УДК 519.21

Чечельницький О.А., к.ф.-м.н., доцент

Кучеренко О.В., провідний інженер

Властивості мережевої моделі з різними типами вузлів у стаціонарному режимі

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: alex_che@voliacable.com

O.A. Chechelnitsky, PhD in Math., Associate Professor.
O.V. Kucherenko, leading engineer

The properties of the network model with different types of nodes in the stationary regime

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: alex_che@voliacable.com

Стаття присвячена дослідженню багатоканальної мережевої моделі з різними типами вузлів. Це означає, що ми розглядаємо модель, яка складається з двох систем обслуговування з нескінченою кількістю обслуговуючих приладів. Час обслуговування на першій системі має довільний розподіл з функцією розподілу $G(t)$, а час обслуговування на другій системі є показниковим. Вивчення моделі ускладнюється тим, що її стохастична динаміка не може бути описана ланцюгом Маркова. Крім того, ми передбачаємо, що вимоги надходять до мережевої моделі згідно з двовимірним потоком Пуассона. Цей потік характеризується тим, що вимоги з нього можуть надходити парами одночасно. Вивчається стохастичний процес числа вимог у вузлах моделі. Отримано генератрису граничного розподілу цього процесу. Це дозволило виписати в явному вигляді вирази для математичного сподівання, дисперсії та кореляції числа вимог у вузлах мережі..

Ключові слова: мережева модель обслуговування, двовимірний вхідний потік, стаціонарний розподіл.

The present article is devoted to research the multi-channel network model with different types of nodes. It means that we consider the model which consists of two infinite-server queues $M/G/\infty$ and $M/M/\infty$. The service time in the first system has general function of distribution $G(t)$ and the service time in the second system has the exponential distribution. In this case the stochastic dynamic of our model cannot be defined by Markov chain. As a result, analysis of such networks is much more difficult than that of the corresponding Markovian queueing models .Besides we assume that customers arrive to our model according a bivariate Poisson input flow This input process is characterized by the fact that customers arrive according to a bivariate Poisson flow simultaneously. We consider the number of customers in the systems at time t. This stochastic process describes the state of our network model. In present paper we find the limit joint distribution of the number of customers in the systems. In a general way (by differentiating the corresponding generating function.) we obtain the main characteristics of this distribution, such as the expected number of customers in the nodes, its variance and correlation . In the case when parameters of our model dependent on the parameter n (number of series) the limit normal distribution was obtained for the service process in the stationary regime.

Key Words: network model, bivariate input flow, stationary distribution

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

1. Стаціонарні характеристики моделі.

Особливості реальних комп'ютерних мереж та мереж зв'язку вимагають застосуванням паралельного функціонування об'єктів різного типу. Це пов'язано з тим , що паралельність обробки масивів інформації, запитів, паралельність обчислень та інших операції, які виконуються в сучасних мережевих системах, дозволяють досягати найбільшої швидкості роботи та економії часу. Ось чому, велике значення має аналіз властивостей математичних моделей мережевих структур з паралельно функціонуючими елементами різних типів. У даній статті ми розглянемо модель паралельної структури, елементами якої є дві системи масового обслуговування типу $M/G/\infty$ та $M/M/\infty$ з двовимірним вхідним потоком вимог Пуассона $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $b > 0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Нехай $G(t)$ функція розподілу часу обслуговування в першій системі, $\overline{G}(t) = 1 - G(t)$, $a = \left\{ \int\limits_0^{+\infty} t dG(t) \right\}^{-1}$, $\mu > 0$ параметр показникового розподілу часу обслуговування відповідно у другій систем, $G^*(s)$ та $\overline{G^*(s)}$- перетворення Лапласа функцій $G(t)$, $\overline{G}(t)$. Позначимо також через $X_1(t)$ число вимог, які обслуговуються в першій системі $M/G/\infty$ в момент часу t, а через $X_2(t)$- число вимог у другій системі $M/M/\infty$ в момент часу t. Кожна вимога обслуговується тільки на одній системі обслуговування.

Однією з ключових проблем, яка розв'язується в рамках теорії масового обслуговування, є дослідження стаціонарних характеристик моделі. Очевидно, що найбільш повним успіхом на цьому шляху є випадки, коли вдається знайти стаціонарний розподіл процесу обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$. В зв'язку з цим має місце наступна теорема.

Теорема 1. Процес обслуговування $(X_1(t), X_2(t))$ в моделі $(M/G-M/\infty)^2$ з паралельною структурою та двовимірним пуассонівським потоком вимог $(\nu_1(t), \nu_2(t))$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\varphi(z_1, z_2) = M z_1^{X_1} z_2^{X_2} =$$
$$= \exp\left\{ -\left(\frac{\lambda_1}{a} + b\left(\frac{1}{a} - \overline{G}^*(\mu) \right) \right)(1 - z_1) - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{\lambda_2}{\mu} + bG^*(\mu) \right)(1 - z_2) - -b\overline{G}^*(\mu)(1 - z_1 z_2) \right\}.$$

Доведення. В даній статті ми запропонуємо підхід, який базується на конструктивному представленні стохастичного процесу $(X_1(t), X_2(t))$ через суми індикаторних випадкових величин на вхідних пуассонівських потоках, кожна з яких буде описувати процес обслуговування окремо розглянутої вимоги. Введемо до розгляду три сімейства незалежних двовимірних випадкових величин з наступними розподілами . Двовимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1,0)$ з ймовірністю $1 - G(t) = \overline{G}(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(0,1)$ з ймовірністю $e^{-\mu t}$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $1 - e^{-\mu t}$. В свою чергу випадкова величина $\chi_k^3(t)$ приймає значення $(1,1)$ з ймовірністю $e^{-\mu t}\overline{G}(t)$, значення $(1,0)$ з ймовірністю $(1 - e^{\mu t})\overline{G}(t)$, значення $(0,1)$ з ймовірністю $e^{-\mu t}G(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $(1 - e^{-\mu t})G(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для двовимірного процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$(X_1(t), X_2(t)) = \sum_{k=1}^{m_1} \chi_k^1(t) + \sum_{k=1}^{m_2} \chi_k^2(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{y_1(t)} \chi_k^1(t - t_k^1) + \sum_{k=1}^{y_2(t)} \chi_k^2(t - t_k^2) + \sum_{k=1}^{y_3(t)} \chi_k^3(t - t_k^3),$$

де $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ є незалежними пуассонівськими потоками з параметрами λ_1, λ_2, b відповідно і такими що,

$\nu_1(t) = y_1(t) + y_3(t)$, $\nu_2(t) = y_2(t) + y_3(t)$, $t_k^i, i = 1,2,3; k = 1,2,...$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t), i = 1,2,3.$ У подальшому, не обмежуючи загальності, вважаємо $m_i = 0, i = 1,2$. Введемо до розгляду двовимірну генератрису величини

$(X_1(t), X_2(t)) : \varphi(z_1, z_2, t) = Mz_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)}$.
Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M\left\{M\left\{z_1^{X_1(t)} z_1^{X_2(t)} / t_1^i, \dots, t_{y_i(t)}^i, i = 1,2,3\right\}\right\} =$$

$$= M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}\left(G\left(t - t_k^1\right) + z_1\overline{G}\left(t - t_k^1\right)\right)\times\right.$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_2(t)}\left(\left(1 - e^{-\mu\left(t - t_k^2\right)}\right) + z_2 e^{-\mu\left(t - t_k^2\right)}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_3(t)}\left\{\left(1 - e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)}\right)G\left(t - t_k^3\right) + z_1\overline{G}\left(t - t_k^3\right)\times\right.$$

$$\times\left(1 - e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)}\right) + z_2 e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)} G\left(t - t_k^3\right) +$$

$$\left.\left.+ z_1 z_2 e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)}\overline{G}\left(t - t_k^3\right)\right\}\right\}.$$

Для знаходження генератриси з останнього виразу знову скористаємося умовним математичним сподіванням стосовно величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$. Тоді можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}\left(G\left(t - t_k^1\right) + z_1\overline{G}\left(t - t_k^1\right)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_2(t)}\left(\left(1 - e^{-\mu t}\right) + z_2 e^{-\mu\left(t - t_k^2\right)}\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_3(t)}\left\{\left(1 - e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)}\right)G\left(t - t_k^3\right) + z_1\overline{G}\left(t - t_k^3\right)\times\right.$$

$$\times\left(1 - e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)}\right) + z_2 e^{-\mu_2\left(t - t_k^3\right)} G\left(t - t_k^3\right) +$$

$$\left.\left.\left.+ z_1 z_2 e^{-\mu\left(t - t_k^3\right)}\overline{G}\left(t - t_k^3\right) / y_i(t), i = 1,2,3\right\}\right\}\right\}.$$

Підрахуємо умовне математичне сподівання в останньому виразі. Тоді ми отримаємо:
$\varphi(z_1, z_2, t) = M\{A_1(z_1, t)\}^{y_1(t)} M\{A_2(z_2, t)\}^{y_2(t)} \times$
$\times M\{A_3(z_1, z_2, t)\}^{y_3(t)}$, де вирази $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$, $A_3(z_1, z_2, t)$ мають наступний вигляд:

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(G(t - u) + z_1\overline{G}(t - u)\right)du;$$

$$A_2(z_2, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1 - e^{-\mu(t-u)} + z_2 e^{-\mu(t-u)}\right)du;$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1 - \overline{G}(t - u)\left(1 - e^{-\mu(t-u)}\right)(1 - z_1) -\right.$$

$$\left.- e^{-\mu(t-u)} G(t - u)(1 - z_2) - e^{-\mu(t-u)}\overline{G}(t - u)(1 - z_1 z_2)\right)du.$$

В останніх виразах для $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0,1]$ розподілу.

Остаточно, генератриси $A_1(z_1, t), A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ будуть мати наступний вигляд :

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1 - \overline{G}(t - u)(1 - z_1)\right)du;$$

$$A_2(z_2, t) = 1 - \frac{1}{\mu t}\left(1 - e^{-\mu t}\right)(1 - z_2);$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1 - \overline{G}(t - u)\left(1 - e^{-\mu(t-u)}\right)\right)du(1 - z_1) -$$

$$- \frac{1}{t}\int_0^t e^{-\mu(t-u)}\overline{G}(t - u)du(1 - z_1 z_2)$$

Підставивши генератриси $A_1(z_1, t), A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ в генератриси величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$, отримаємо явний вираз генератриси $\varphi(z_1, z_2, t)$: $\phi(z_1, z_2, t) =$

$$= \exp\left\{-\left(\lambda_1\int_0^t\overline{G}(u)du + b\int_0^t\overline{G}(u)\left(1 - e^{-\mu u}\right)du\right)\times\right.$$

$$\times(1 - z_1) - \left(\frac{\lambda_2}{\mu}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) + b\int_0^t e^{-\mu u} G(u)du\right)(1 - z_2) -$$

$$\left.- b\int_0^t e^{-\mu u}\overline{G}(u)du(1 - z_1 z_2)\right\}.$$

Перейшовши в останньому виразі до границі при $t \to \infty$, ми отримаємо:

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(z_1, z_2, t) = \varphi(z_1, z_2) =$$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{\lambda_1}{a} + b\left(\frac{1}{a} - \overline{G}^*(\mu)\right)\right)(1 - z_1) -\right.$$

$$\left.- \left(\frac{\lambda_2}{\mu} + bG^*(\mu)\right)(1 - z_2) - b\overline{G}(\mu)(1 - z_1 z_2)\right\}.$$

Теорема доведена.

З результату, який ми одержали, можна зробити ряд цікавих висновків та наслідків.

Перш за все слід відзначити, що граничний розподіл процесу обслуговування в нашій моделі є двовимірним пуасонівським з параметрами $a_1 = \frac{\lambda_1}{a} + b\left(\frac{1}{a} - \overline{G}^*(\mu)\right)$, $a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} + bG^*(\mu)$ та $a_3 = b\overline{G}(\mu)$.

Крім того, структура двовимірного процесу обслуговування налічує п'ять незалежних пуассонівських компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі одновимірний розподіл процесу обслуговування має наступну будову: $X_1 = x_1 + x_2 + x^*$, $X_2 = x_3 + x_4 + x^*$, де $x_i, i = 1{,}4$ та x^* незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами:

$\frac{\lambda_1}{a}$ для x_1, $b\left(\frac{1}{a} - \overline{G}^*(\mu)\right)$ для x_2, $\frac{\lambda_2}{\mu}$ для x_3, $b\left(\frac{1}{\mu} - \overline{G}^*(\mu)\right)$ для x_4 та $b\overline{G}^*(\mu)$ для x^*.

Таким чином, в структурі процесу обслуговування з'являється дві додаткові незалежні компоненти x_2 та x_4. З цього можна зробити висновок, що наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог. Компоненти x_2 та x_4 описують в побудові процесу обслуговування ті вимоги, які прийшли в парі з потоку $y_3(t)$, але залишилися в нашій моделі на обслуговуванні по одній зі своєї пари. Оскільки інша вимога з пари вже отримала обслуговування і вийшла з системи, пара розпалася, а значить і залежність між компонентами X_1 та X_2 зменшилась на величину залежності, яку вносила до процесу обслуговування дана пара вимог.

Отже, враховуючи той факт, що параметр розподілу Пуассона є одночасно значенням математичного сподівання і дисперсії випадкової величина, яка має цей розподіл, можемо зробити наступні висновки: 1) математичне сподівання та дисперсія загального числа пар вимог, які «розпалися» в результаті обслуговування, дорівнює $b\left(\frac{1}{a} - \overline{G}^*(\mu)\right) + b\left(\frac{1}{\mu} - \overline{G}^*(\mu)\right)$.

2) математичне сподівання та дисперсія повних пар вимог, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, дорівнює $b\overline{G}^*(\mu)$.

Також можна знайти вираз коефіцієнта кореляції між компонентами процесу обслуговування вимог у нашій моделі:

$$r(X_{1,}X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{DX_1 DX_2}} = \sqrt{a\mu}\,\frac{b\overline{G}^*(\mu)}{\sqrt{(\lambda_1 + b)(\lambda_2 + b)}}.$$

2. Асимптотична нормальність стаціонарного розподілу процесу обслуговування .

В умовах зростання інтенсивностей вхідних потоків отримаємо теорему про слабку збіжність відповідно центрованого та нормованого вектора (X_1, X_2) до двовимірного нормально розподіленого випадкового вектора (ξ_1, ξ_2).

Теорема 2. Нехай параметри вхідного пуассонівського потоку залежать від номера серії n наступним чином:

$\lambda_1^{(n)} = \lambda_1 n, \lambda_2^{(n)} = \lambda_2 n, b^{(n)} = bn$, $n \geq 1$.

Тоді має місце слабка збіжність вектора

$$\left(\xi_1^{(n)}, \varsigma_2^{(n)}\right) = n^{-1/2}\left(X_1^{(n)} - \alpha_1 n, X_2^{(n)} - \alpha_2 n\right) \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} (\xi_1, \xi_2)$$

При цьому вектор (ξ_1, ξ_2) має нормальний розподіл з нульовим вектором середніх значень і матрицею коваріацій

$$C = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & a_3 \\ a_3 & \alpha_2 \end{Vmatrix}, \alpha_1 = (\lambda_1 + b)/a ,. \alpha_1 = (\lambda_1 + b)/\mu$$

Список використаних джерел

1. Grifiths R.S. A class of bivariate Poisson process,/ Grifiths R.S.,Milne R.K. // *Journal Multivar. Anul*. Issue 8, - 3 – 1978 - P.380-396.
2. Анисимов В.В. Стохастические сети обслуживания,)/ Анисимов В.В., Лебедев Е.А.// Лыбидь. – 1992. - 105 с.

References

1. GRIFITHS R.S and MINE R.K (1978). A class of bivariate Poisson process. *Journal Multivar. Anul*. Issue 8, - 3 – P.380-396.
2. ANISIMOV V.V. and LEBEDEV E.A. (1992) Stochastic service networks. *Lybid.*

Надійшла до редакції 1.02.2016