_1 < y_2,$$

де $y = g(x)$ і тоді $x = k(y)$ – «вільна» крива, $g'(x) < 0$, $g(x_0) = y_1$, $g(x_1) = y_0$.

Дослідимо задачу: при $(x,y) \in D$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\begin{aligned} D^{(2.1)}u(x,y) = f(x,y,u(x,y),D^{(1.0)}u(x,y),\\ D^{(2.0)}u(x,y)) := f[u(x,y)] \end{aligned} \tag{1}$$

$f : \overline{B} \to R$, $\overline{B} \in R^5$, який задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} u(x,g(x)) = \varphi_1(x),\\ D^{(0.1)}u(x,g(x)) = \varphi_2(x),\\ D^{(1.1)}u(x,g(x)) = \varphi_3(x), x \in [x_0,x_1], \end{aligned} \tag{2}$$

$$u(x_0,y)=\omega_1(y),\quad D^{(1.0)}u(x_0,y)=\omega_2(y),\ y\in[y_1,y_2],\tag{3}$$

$$u(x,y_0)=\psi(x),\ x\in[x_1,x_2],\tag{4}$$

та умови узгодженості

$$\begin{gathered}\omega_1(y_1)=\varphi_1(x_0),\ \omega_1'(y_1)=\varphi_2(x_0),\\ \omega_2(y_1)=\varphi_1'(x_0),\omega_2'(y_1)=\varphi_3(x_0),\\ \varphi_1(x_1)=\psi(x_1),\\ \psi_1'(x_1)=\varphi_1'(x_1)-g'(x_1)\varphi_2(x_1),\end{gathered}\tag{5}$$

де $\varphi_1(x)\in C^2([x_0,x_1])$, $\psi(x)\in C^2([x_1,x_2])$, $\varphi_2(x),\varphi_3(x)\in C^1([x_0,x_1])$, $\omega_1(y),\omega_2(y)\in C^1([y_1,y_2])$ – задані функції.

Очевидно [3] шуканий розв'язок задачі (1) – (5) $u(x,y)=u_s(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$, де $u_1(x,y)$ – розв'язок в $\overline{D}_1$ задачі Коші (1), (2), (5), $u_2(x,y)$ – розв'язок задачі Гурса (1), (3) і $u_2(x,y_1)=u_1(x,y_1)$ при $(x,y)\in\overline{D}_2$, а $u_3(x,y)$ – розв'язок при $(x,y)\in\overline{D}_3$ задачі Гурса (1), (4) і $u_3(x_1,y)=u_1(x_1,y)$.

Позначимо:

$$\Phi_1(x,y):=\varphi_1(x)+$$
$$+\int_{g(x)}^{y}[\varphi_2(k(\eta))+(x-k(\eta))\varphi_3(k(\eta))]d\eta,(x,y)\in\overline{D}_1,$$

$$\Phi_2(x,y):=\Phi_1(x,y_1)+\omega_1(y)-\omega_1(y_1)+$$
$$+(x-x_0)[\omega_2(y)-\omega_2(y_1)],(x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$\Phi_3(x,y):=\psi(x)+$$
$$+\int_{y_0}^{y}[\varphi_2(k(\eta))+(x-k(\eta))\varphi_3(k(\eta))]d\eta,(x,y)\in\overline{D}_3,$$

$$T_1f[u_1(\xi,\eta)]:=\int_{g(x)}^{y}\int_{k(\eta)}^{x}(x-\xi)f[u_1(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_1,$$

$$T_2f[u_2(\xi,\eta)]:=\int_{y_1}^{y}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)f[u_2(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$T_{2,1}f[u_1(\xi,\eta)]:=\int_{g(x)}^{y_1}\int_{k(\eta)}^{x}(x-\xi)f[u_1(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_2,$$

$$T_3f[u_3(\xi,\eta)]:=\int_{y_0}^{y}\int_{x_1}^{x}(x-\xi)f[u_3(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_3.$$

$$T_{3,1}f[u_1(\xi,\eta)]:=\int_{y_0}^{y}\int_{k(\eta)}^{x_1}(x-\xi)f[u_1(\xi,\eta)]d\xi\,d\eta,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_3.$$

Справедлива наступна

Лема 1. Нехай $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$. Тоді крайова задача (1) – (5) є еквівалентною системі рівнянь

$$\begin{gathered}u_s(x,y)=\Phi_s(x,y)+\varepsilon_sT_{s,1}f[u_1(\xi,\eta)]+\\ +T_sf[u_s(\xi,\eta)],\end{gathered}\tag{6}$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2,3,\ \varepsilon_s=\begin{cases}0, s=1,\\ 1, s=2,3,\end{cases}$$

Причому, якщо існує обмежена частинна похідна $\dfrac{\partial f[u(x,y)]}{\partial D^{(2.0)}u(x,y)}$ в області $\overline{B}$ і крайова задача (1) – (5) має розв'язок, то він буде регулярним.

Встановимо достатні умови існування єдиного розв'язку задачі (1) – (5).

З цією метою надалі будемо вважати, що функція $f[u(x,y)]\in C_1^*(\overline{B})$, тобто, що вона задовольняє наступні умови [4]:

1. $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$ і в області $\overline{B}$ має обмежену частинну похідну $\dfrac{\partial f[u(x,y)]}{\partial D^{(2.0)}u(x,y)}$,

2. у просторі $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1\subset R^8$, $Пр_{xOy}\overline{B}_1=\overline{D}$, існує така функція $H(x,y,u(x,y),D^{(1.0)}u(x,y),D^{(2.0)}u(x,y);v(x,y),$ $D^{(1.0)}v(x,y),D^{(2.0)}v(x,y)):=H[u(x,y);v(x,y)]$, що

а) $H[u(x,y);v(x,y)]\equiv f[u(x,y)]$,

б) для довільної з простору $C^{(2.0)}(\overline{D})$ пари функцій $u(x,y),v(x,y)\in\overline{B}_1$, які задовольняють умови $D^{(k.0)}u(x,y)\ge D^{(k.0)}v(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$, $k=0,1,2$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[u(x,y);v(x,y)]-H[v(x,y);u(x,y)]\le 0,\tag{7}$$

3. функція $H[u(x,y);v(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто, для всяких з

простору $C^{(2.0)}(\overline{D})$ функцій $u_r(x,y)$, $v_r(x,y)\in \overline{B}_1$, $r=1,2$ виконується умова

$$\left|H[u_1(x,y);u_2(x,y)]-H[v_1(x,y);v_2(x,y)]\right|\le$$
$$\le 0{,}5L\sum_r\left(\left|w_r(x,y)\right|+\left|D^{(1.0)}w_r(x,y)\right|+\left|D^{(2.0)}w_r(x,y)\right|\right),$$

$w_r(x,y):=u_r(x,y)-v_r(x,y)$, $r=1,2$, $0{,}5L-$ стала Ліпшіца.

Очевидно, якщо функція $f[u(x,y)]\in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $f[u(x,y)]$ завжди належить простору $C_1^*(\overline{B})$.

Обернене твердження несправедливе.

Нехай функції $Z_{s,p}(x,y)$, $V_{s,p}(x,y)\in C^{(2.0)}(\overline{D}_s)$ належать області $\overline{B}_1$, $s=1,2,3$, $p\in N$.

Введемо позначення:

$$W_{s,p}(x,y):=Z_{s,p}(x,y)-V_{s,p}(x,y),$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s,\quad s=1,2,3,$$
$$f_s^p(x,y):=H[Z_{s,p}(x,y);V_{s,p}(x,y)],$$
$$f_{s,p}(x,y):=H[V_{s,p}(x,y);Z_{s,p}(x,y)],$$
$$\Omega_s^p(x,y):=\Phi_s(x,y)+\varepsilon_s T_{s,1}f_1^p(\xi,\eta)+$$
$$+T_s f_s^p(\xi,\eta), \qquad (8)$$
$$\Omega_{s,p}(x,y):=\Phi_s(x,y)+\varepsilon_s T_{s,1}f_{1,p}(\xi,\eta)+$$
$$+T_s f_{s,p}(\xi,\eta),$$
$$\alpha_{s,p}(x,y):=Z_{s,p}(x,y)-\Omega_s^p(x,y),$$
$$\beta_{s,p}(x,y):=V_{s,p}(x,y)-\Omega_{s,p}(x,y),$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s.$$

Побудуємо послідовності функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$, згідно формул

$$Z_{s,p+1}(x,y)=\Omega_s^p(x,y),$$
$$V_{s,p+1}(x,y)=\Omega_{s,p}(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}_s, \qquad (9)$$

де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$ вибираємо довільні функції з простору $C^{(2.0)}(\overline{D}_s)$, які задовольняють відповідно умови (2) – (5) та нерівності

$$D^{(k.0)}W_{s,0}(x,y)\ge 0,\ D^{(k.0)}\alpha_{s,0}(x,y)\ge 0,$$
$$D^{(k.0)}\beta_{s,0}(x,y)\le 0,\ (x,y)\in\overline{D}_s, \qquad (10)$$
$$s=1,2,3,\ k=0,1,2.$$

Надалі функції $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y)\in C^{(2.1)}(\overline{D}_s)$, які задовольняють відповідно умови (2) – (5), нерівності (10) і належать області $\overline{B}_1$ будемо називати функціями порівняння крайової задачі (1) – (5).

Має місце наступна

Лема 2. Нехай $f[u(x,y)]\in C_1^*(\overline{B})$ і рівняння (6) в просторі функцій $C^{(2.0)}(\overline{D}_s)$ мають розв'язки, які при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$, задовольняють умови

$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\le D^{(k.0)}u_s(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y).$$

Тоді в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності (10).

Дамо практичний метод побудови функцій порівняння крайової задачі (1) – (5), коли $f[u(x,y)]\in C_1^*(\overline{B})$.

Нехай

$$u_s^*(x,y)=\Phi_s(x,y)+\varepsilon_s T_{1,s}f[u_1^*(\xi,\eta)]+$$
$$+T_s f_s[h(\xi,\eta)],$$

де $h(x,y)\in C^{(2.0)}(\overline{D})-$ довільна в області $\overline{B}$ функція.

Вважаючи, що $u_s^*(x,y)\in\overline{B}_1$, позначимо $\alpha_s^*(x,y):=u_s^*(x,y)-\Phi_s(x,y)-\varepsilon_s T_{1,s}f[u_1^*(\xi,\eta)]-$ $-T_s f[u_s^*(\xi,\eta)]$.

Тоді функції

$$D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y)=D^{(k.0)}u_s^*(x,y)+\left|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)\right|,$$
$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)=D^{(k.0)}u_s^*(x,y)-\left|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)\right|,$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2$$

при умові, що $D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y), D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$ є функціями порівняння крайової задачі (1) – (5). Дійсно

$$D^{(k.0)}W_{s,0}(x,y)=2\left|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)\right|\ge 0,$$

а приймаючи до уваги умову (7), маємо

$$D^{(k.0)}\alpha_{s,0}(x,y)=\left|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)\right|+D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)+$$
$$+\varepsilon_s D^{(k.0)}T_{1,s}\left(f[u_1^*(\xi,\eta)]-f_1^0(\xi,\eta)\right)+$$
$$+D^{(k.0)}T_s\left(f[u_s^*(\xi,\eta)]-f_s^0(\xi,\eta)\right)\ge 0,$$

$$D^{(k.0)}\beta_{s,0}(x,y)=-\left|D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)\right|+D^{(k.0)}\alpha_s^*(x,y)+$$
$$+\varepsilon_s D^{(k.0)}T_{1,s}\left(f[u_1^*(\xi,\eta)]-f_{1,0}(\xi,\eta)\right)+$$
$$+D^{(k.0)}T_s\left(f[u_s^*(\xi,\eta)]-f_{s,0}(\xi,\eta)\right)\le 0,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2,$$

тобто множина функцій порівняння задачі (1) – (5) не порожня.

Із (8), (9) одержимо

$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,p}(x,y)-Z_{s,p+1}(x,y)\right]=D^{(k.0)}\alpha_{s,p}(x,y),$$
$$D^{(k.0)}\left[V_{s,p}(x,y)-V_{s,p+1}(x,y)\right]=D^{(k.0)}\beta_{s,p}(x,y), \qquad (11)$$

$$D^{(k.0)}\left[\alpha_{s,p}(x,y)+\alpha_{s,p+1}(x,y)\right]=$$
$$=D^{(k.0)}\left[Z_{s,p}(x,y)-Z_{s,p+2}(x,y)\right],$$
$$D^{(k.0)}\left[\beta_{s,p}(x,y)+\beta_{s,p+1}(x,y)\right]= \qquad (12)$$
$$=D^{(k.0)}\left[V_{s,p}(x,y)-V_{s,p+2}(x,y)\right],$$

$$D^{(k.0)}W_{s,p+1}(x,y)=D^{(k.0)}\left[\Omega_s^p(x,y)-\Omega_{s,p}(x,y)\right], \qquad (13)$$

$$D^{(k.0)}\alpha_{s,p+1}(x,y)=D^{(k.0)}\left[\Omega_s^p(x,y)-\Omega_s^{p+1}(x,y)\right],$$
$$D^{(k.0)}\beta_{s,p+1}(x,y)=D^{(k.0)}\left[\Omega_{s,p}(x,y)-\Omega_{s,p+1}(x,y)\right], \qquad (14)$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2,\ p=0,1,2,\dots$$

Враховуючи (7), (10), із (11), (13) при $p=0$ одержимо

$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,0}(x,y)-Z_{s,1}(x,y)\right]\ge 0,$$

$$D^{(k.0)}\left[V_{s,0}(x,y)-V_{s,1}(x,y)\right]\le 0,$$

$$D^{(k.0)}W_{s,1}(x,y)\le 0,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2.$$

Нехай при $(x,y)\in\overline{D}_s$ справедливі нерівності

$$D^{(k.0)}\left[V_{s,0}(x,y)-Z_{s,1}(x,y)\right]\le 0,$$
$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,0}(x,y)-V_{s,1}(x,y)\right]\ge 0, \qquad (15)$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3.$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності, маємо

$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,1}(x,y)\le$$
$$\le D^{(k.0)}V_{s,1}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y),$$

тобто, якщо $Z_{s,0}(x,y),\ V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$, то і $Z_{s,1}(x,y),\ V_{s,1}(x,y)\in\overline{B}_1$.

Із (14) при $p=0$ одержимо $D^{(k.0)}\alpha_{s,1}(x,y)\le 0$, $D^{(k.0)}\beta_{s,1}(x,y)\ge 0,$ для всіх $(x,y)\in\overline{D}_s$, а отже із (11), (13) при $p=1$ і $(x,y)\in\overline{D}_s$ випливає

$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,1}(x,y)-Z_{s,2}(x,y)\right]\le 0,$$

$$D^{(k.0)}\left[V_{s,1}(x,y)-V_{s,2}(x,y)\right]\ge 0,$$

$$D^{(k.0)}W_{s,2}(x,y)\ge 0,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2.$$

Оскільки в силу умов (7), (15) при $(x,y)\in\overline{D}_s$

$$D^{(k.0)}\left[\alpha_{s,0}(x,y)+\alpha_{s,1}(x,y)\right]=D^{(k.0)}\left[Z_{s,0}(x,y)-\right.$$
$$-V_{s,1}(x,y)+T_{1,s}(f_{1,0}(\xi,\eta)-f_1^1(\xi,\eta))+$$
$$\left.+T_s(f_{s,0}(\xi,\eta)-f_s^1(\xi,\eta))\right]\ge 0,$$

$$D^{(k.0)}\left[\beta_{s,0}(x,y)+\beta_{s,1}(x,y)\right]=D^{(k.0)}\left[V_{s,0}(x,y)-\right.$$
$$-Z_{s,1}(x,y)+T_{1,s}(f_1^0(\xi,\eta)-f_{1,1}(\xi,\eta))+$$
$$\left.+T_s(f_s^0(\xi,\eta)-f_{s,1}(\xi,\eta))\right]\le 0,$$

то із (12) при $p=0$, $k=0,1,2$ і $(x,y)\in\overline{D}_s$ маємо

$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,0}(x,y)-Z_{s,2}(x,y)\right]\ge 0,$$

$$D^{(k.0)}\left[V_{s,0}(x,y)-V_{s,2}(x,y)\right]\le 0,\ s=1,2,3.$$

Але

$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,p+1}(x,y)-V_{s,p+2}(x,y)\right]=$$
$$=D^{(k.0)}\left[\Omega_s^p(x,y)-\Omega_{s,p+1}(x,y)\right],$$
$$D^{(k.0)}\left[V_{s,p+1}(x,y)-Z_{s,p+2}(x,y)\right]= \qquad (16)$$
$$=D^{(k.0)}\left[\Omega_{s,p}(x,y)-\Omega_s^{p+1}(x,y)\right]$$

для $p\in N$, а отже, враховуючи попередні нерівності із (16) при $p=0$ одержимо

$$D^{(k.0)}\left[Z_{s,1}(x,y)-V_{s,2}(x,y)\right]\le 0,$$

$$D^{(k.0)}\left[V_{s,1}(x,y)-Z_{s,2}(x,y)\right]\ge 0,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2,$$

тобто мають місце нерівності

$$D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,1}(x,y)\le D^{(k.0)}V_{s,2}(x,y)\le$$
$$\le D^{(k.0)}Z_{s,2}(x,y)\le D^{(k.0)}V_{s,1}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y),$$
$$(x,y)\in\overline{D}_s.$$

Із (14) при $p=1$ маємо $D^{(k.0)}\alpha_{s,2}(x,y)\ge 0$, $D^{(k.0)}\beta_{s,2}(x,y)\le 0,$ а отже функції $Z_{s,2}(x,y),\ V_{s,2}(x,y)\in\overline{B}_1$ і є функціями порівняння задачі(1) – (5).

Повторюючи вище наведені міркування, методом математичної індукції переконуємось у справедливості нерівностей

$$\begin{aligned}&D^{(k.0)}V_{s,2p}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,2p+1}(x,y)\le\\&\le D^{(k.0)}V_{s,2p+2}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,2p+3}(x,y)\le\\&\le D^{(k.0)}V_{s,2p+3}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,2p+2}(x,y)\le\\&\le D^{(k.0)}V_{s,2p+1}(x,y)\le D^{(k.0)}Z_{s,2p}(x,y),\end{aligned}\tag{17}$$

для $\forall(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$, $k=0,1,2$, $p=0,1,2,\ldots$.

Таким чином, справедлива наступна

Теорема 1. Нехай функція $f[u(x,y)]\in C_1^*(\overline{B})$, а в області $\overline{B}_1$ виконуються умови (15).

Тоді для послідовностей функцій $\{D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\}$, які побудовані згідно закону (9), де за нульове наближення $D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y)$, $D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$, $k=0,1,2$, $s=1,2,3$, вибираються функції порівняння задачі (1) – (5), в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності (17).

Покажемо, що побудовані послідовності функцій $\{D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\}$ збігаються рівномірно при $(x,y)\in\overline{D}_s$ і

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty}D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)=\lim_{p\to\infty}D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)=\\&=D^{(k.0)}u_s(x,y),(x,y)\in\overline{D}_s,s=1,2,3,k=0,1,2.\end{aligned}\tag{18}$$

В силу нерівностей (17) для цього достатньо показати, що

$$\lim_{p\to\infty}D^{(k.0)}W_{s,p}(x,y)=0,$$

$$(x,y)\in\overline{D}_s,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2.$$

З цією метою позначимо:

$$\max_{s,k}\sup_{\overline{D}_s}\left|D^{(k.0)}W_{s,0}(x,y)\right|=d,$$

$$\max\{1,\sup_{\overline{D}}(x-x_0+y-y_0)\}=\gamma.$$

Із (13) маємо

$$D^{(k.0)}W_{s,p+1}(x,y)=D^{(k.0)}\{\varepsilon_sT_{s,1}[f_1^p(\xi,\eta)-$$
$$-f_{1,p}(\xi,\eta)]+T_s[f_s^p(\xi,\eta)-f_{s,p}(\xi,\eta)]\},$$

а отже, в силу умови Ліпшіца

$$\left|D^{(k.0)}W_{s,p+1}(x,y)\right|\le L\left\{\varepsilon_sT_{s,1}\left[\sum_{k=0}^{2}\left|D^{(k.0)}W_{1,p}(\xi,\eta)\right|\right]+\right.$$
$$\left.+T_s\left[\sum_{k=0}^{2}\left|D^{(k.0)}W_{s,p}(\xi,\eta)\right|\right]\right\},$$

звідки методом математичної індукції переконуємось у справедливості оцінок

$$\begin{aligned}&\left|D^{(k.0)}W_{s,p}(x,y)\right|\le(p!)^{-1}\left[3L\gamma(x-x_0+y-y_0)\right]^p\cdot d,\\&(x,y)\in\overline{D}_s,s=1,2,3,k=0,1,2,p\in N.\end{aligned}\tag{19}$$

Із оцінок (19) випливає виконання умов (18).

Перейшовши у (9) до границі при $p\to\infty$ переконуємось, що граничні функції $u_s(x,y)$ є розв'язками відповідних рівнянь (6) при $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1.

Тоді послідовності функцій $\{D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\}$, побудовані згідно формул (9), де за нульове наближення $D^{(k.0)}Z_{s,0}(x,y)$, $D^{(k.0)}V_{s,0}(x,y)\in\overline{B}_1$, вибираємо функції порівняння крайової задачі (1) – (5):

1. збігаються рівномірно до єдиного регулярного розв'язку крайової задачі (1) – (5) при $(x,y)\in\overline{D}$;
2. мають місце оцінки (19);
3. в області $\overline{B}_1$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned}&D^{(k.0)}V_{s,p}(x,y)\le(\ge)D^{(k.0)}u_s(x,y)\le(\ge)\\&\le(\ge)D^{(k.0)}Z_{s,p}(x,y),\end{aligned}\tag{20}$$

для p – парних (непарних), $(x,y)\in\overline{D}_s$, $s=1,2,3$, $k=0,1,2$.

Для доведення єдиності розв'язку задачі (1) – (5), достатньо провести міркування, аналогічні до тих, які викладені в [5].

Доведемо справедливість нерівностей (20). З цією метою припустимо супротивне, що в деякій точці $(x,y)\in\overline{D}_s$ та номера, наприклад, $p=2k$ виконується нерівність $V_{s,2n}(x,y)>u_s(x,y)$. Тоді для всякого $\nu\in N$ в силу нерівностей (17) в даній точці

$$u_s(x,y)<V_{s,2n}(x,y)\le V_{s,2(n+\nu)}(x,y),$$

тобто послідовність функцій $\{V_{s,2(n+\nu)}(x,y)\}$ в цій точці не збігається до розв'язку $u_s(x,y)$, що суперечить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності в (20).

Наслідок. Нехай права частина рівняння (1) $f[u(x,y)]\equiv f[u(x,y);0]$, $f[0]\ge(\le)0$. Тоді розв'язок крайової задачі (1) – (5) з однорідними крайовими умовами (2) – (4) задовольняє нерівності

$$D^{(k.0)}u_s(x,y)\ge(\le)0,\ s=1,2,3,\ k=0,1,2,\ (x,y)\in\overline{D}_s$$

Список використаних джерел

1. *Маринець В.В., Маринець К.В.* Крайова задача Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу// Доповіді НАНУ – 2013.– №10.– С.23–28.
2. *Marynets V.V., Marynets K.V.* On Goursat Darboux boundary-value problem for systems of non-linear differential equations of hyperbolic type//Miskolc Mathematical Notes. – 2013. – Volume 14. – №3–P.1009–1020.
3. *Collatz L.* Funktionalanalysis und numerische matematik. Berlin – Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag – 1964.–P.446.
4. *Маринець В.В., Маринець К.В., ПитьовкаО.Ю.* Про одну крайову задачу теорії ДРЧП гіперболічного типу в області із складною структурою краю / В.В. Маринець, К.В.Маринець, О.Ю.Питьовка // Наук.вісник Ужгород.ун-ту. Серія Математика і інформатика – 2014. – Вип.25, №2. – С.110–117.
5. *Маринець В.В.* Аналітичні методи в теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу.– Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2006. – 130с.

References

1. MARYNETS, V. and MARYNETS, K. (2013) *Krayova zadacha Hursa-Darbu dlya neliniynoho rivnyannya hiperbolichnoho typu.* Dopovidi NANU – №10. – P.23–28.
2. MARYNETS, V. and MARYNETS, K. (2013) *On Goursat Darboux boundary-value problem for systems of non-linear differential equations of hyperbolic type* Miskolc Mathematical Notes. – Volume 14. – №3–P.1009–1020.
3. COLLATZ, L. (1964) *Funktionalanalysis und numerische matematik.* Berlin – Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.
4. MARYNETS, V., MARYNETS, K. and PITYOVKA, O. (2014) *Pro odnu krayovu zadachu teoriyi DRCHP hiperbolichnoho typu v oblasti iz skladnoyu strukturoyu krayu.* Nauk.visnyk Uzhhorod.un-tu. Seriya Matematyka i informatyka. – Vyp.25, №2. – P.110–117.
5. MARYNETS, V. (2006) *Analitychni metody v teoriyi dyferentsial□nykh rivnyan□ v chastynnykh pokhidnykh hiperbolichnoho typu.*–Uzhhorod: Vyd-vo UzhNU «Hoverla».

Надійшла до редколегії 4.12. 2015