УДК 519.711.2

Башняков О.М., к.ф.-м.н., с.н.с.,
Пічкур В.В., д.ф.-м.н., доц.,
Поліщук О.А., к.т.н., м.н.с.

Метод адаптивної корекції кутових швидкостей твердого тіла за дискретними вимірами орієнтації

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д
e-mail: vpichkur@gmail.com

Oleksandr Bashniakov, Ph.D., senior scientist,
Volodymyr Pichkur, Ph.D., assistant professor,
Oleksandr Polishchuk, Ph.D., junior scientist

An adaptive method for angular velocity correction of a rotating solid body using discrete measurements of orientation

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03068, Kyiv, Glushkova ave., 4d
e-mail: vpichkur@gmail.com

Розглядається задача корекції кутових швидкостей твердого тіла за поточними вимірами орієнтації. Для цієї задачі розроблено адаптивний алгоритм ідентифікації параметрів за дискретними вимірами. При розробці методу використовуються підходи до оптимізаційних методів другого порядку, а також методи теорії чутливості. Проведено обчислювальний експеримент.
Ключові слова: адаптивна ідентифікація, матриця чутливості, тверде тіло, кутова швидкість, орієнтація.

In this paper we present an adaptive method of parametric identification based on discrete measurements. We used methods of the sensitivity theory and second order optimization methods while developing the described method. We also propose several modifications of the method. One modification of the method uses the regularization approach. It is useful when the sensitivity matrix is singular or ill-conditioned. In this modification we apply a small parameter experimentally taking into account the input data. Another modification of the method is based on the Newton-Raphson method, which improves the convergence speed. The main features of the proposed methods are good performance, convergence speed and approximation of incoming measurements. We apply these methods to solving the problem of angular velocity correction of a rotating solid body with respect to its orientation measurements. This problem has an important application in flight dynamics and in navigation. Computational results demonstrate the high precision of the proposed methods.
Keywords: adaptive identification, sensitivity matrix, solid body, angular velocity, orientation.

Статтю представив д.т.н., проф. Гаращенко Ф.Г.

1. Вступ

Ряд сучасних прикладних задач керування і навігації пов'язані з проблематикою дослідження, оптимізації і оцінки рухів твердого тіла [1,2]. До такої області належить задача корекції кутових швидкостей твердого тіла. Така проблема виникає в системах керування літальними апаратами і пов'язана з необхідністю уточнення даних про кутові швидкості в динаміці. Задачу такого класу доцільно розв'язувати з використанням адаптивних підходів [5]. Це пов'язано з цілим рядом особливостей: задача має розв'язуватись швидкими алгоритмами, бажано в масштабі реального часу або близько до цього; відсутня інформація про шуми, які призводять до втрати точної інформації; алгоритм має бути досить простий. Адаптивні методи продемонстрували свою ефективність для різних класів прикладних задач [3]. Важливою особливістю таких підходів є можливість використання числових методів оптимізації типу градієнтного спуску та їхніх неперервних модифікацій.

В роботі [4] запропоновано числовий метод ідентифікації параметрів системи керування на основі матриці чутливості. В основі цього методу лежать підходи, характерні для оптимізаційних методів другого порядку і в експерименті показує високу швидкість збіжності.

В даній роботі пропонується адаптивний метод параметричної ідентифікації за дискретними вимірами. Розроблений метод застосований до задачі адаптивної корекції кутових швидкостей твердого тіла на основі вимірів параметрів орієнтації в дискретні моменти часу. Проведений обчислювальний експеримент показує високу точність методу.

2. Метод адаптивної ідентифікації

Нехай задана динамічна система вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p, t), t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

Тут $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^*$ – вектор фазових координат, $p = (p_1, p_2, ..., p_m)^*$ – вектор параметрів, $f(x, p, t) = (f_1(x, p, t), f_2(x, p, t), ..., f_n(x, p, t))^*$ – вектор-функція правих частин системи (1), яка є неперервно диференційованою за змінними x, p і неперервною за змінною t на $R^n \times R^m \times [0, T]$, x_0 – вектор початкових умов з R^n. Позначимо $x(t, p)$ – розв'язок задачі Коші (1), (2). За теоремою про неперервну диференційованість розв'язків системи диференціальних рівнянь за параметрами, функція $x(t, p)$ є неперервно диференційованою за змінною p.

В моменти часу $0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_{N+1} = T$ ми одержуємо виміри $y^{(i)} = y(t_i)$ вектору фазових координат $x(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Інформація про похибку спостереження та про характер цієї похибки відсутня. Необхідно визначити значення параметра p, яке відповідає спостереженням $y^{(i)}$ в момент часу t_i.

Для розв'язання поставленої задачі будемо використовувати адаптивний підхід. Вважаємо, що на проміжках (t_k, t_{k+1}) параметр p приймає постійні значення, $k = 0, 1, ...N$. В моменти часу t, які відповідають різним інтервалам, значення параметра p можуть відрізнятись. Таким чином, проміжки (t_k, t_{k+1}) є проміжками квазістаціонарності. В моменти $t = t_i$ відома реалізація $x(t, p)$, яка відповідає значенню параметра $p = p^{(i-1)}$. На основі даної реалізації шукаємо таке значення параметра $p^{(i)}$, яке мінімізує критерій якості вигляду

$$I(p) = \left\| x(t_i, p) - y^{(i)} \right\|^2 \to \min_p. \quad (3)$$

Застосуємо підходи, які є характерними для методів оптимізації другого порядку, а також використаємо властивості матриці чутливості [4]. Збуримо параметр p в точці $p^{(i-1)}$ на величину h і запишемо розв'язок системи (1) з врахуванням лінійного наближення

$$x\left(t_i, p^{(i-1)} + h\right) = x(t_i, p) + U(t_i, p^{(i-1)})h + r_i(h). \quad (4)$$

Тут $U(t) = U(t, p^{(i-1)})$ – матриця чутливості системи (1), яка відповідає значенню на розв'язкові $x(t, p)$ при $p = p^{(i-1)}$, h належить R^m, $r_i(h)$ нескінченно мала вищих порядків малості по відношенню до h при $h \to 0$. Матриця чутливості задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dU(t)}{dt} = L(t, p)U(t) + g(t), t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (5)$$

$$U(t_i) = 0, \quad (6)$$

де $L(t, p) = \dfrac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial x}$,

$g(t, p) = \dfrac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial p}$, $p = p^{(i-1)}$. Позначимо $y^{(i)} - x(t_i, p^{(i-1)}) = \Delta x^{(i)}$. Відкидаючи в (4) функцію $r_i(h)$, підставимо лінійне наближення до $x\left(t_i, p^{(i-1)} + h\right)$ в функціонал (3). Одержуємо квадратичний функціонал вигляду

$$J(h) = \left\| x(t_i, p) + U(t_i)h - y^{(i)} \right\|^2 = \left\| U(t_i)h - \Delta x^{(i)} \right\|^2 =$$
$$= \left\| \Delta x^{(i)} \right\|^2 + \left\langle U^*(t_i)U(t_i)h, h \right\rangle - 2\left\langle U(t_i)h, \Delta x^{(i)} \right\rangle.$$

Шукаємо параметр $h = h^{(i)}$ з умови мінімуму $J(h)$. З $\dfrac{\partial J(h^{(i)})}{\partial h} = 0$ одержуємо для знаходження $h^{(i)}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$U^*(t_i)U(t_i)h = U^*(t_i)\Delta x^{(i)}. \quad (7)$$

Припустимо, що матриця $U^*(t_i)U(t_i)$ є невиродженою. Тоді

$$h^{(i)} = (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}. \quad (8)$$

Виходячи з (1), (2), (5), (6), (8), метод можна записати так

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = f(x, p^{(i)}, t),\\
&x(t_0) = x_0, x(t_i) = x\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1, ...N,\\
&\frac{dU(t)}{dt} = L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}),\\
&U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}],\\
&p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)},
\end{aligned} \quad (9)$$

$p^{(0)} = p_0$, де $i = 0,1,...N$. Опис алгоритму буде таким:

Крок 1. Вибираємо початкове наближення p_0. На проміжку $[0,t_1]$ розв'язуємо задачу (1), (2) при $p = p_0$. Підставляємо розв'язок в (5), (6), знаходимо матрицю чутливості $U(t_1)$. Знаходимо

$$p^{(1)} = p_0 + (U^*(t_1)U(t_1))^{-1}U^*(t_1)\Delta x^{(1)}.$$

Крок 2. На i-му кроці, $i = 1,...N$ на проміжку $[t_i, t_{i+1}]$ розв'язуємо задачу (1), (2) при $p = p^{(i)}$. Знаходимо матрицю чутливості $U(t_1)$ як розв'язок задачі (5), (6) при $p = p^{(i)}$. Визначаємо

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}.$$

Якщо матриця $U^*(t_i)U(t_i)$ в (7) вироджена, або близька до виродженої, то можна застосувати регуляризацію методу (9). Для цього вводиться параметр регуляризації $\varepsilon > 0$, для якого одержуємо

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = f(x, p^{(i)}, t),\\
x(t_0) = x_0, x(t_i) = x\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1,...N,\\
\frac{dU(t)}{dt} = L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}),\\
U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}],\\
p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)},
\end{gathered} \tag{10}$$

$p^{(0)} = p_0$, де $i = 0,1,...N$, I – $m \times m$-одинична матриця. Більш ефективну модифікацію методу (9) можна одержати, використовуючи ідеї методу Ньютона - Рафсона. Для цього позначимо $p(i,s) = p^{(i)} + s\left((U^*(t_i)U(t_i) + \varepsilon I)^{-1}U^*(t_i)\Delta x^{(i)}\right)$, де $s > 0$ – параметр. Одержимо такий метод

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt} = f(x, p^{(i)}, t),\\
x(t_0) = x_0, x(t_i) = x\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1,...N,\\
\frac{dU(t)}{dt} = L(t, p^{(i)})U(t) + g(t, p^{(i)}),\\
U(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}],\\
\min_{s\in[0,1]} I\left(p(i,s)\right) = I\left(p(i,s(i))\right),\\
p^{(i+1)} = p(i,s(i)), p^{(0)} = p_0,\ i = 0,1,...N.
\end{gathered} \tag{11}$$

3. Метод корекції кутових швидкостей

Введемо такі позначення: $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – вектор кватерніонів, $\|\Lambda\| = 1$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор кутових швидкостей. В моменти часу $0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < ... < t_{N+1} = T$ відомі виміри $y^{(i)} = \Lambda(t_i)$ вектора кватерніонів. Задача полягає в тому, щоб на відрізку $[t_i, t_{i+1}]$ здійснити корекцію кутових швидкостей так, щоб вони адекватно відповідали поточній орієнтації твердого тіла.

Для поставленої задачі застосуємо метод (9). Позначимо матрицю чутливості $U(t) = (u_{ij}(t))$, $u_{ij} = \dfrac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}$, де $i = 0,1,2,3$, $j = 1,2,3$. Використаємо кінематичні рівняння, які описують орієнтацію твердого тіла [2]. Тоді метод буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
2\frac{d\lambda_0}{dt} &= -(\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_1 - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_2 - \\
&\quad - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_3,\\
2\frac{d\lambda_1}{dt} &= (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_2 - \\
&\quad - (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_3,\\
2\frac{d\lambda_2}{dt} &= (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_0 - (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_1 + \\
&\quad + (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_3,\\
2\frac{d\lambda_3}{dt} &= (\omega_3(t) + p_3^{(i+1)})\lambda_0 + (\omega_2(t) + p_2^{(i+1)})\lambda_1 - \\
&\quad - (\omega_1(t) + p_1^{(i+1)})\lambda_2,
\end{aligned}$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \Lambda(0) = \Lambda_0, \Lambda(t_i) = \Lambda\left(t_i, p^{(i-1)}\right), i = 1,...N,$$

$$\begin{aligned}
2\frac{du_{0j}}{dt} &= -(\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{1j} - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{2j} - \\
&\quad - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{3j} + f_{0j}(t),\\
2\frac{du_{1j}}{dt} &= (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{0j} + (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{2j} - \\
&\quad - (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{3j} + f_{1j}(t),\\
2\frac{du_{2j}}{dt} &= (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{0j} - (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{1j} + \\
&\quad + (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{3j} + f_{2j}(t),\\
2\frac{du_{3j}}{dt} &= (\omega_3(t) + p_3^{(i)})u_{0j} + (\omega_2(t) + p_2^{(i)})u_{1j} - \\
&\quad - (\omega_1(t) + p_1^{(i)})u_{2j} + f_{3j}(t),
\end{aligned}$$

$$j = 1,2,3, t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} + (U^*(t_i)U(t_i))^{-1}U^*(t_i)\Delta\Lambda^{(i)},$$
$$p^{(0)} = p_0.$$

Тут

$$f_{01}(t) = -\lambda_1(t),\ f_{02}(t) = -\lambda_2(t),\ f_{02}(t) = -\lambda_3(t),$$
$$f_{11}(t) = \lambda_0(t),\ f_{12}(t) = -\lambda_3(t),\ f_{13}(t) = \lambda_2(t),$$
$$f_{21}(t) = \lambda_3(t),\ f_{22}(t) = \lambda_0(t),\ f_{23}(t) = -\lambda_1(t),$$
$$f_{31}(t) = -\lambda_2(t),\ f_{32}(t) = \lambda_1(t),\ f_{33}(t) = \lambda_0(t),$$
$$p^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, p_3^{(i)})^*, \quad \Delta\Lambda^{(i)} = y^{(i)} - \Lambda(t_i, p^{(i)}),$$

Λ_0 – відома початкова орієнтація.

3. Обчислювальний експеримент

Для тестування алгоритму створена програма. Вхідними даними є:

1. Кути Крилова, до яких потрібно наблизитися системі (так звані "еталонні", або "ідеальні", які отримуються з системи контрольних вимірів);
2. Точність (у даному випадку - покоординатна), з якою необхідно наблизитися до "ідеальних" кутів Крилова;
3. Початкові значення кутів Крилова.

Початкові кути Крилова були переведені в кватерніони, а отримані в результаті роботи алгоритму кватерніони переводилися у кути Крилова для обчислення відхилення від заданих кутів. Результат обчислень записувався у файл у вигляді 4-вимірних векторів, де перша координата є час (умовний час від початку обчислень), решта координат - поточні кути Крилова. При цьому остання стрічка у файлі містила кути Крилова, які покоординатно відрізняються від "ідеальних", які задані у п.1, на величину, яка не перевищує задану у п.2.

Змінюючи початкові, "ідеальні" кути Крилова та точність обчислень можна оцінити ефективність алгоритму. Він полягає у адаптивному підборі параметрів системи так, щоб у найкоротший термін налаштуватися на "ідеальні" значення.

Розроблений алгоритм можна використати для налаштування системи у тому випадку, коли втрачається "ідеальний" сигнал (система функціонуватиме автономно), а потім, коли "ідеальний" сигнал відновиться, система буде автоматично скорегована, компенсуючи похибки, які могли виникнути як в процесі інтегрування самої системи, так і в результаті зашумлення даних з датчиків. Реалізація алгоритму передбачає додатковий підбір параметрів, таких як крок та метод інтегрування, а також частота надходження тестового сигналу.

Алгоритм протестований при різних вхідних даних. Нижче наведені результати роботи тестової програми при наступних початкових значеннях:

- поточні кути Крилова: (0.5; 0.7; 0.2)
- "ідеальні" кути Крилова: (0.01; 0.02; 0.01)
- допустиме по-координатне відхилення: до 0.01

Результати обчислень (перше число у стрічці - час, далі - кути Крилова):

0 0.394184 0.543856 0.124349
2.36 0.0102203 0.0202949 0.0100081

Таким чином за час 2.36 отримали кути Крилова з відхиленням від "ідеальних" з точністю до 0.01.

Список використаних джерел

1. Акуленко Л. Д. Возмущенные и управляемые вращения твердого тела/ Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д., Рачинская А. Л., Зинкевич Я. С. – Одесса: ОНУ, 2013. – 288 с.
2. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела/ Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. –М.: Наука, 1973. – 320 с.
3. Гаращенко Ф.Г., Адаптивный метод дистанционного обнаружения химических компонентов в растениях на основе градиентного похода/ Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т. // Мехатроника, автоматика, управление. – 2013. № 2. – С. 34 - 37.
4. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления/ Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. –М.: Наука, 1981. – 464 с.
5. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах/ Фрадков А.Л. – М.: Наука, 1990. – 296 с.

References

1. AKULENKO L., LESCHENKO D., RACHINSKAYA A. and ZINKEVICH Ya. (2013) Desturbed and controlled solid rotations.– Odessa: ONU.
2. BRANEC V. SHMIGLEVSKIY I. (1973) Quaternions in solid orientation. –Moskow: Nauka.
3. GARASHCHENKO F., MATVIENKO V. Adaptive method to remote detection of chemical components on the basis of gradient method// *Mechatronics, automation control.*
4. ROZENWASSER E., YUSUPOV R. (2000) Sensitivity of Automatic Control Systems. CRC Press. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.
5. FRADKOV A. (1990) Adaptive control of complex systems. –Moskow: Nauka.

Надійшла до редколегії 10.10.2016