УДК 519.21

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.
Протопоп Ю.О., аспірант

Аналіз стаціонарного режиму для керованої двоканальної системи з повторними викликами

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.
Iu.O. Protopop, graduate student

Stationary regime analysis for controlled two-channel system with repeated calls

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar@unicyb.kiev.ua

У статті розглядається марковська модель двоканальної системи з повторними викликами та змінною інтенсивністю вхідного потоку без обмежень на кількість джерел повторних викликів, керованої пороговою стратегією. Для такої моделі з'ясовано умови існування стаціонарного режиму. Подальший аналіз базується на апроксимації вихідної системи системою з обмеженою кількістю повторних викликів, для якої знайдені явні формули для стаціонарних імовірностей. Отримано швидкість збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної систем.
Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

The paper is focused on in-depth study of the promising area of the stochastic systems theory related with scrutiny of queueing systems with repeated calls. We research Markov`s models of retrial systems and variable rate of input flow controlled by threshold strategy with no restriction on the capacity of the orbit. We defined stationary regime existence conditions and investigated probability characteristics of process for two-dimension Markov process with continuous time which we took as a main model of the specified system. In stationary regime for probability characteristics of the service process were found explicit formulas. Research methods which we used are based on the initial process approximation by the process with bounded state space. Results of the research allow us to evaluate convergence rates of stationary distribution of finite systems with repeated calls to stationary distribution of infinite systems. Method of probability flow equating is used for obtain explicit expressions for stationary system probabilities through the closed path which are defined in a special way. We considered model for two service devices, which are controlled by threshold strategies.
Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, convergense rate.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Теорія систем з повторними викликами є одним із важливих розділів теорії масового обслуговування. Такі системи розглянуті в монографіях [1], [2]. Математичні моделі систем з повторними викликами широко застосовуються на практиці (див., наприклад [3], [4]).

У даній роботі розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу $M_Q/M/2/N$ та $M_Q/M/2/\infty$, в яких інтенсивність вхідного потоку λ_j залежить від j - числа джерел повторних викликів. Час обслуговування вимоги має показниковий розподіл з параметром μ. Якщо прилади зайняті, вимога стає джерелом повторних викликів і знову повторює спробу отримати обслуговування через випадковий час, розподілений за показниковим законом з параметром ν. Процес керування роботою систем визначається на основі порогових стратегій, які реалізують наступний алгоритм управління процесом обслуговування: вважаємо $\lambda_j = \lambda_1$, якщо $j = 0,1,...,H$, і $\lambda_j = \lambda_2$, якщо $j = H+1,...$. H представляє собою поріг, при переході через який стрибком змінюється інтенсивність вхідного потоку. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дозволяє розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати двовимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0,1,2\} \times \{0,1,...\}$, де $Q_1(t)$ – число зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ – число джерел повторних викликів.

Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул розглядається скінченна модель $M_Q/M/2/N$, для якої стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(N)} = \lim_{t\to\infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j)$ завжди існує.

При виконанні умови $\lambda/2\mu < 1$, де $\lambda = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_j < \infty$ і $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні стаціонарні ймовірності π_{ij} для системи $M_Q/M/2/\infty$.

Відмітимо (див. [1]), що завжди виконується нерівність $\pi_{ij} \le \pi_{ij}^{(N)}$.

В роботі оцінюється швидкість збіжності стаціонарного розподілу $\pi_{ij}^{(N)}$ системи $M_Q/M/2/N$ до відповідного розподілу π_{ij} системи $M_Q/M/2/\infty$ з повторними викликами.

Не порушуючи загальності покладемо $\mu = 1$. Позначимо

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \dfrac{1+\rho_k + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu]}, & i < j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

де $\rho_k = \dfrac{\lambda_k}{2\mu} = \dfrac{\lambda_k}{2}$ - завантаження системи первинними викликами, коли черга $Q_2(t) = k$.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,...,N$, то стаціонарні ймовірності для системи $M_Q/M/2/N$ мають вигляд

$$\pi_{0j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j} A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j}(\lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{2j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu) A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!},$$

$$j = 0,...,N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}(N\nu + \lambda_N)}{\mu},$$

$$\pi_{2N}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu}{2}, \quad \text{де}$$

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{ 1 + \lambda_N + N\nu + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_j + j\nu) A_j(N)}{j!} + \right.$$
$$\left. + N! \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}(1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu) A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!} + \frac{1}{2}\left((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\right) \right\}^{-1}.$$

Теорема 2. Нехай для $M_Q/M/2/\infty$ - системи виконується умова $\lambda = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_j / 2 < 1$. Тоді стаціонарні ймовірності будуть мати вид

$$\pi_{0j} = \frac{R_j}{j!\nu^j}, \qquad \pi_{1j} = \frac{(\lambda_j + j\nu) R_j}{j!\nu^j},$$

$$\pi_{2j} = \frac{(1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu) R_j}{\lambda_j j!\nu^j} \frac{\rho_j[(\lambda_j + j\nu)^2 + j\nu]}{1+\rho_j + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu},$$

де

$$R_j = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu) A_i(j)}{i!\nu^i} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{i!\nu^i A_j(i)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i A_j(i+1)} \right\}^{-1}.$$

Теореми 1, 2 є наслідком результатів роботи [5].

Тепер розглянемо швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи $M_Q/M/2/N$ до відповідного розподілу системи $M_Q/M/2/\infty$ при умові, що він існує.

Оскільки

$$\left|\pi_{0j} - \pi_{0j}^{(N)}\right| = \frac{1}{j!\nu^j} \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_j(N) \right|, \quad (1)$$

$$\left|\pi_{1j} - \pi_{1j}^{(N)}\right| = \frac{\lambda_j + j\nu}{j!\nu^j} \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_j(N) \right|, \quad (2)$$

$$\left|\pi_{2j} - \pi_{2j}^{(N)}\right| = \frac{1+\lambda_{j+1} + (j+1)\nu}{\lambda_j j!\nu^j} \left| R_j - \pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_{j+1}(N) \right|, (3)$$

то нам потрібно оцінити швидкість збіжності $\pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_j(N)$ до R_j.

Позначимо

$$B_j = \sum_{i=0}^{j} \frac{(1+\lambda_i + i\nu) A_i(j)}{i!\nu^i} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(1+\lambda_{i+1} + (i+1)\nu) A_{i+1}(j)}{\lambda_i \ i!\nu^i}.$$

$$\Theta_j = B_j + \sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i A_j(i)} + \sum_{i=j}^{\infty}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i A_j(i+1)}.$$

Скористаємось наступною лемою

Лема 1. Нехай $\mu=1$, $\overline{\lim_{j\to\infty}}\lambda_j/2<1$. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|(N-2)!\nu^N A_j(N)=\frac{\nu^2}{2\Theta_j^2}. \quad (4)$$

Доведення.

$$\lim_{N\to\infty}\Theta_j\cdot\left\{B_j+\sum_{i=j+1}^{N}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{A_j(i)\nu^i\ \ i!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=j}^{N-1}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{A_j(i+1)\nu^i\lambda_i\ \ i!}+\frac{1}{2}\frac{\left((\lambda_N+N\nu)^2+N\nu\right)}{N!\nu^N A_j(N)}\right\}=\Theta_j^2.$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(\lambda_N+N\nu)^2+N\nu}{N!\nu^N A_j(N)}\cdot(N-2)\ \ !\nu^N A_j(N)=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\frac{(\lambda_N+N\nu)^2+N\nu}{N(N-1)}=\nu^2.$$

При $N\to\infty$ маємо

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i A_j(i)}=$$

$$=(N-2)!\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^{i-N}}\prod_{k=N}^{i-1}\frac{\rho_k[(\lambda_k+k\nu)^2+k\nu]}{1+\rho_k+\lambda_{k+1}+(k+1)\nu}\le$$

$$\le(N-2)!\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^{i-N}}\prod_{k=N}^{i-1}\widehat{\rho}k\nu=$$

$$=(N-2)!\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{(1+\lambda_i+i\nu)N(N+1)\cdot\ldots(i-1)}{i!}\widehat{\rho}^{i-N}=$$

$$=\frac{1}{(N-1)\widehat{\rho}^N}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{i}\widehat{\rho}^i\le$$

$$\le\frac{2\nu}{(N-1)\widehat{\rho}^N}\sum_{i=N+1}^{\infty}\widehat{\rho}^i=\frac{2\nu\widehat{\rho}^{N+1}}{(N-1)\widehat{\rho}^N(1-\widehat{\rho})}=\frac{2\nu\widehat{\rho}}{(N-1)(1-\widehat{\rho})}\to 0.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i A_j(i+1)}=0.$$

Тепер отримаємо

$$\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|\cdot(N-2)!\nu^N A_j(N)\to\frac{\nu^2}{2\Theta_j^2}.$$

Лему доведено.

Введемо деякі позначення. Нехай N_0 вибрано так, що $\sup_{j>N_0}\lambda=q_0<1$, а $1<\gamma_0<1/q_0$. Покладемо

$$I(\nu)=\inf\left\{i>0:\frac{(3+(i+1)\nu)[4+5i\nu+(i\nu)^2](2+(i+1)\nu)}{\nu^4 i^4}\le\gamma_0\right\},$$

$$D_j(N)=B_j+\sum_{i=j+1}^{N}\frac{1+\lambda_i+i\nu}{A_j(i)\nu^i i!}\left(1+\frac{i\nu}{\lambda_{i-1}}\right).$$

Теорема 3. Нехай у системі з повторними викликами типу $M_Q/M/2/\infty$ виконуються умови леми 1. Тоді для будь-якого j

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|=\frac{1}{2j!\nu^{j-2}\Theta_j^2}, \quad (5)$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|=\frac{\lambda_j+j\nu}{2j!\nu^{j-2}\Theta_j^2}, \quad (6)$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_{j+1}(N)\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|=\frac{1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{2\lambda_j j!\nu^{j-2}\Theta_j^2}. \quad (7)$$

і для кожного фіксованого j та всіх $N\ge\max\{N_0,I(\nu),j\}+1$ справедливі оцінки

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{R_j}{\nu^j j!D_j(N_0)}\frac{(2+N\nu)^2+N\nu}{2N^2}\left[1+\frac{2+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right],$$

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{R_j(\lambda_j+j\nu)}{\nu^j j!D_j(N_0)}\frac{(2+N\nu)^2+N\nu}{2N^2}\times$$

$$\times\left[1+\frac{2+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right],$$

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{(1+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)}{\nu^j\lambda_j j!}\cdot\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu]}{1+\rho_j+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}\times$$

$$\times\frac{R_j}{D_j(N_0)}\frac{(2+N\nu)^2+N\nu}{2N^2}\left[1+\frac{2+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right].$$

Доведення. Формула (5) випливає з (1) та (4), формула (6) з (2) та (4), Формула (7) з (3) та (4). Для доведення отриманих оцінок позначимо

$$a_i=\frac{1+\lambda_i+i\nu}{A_j(i)\nu^i i!}\left(1+\frac{i\nu}{\lambda_{i-1}}\right).$$

Тоді для всіх $i\ge N_0+1$ маємо

$$\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{1+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\nu\ \ (i+1)(1+\lambda_i+i\nu}\frac{\rho_i[(\lambda_i+i\nu)^2+i\nu]}{1+\rho_i+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}\times$$

$$\times\frac{\lambda_i+(i+1)\nu}{\lambda_i}\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}+i\nu}\le$$

$$\le\frac{(3+(i+1)\nu)[4+5+i\nu+(i\nu)^2](2+(i+1)\nu)}{\nu^4 i^4}q_0.$$

Враховуючи визначення $I(\nu)$ з цієї формули маємо $\frac{a_{i+1}}{a_i} \le \gamma_0 q_0$, $i \ge I(\nu)$, звідки

$$a_i \le (\gamma_0 q_0)^{i-N} a_N \quad \text{для } i \ge \max[I(\nu), N_0] + 1.$$

З цієї оцінки випливає, що

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1+\lambda_i + i\nu}{A_j(i)\nu^i i!}\left(1+\frac{i\nu}{\lambda_{i-1}}\right) \le a_{N+1}\sum_{i=0}^{\infty}(\gamma_0 q_0)^i = \frac{a_{N+1}}{1-\gamma_0 q_0} =$$

$$= \frac{1+\lambda_{N+1}+(N+1)\nu}{A_j(N+1)\nu^{N+1}(N+1)!}\left(1+\frac{\nu(N+1)}{\lambda_N}\right)\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}.$$

З означення $A_j(N)$ маємо

$$A_j(N)\frac{1+\lambda_{N+1}+(N+1)\nu}{A_j(N+1)\nu N^3}\left(1+\frac{\nu(N+1)}{\lambda_N}\right) =$$

$$= \frac{\rho_N[(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu]}{1+\rho_N+\lambda_{N+1}+(N+1)\nu} \times$$

$$\times \frac{1+\lambda_{N+1}+(N+1)\nu}{\nu N^3}\frac{\lambda_N+\nu(N+1)}{\lambda_N} \le$$

$$\le \frac{[(2+N\nu)^2+N\nu](2+\nu(N+1))}{2\nu N^3}.$$

Тепер отримаємо

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|R_j - \pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_j(N)\right| \le$$

$$= \frac{R_j}{D_j(N)}\frac{(2+N\nu)^2+N\nu}{2N^2}\left[1+\frac{2+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right]$$

для $N \ge \max[I(\nu), N_0, j] + 1$.

З останньої оцінки та формул (5)-(7) випливає твердження теореми.

У статті отримано нові результати для класу двоканальних систем з повторними викликами і керованою інтенсивністю вхідного потоку, які розвивають теорію стохастичних систем з повторними викликами. Знайдено оцінку швидкості збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної системи, що може бути використане при побудові алгоритмів розрахунку стаціонарного розподілу.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I.* Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. *Artalejo J.R.* Steady state solution of a single server queue with linear repeated request / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // J. Applaid Probability. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. *Anisimov V.V.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.
5. *Лебєдєв Є.О.* Про системи з повторними викликами та керованим вхідним потоком / Є.О. Лебєдєв, І.Я. Усар // Доповіді національної академії наук України. – 2009. - №5. – С. 52-59.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer-Verlag.
3. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A (1997) *Steady state solution of a single server queue with linear repeated request.* J. Applaid Probability. Vol.34, pp. 223-233.
4. ANISIMOV, V.V., ARTALEJO, J.R., (2001) *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals.* Queuing Systems. Vol.39, pp. 157-182.
5. LEBEDEV, E.O., USAR, I.Y., (2009) *About of retrial queueing systems and controlled of input flow.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol.5, pp. 52-59.

Надійшла до редколегії 23.09.16