УДК 519.21

Лівінська Г.В., к.ф.-м.н., асистент

Багатоканальні стохастичні мережі з неоднорідними вхідними потоками та обслуговуванням фазового типу

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: livinskaav@gmail.com

H.V. Livinska, PhD in Math., Assistant Professor.

On multi-channel stochastic networks with nonhomogeneous input flows and service times of phase type

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: livinskaav@gmail.com

Стаття присвячена дослідженню багатоканальної стохастичної мережі, на кожен вузол якої надходить автономний пуассонівський потік вимог, інтенсивність якого залежить від часу. Розглянуто два типа обслуговуваня у вузлах мережі: показникове та ерлангівське (фазового типу). Показано, що модель з обслуговуванням фазового типу може бути зведена до марковської моделі з показниково розподіленим часом обслуговування, але з більшою кількістю вузлів. Для процесу обслуговування таких мереж побудовано відповідні апроксимативні гауссівські процеси за умов функціонування у перевантаженому режимі.

Ключові слова: багатоканальна стохастична мережа, перевантажений режим, неоднорінний Пуассонівський потік, обслуговування фазового типу, гауссівська апроксимація.

This article is devoted to investigation of multi-channel non-stationary stochastic network under heavy traffic condition of operating. On each network node a non-homogeneous Poisson input flow arrives. There are infinite number of servers in each node. Two models with exponentially distributed and Erlang distributed service times are considered. It is shown that the model with Erlang service (means service times of phase type) can be reduced to the model with exponentially distributed service times and with larger number of nodes. Conditions of heavy traffic regime are formulated. Functional limit theorems for service processes in both cases are written. Limit Gaussian processes are constructed for the correspondent service processes under the heavy traffic conditions. Characteristics of the limit processes are written via the network parameters. It is shown that if at least in one network node the service times are not exponentially distributed, then limit process lose his Markov property.

Key Words: Multi-channel stochastic network, heavy traffic regime, non-homogeneous Poisson input flow, service times of phase type, Gaussian approximation

Статтю представив д.т.н., проф. Заславський В.А.

1. Опис моделі і формулювання основного результату

В статті ми будемо розглядати мережу масового обслуговування, що складається з "r" вузлів. Будемо вважати, що на кожен вузол мережі ззовні надходить автономний потік вимог. Так, на i-тий вузол мережі надходить неоднорідний пуассонівський потік $v_i(t)$ з ведучою функцією $\Lambda_i(t)$, $i=1,2,...r$. Випадкові процеси $v_i(t)$, $i=1,2,...r$, є незалежними у сукупності. Кожен вузол мережі функціонує як багатоканальна стохастична система. Час обслуговування в i - тому вузлі показниково розподілений з параметром μ_i, $i=1,2,...r$, $P=\left\|p_{ij}\right\|_1^r$ – матриця маршрутизації мережі. Таку модель будемо позначати символом $[\overrightarrow{M_t}\,|\,M\,|\,\infty]^r$.

Процесом обслуговування вимог в мережі типу $[\overrightarrow{M_t}\,|\,M\,|\,\infty]^r$ будемо називати r - вимірний процес $Q'(t)=(Q_1(t),...,Q_r(t))$, де $Q_i(t)$, $i=1,2,...r$ – кількість вимог в i - тому вузлі в момент часу t. Наша головна мета – вивчити асимптотичну поведінку процесу $Q(t)$, $t\geq 0$, в умовах критичного навантаження в мережі.

Режим критичного навантаження в такій мережі обумовлюється виконанням наступних умов:

Умова 1. Інтенсивності обслуговування у вузлах мережі залежать від "n" таким чином, що $\lim\limits_{n\to\infty} n\mu_i^{(n)}=\mu_i>0$, $i=1,2,...,r$.

Умова 2. Вхідні потоки залежать від "n" (номера серії) таким чином, що на будь-якому скінченному часовому проміжку $[0,T]$

$$n^{-1}\Lambda_i^{(n)}(nt)\underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}}\Lambda_i^{(0)}(t)\in C[0,T],\ i=1,2,...,r,$$

де $C[0,T]$ – простір неперервних функцій, заданих на $[0,T]$, символ $\overset{U}{\Rightarrow}$ означає збіжність у рівномірній топології.

Розглянемо два важливих для застосувань випадки, коли Умова 2 виконується. У зв'язку з цим тимчасово припустимо, що пуассонівський потік $v_i(t)$ регулярний: $\Lambda_i(t)=\int\limits_0^t\lambda_i(u)du$, де $\lambda_i(u)$ – миттєве значення параметра.

1) Якщо для регулярного потоку

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_i(t)=\lambda_i>0,$$

То Умова 2 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\lambda_i t$.

Це випливає з оцінки

$$\left|\frac{1}{t}\int_0^t\lambda_i(u)du-\lambda_i\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{t}\int_{\varepsilon t}^{t}\left|\lambda_i(u)-\lambda_i\right|du+\frac{1}{t}\int_0^{\varepsilon t}\left|\lambda_i(u)-\lambda_i\right|du\leq$$

$$\leq(1-\varepsilon)\delta(\varepsilon t)+(\lambda_i^*+\lambda_i)\varepsilon,$$

де $\varepsilon\in(0,1)$, $\sup\limits_{u\geq 0}\lambda_i(u)=\lambda_i^*$, $\delta(u)\to 0$ при $u\to\infty$.

2) Нехай тепер $\lambda_i(t)$ – періодична з періодом T_i функція:

$$\lambda_i(nT_i+t)=\lambda_i(t)\ \text{для}\ n=1,2,...\ \text{і}\ 0\leq t<T_i.$$

Тоді Умова 2 виконується для $\Lambda_i^{(0)}(t)=\left(\int\limits_0^{T_i}\lambda_i(u)du\right)t$ ([3]).

Разом Умови 1 та 2 означають, що $[\overrightarrow{M_t}\,|\,M\,|\,\infty]^r$ - мережа функціонує у перевантаженому режимі. У контексті цих умов розглянемо послідовність випадкових процесів

$$\xi^{(n)}(t)=n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt)-q^{(n)}(nt)),\quad t\geq 0,$$

де $q^{(n)\prime}(nt)=(q_1^{(n)}(nt),...,q_r^{(n)}(nt))$,

$$q_j^{(n)}(nt)=\sum_{i=1}^r\int_0^{nt}d\Lambda_i^{(n)}(u)p_j^{i(n)}(nt-u),\ j=1,...,r.$$

Для того щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\xi^{(n)}(t)$, $n\geq 1$, при $n\to\infty$, ми введемо два незалежні гауссівські процеси $\xi^{(i)\prime}(t)=(\xi_1^{(i)}(t),...,\xi_r^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Процес $\xi^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\xi^{(1)}(t)=0$ та кореляційними матрицями

$$R^{(1)}(t)=E\xi^{(1)}(t)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(t)E\xi^{(1)\prime}(t)=$$

$$=\int_0^t P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau),$$

$$R^{(1)}(s,t)=E\xi^{(1)}(s)\xi^{(1)\prime}(t)-E\xi^{(1)}(s)E\xi^{(1)\prime}(t)=$$

$$=R^{(1)}(s)P(t-s),\quad s<t,$$

де $\Lambda^{(0)\prime}(t)=(\Lambda_1^{(0)}(t),...,\Lambda_r^{(0)}(t))$,

$P(\tau)=\exp\{\Delta(\mu)(P-I)\tau\}$.

Для процесу $\xi^{(2)}(t)$: $E\xi^{(2)}(t)=0$,

$$R^{(2)}(t)=\int_0^t[\Delta[(d\Lambda^{(0)}(\tau))'P(t-\tau)]-$$

$$-P'(t-\tau)\Delta[d\Lambda^{(0)}(\tau)]P(t-\tau)],$$

$$R^{(2)}(s,t)=R^{(2)}(s)P(t-s),\qquad s<t.$$

Наступна теорема дає апроксимацію для процесу обслуговування при критичному навантаженні в мережі.

Теорема 1. *Нехай для* $[\overrightarrow{M}_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$*-мережі виконуються Умови 1, 2, і в початковий момент часу* $t=0$ *мережа порожня:* $Q^{(n)\prime}(0)=(0,...,0)$. *Тоді на будь-якому скінченному проміжку* $[0,T]$ *послідовність випадкових процесів* $\xi^{(n)}(t)$ *при* $n\to\infty$ *збігається в рівномірній топології до* $\xi^{(1)}(t)+\xi^{(2)}(t)$.

Враховуючи поняття збіжності в рівномірній топології та загальні умови для такої збіжності, доведення теореми 1 може бути поділене на два етапи:

1) доведення збіжності скінченновимірних розподілів;

2) доведення збіжності в рівномірній топології, а саме, необхідно показати, що

$$\lim_{h\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}P\{\sup_{|t_2-t_1|\le h}\left|\xi^{(n)}(t_2)-\xi^{(n)}(t_1)\right|>\varepsilon\}=0$$

для будь-якого $\varepsilon>0$.

Доведення цієї теореми наведено в [3].

2. Стохастичні моделі з обслуговуванням фазового типу $[\overrightarrow{M}_t\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$

У системах та мережах масового обслуговування типовою є ситуація, коли час обслуговування (трудоємкість) вимоги складається з деякої кількості експоненціальних фаз з однаковими параметрами. Тоді загальний час обслуговування вимоги системою (або вузлом мережі) має розподіл Ерланга.

Обслуговування вимог у $[\overrightarrow{M}_t\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$-мережі ($m'=(m^{(1)},m^{(2)},...,m^{(r)})$) відрізняється від обслуговування в мережах типу $[\overrightarrow{M}_t\,|\,M\,|\,\infty]^r$, очевидно, тільки тим, що показниковий розподіл часу обслуговування вимог замінюється на розподіл Ерланга. Це означає, що в i - тому вузлі час обслуговування вимоги має таку щільність розподілу:

$$f_i(t)=\begin{cases}\dfrac{\mu_i\left(\mu_i t\right)^{m^{(i)}-1}}{\left(m^{(i)}-1\right)!}e^{-\mu_i t}, & t\ge0\\ 0, & t<0\end{cases}\qquad(1)$$

для деяких натуральних $m^{(i)}$ та дійсних $\mu_i>0$.

Ерлангівський розподіл для різних значень параметра $m^{(i)}$ визначає цілий клас розподілів, що включає в себе при $m^{(i)}=1$ експоненціальний розподіл, а в якості граничного при $m^{(i)}\to\infty$ вироджений детермінований розподіл.

Окрім того, важливу роль відіграє гіперерлангівський розподіл, який представляє собою суміш ерлангівських розподілів з ваговими коефіцієнтами α_i $\alpha_i>0$, $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i=1$. Зауважимо, що гіперерлангівським розподілом можна з будь-яким ступенем точності наблизити (в розумінні слабкої збіжності функцій розподілу) будь-який розподіл.

Розподіл часу обслуговування типу (1) має наступну інтерпретацію. Якщо вимога надходить для обслуговування у i - тий вузол мережі, то процес її обслуговування розбивається на $m^{(i)}$ фаз (етапів) обслуговування, які вимога проходить послідовно одну за одною. На кожному етапі вона затримується на показниково розподілений час з параметром μ_i. При цьому часи проходження фаз незалежні між собою випадкові величини. Ерлангівський розподіл відноситься до розподілів фазового типу. Вимога, що поступила на i - тий вузол мережі, проходить послідовно всі $m^{(i)}$ фаз, починаючи з фази 1. Зрозуміло, що вимога не може займати одночасно дві чи більше фаз обслуговування.

Враховуючи роль ерлангівського розподілу в дослідженні стохастичних систем та мереж, розглянемо мережі типу $[\overrightarrow{M}_t\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$.

Для спрощення аналізу $[\overrightarrow{M}_t\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$ - мережі введемо для моделювання роботи i - того вузла $m^{(i)}$ «нових» вузлів, які є багатоканальними стохастичними системами марковського типу. Перенумеруємо всі ці вузли таким чином, що роботу i - того вузла будуть моделювати «нові» вузли з номерами

$$\sum_{j=1}^{i-1}m^{(j)}+1,\ \dots,\ \sum_{j=1}^{i}m^{(j)}.$$

При цьому зовнішні потоки вимог $v_1(t),...,v_r(t)$ будуть надходити тільки у вузли з номерами

$$N^{(i)} = \sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)} + 1,\ \ i=1,2,...,r,\ \text{де}\ m^{(0)}=0.$$

Позначимо через $\tilde{v}(t)$ $\tilde{r}$ - вимірний вектор, $\tilde{r}=\sum_{j=1}^{r} m^{(j)}$, $N^{(i)}$ - та компонента якого дорівнює $v_i(t)$, $i=1,2,...,r$, а інші – нулю.

Враховуючи зв'язки між «старими» вузлами мережі ($P=\left\|p_{ij}\right\|_{i,j=1}^{r}$) і алгоритм обслуговування за розподілом Ерланга, матриця маршрутизації $\tilde{P}=\left\|\tilde{p}_{ij}\right\|_{i,j=1}^{\tilde{r}}$ між $\tilde{r}$ «новими» вузлами буде мати блочну структуру і складатись з r^2 блоків $P^{(\alpha,\beta)}$, $\tilde{P}=\left\|P^{(\alpha,\beta)}\right\|_{\alpha,\beta=1}^{r}$.

Блок $P^{(i,i)}$ для $i=1,2,...,r$ має розмір $m^{(i)}\times m^{(i)}$ та представляє собою матрицю такого виду:

$$P^{(i,i)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ p_{ii} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Блок $P^{(i,j)}$ для $i,j=1,2,...,r,\ \ i\neq j$, є прямокутною матрицею розміру $m^{(i)}\times m^{(j)}$ такого виду:

$$P^{(i,j)}=\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ p_{ij} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Таким чином, роботу $[\overrightarrow{M_t}\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$ - мережі моделює мережа простішого виду $[\overrightarrow{M_t}\,|\,M\,|\,\infty]^{\tilde{r}}$, але з більшою кількістю вузлів. За побудовою, якщо $Q(t)=(Q_1(t),...,Q_r(t))'$ та $\tilde{Q}(t)=(\tilde{Q}_1(t),...,\tilde{Q}_{\tilde{r}}(t))'$, $t\ge 0$ – процеси обслуговування вимог у мережах $[\overrightarrow{M_t}\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$ та $[\overrightarrow{M_t}\,|\,M\,|\,\infty]^{\tilde{r}}$ відповідно, то можна записати:

$$Q_i(t)=\bar{1}^{(i)\prime}\tilde{Q}(t),\quad i=1,2,...,r,$$

де $\bar{1}^{(i)}$ – $\tilde{r}$ - вимірний вектор-стовпчик, у якого компоненти з номерами

$$\sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)}+1,\ \sum_{j=1}^{i-1} m^{(j)}+2,\dots,\ \sum_{j=1}^{i} m^{(j)}$$

дорівнюють одиниці, а інші – нулю.

Перевантажений режим у $[\overrightarrow{M_t}\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$ - мережі буде означати, що її параметри залежать від деякого «n» (номера серії), і виконуються Умова 2 з попереднього розділу та наступна умова.

Умова 1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\mu_i^{(n)}=\mu_i>0,$ а параметри $m^{(i)}$, $i=1,2,...,r$, від "n" не залежать.

Позначимо через $\tilde{\Lambda}^{(n)}(t)$ $\tilde{r}$ - вимірний вектор, компоненти якого з номерами $N^{(i)},\ i=1,2,...,r$, дорівнюють $\Lambda_i^{(n)}(t)$, а інші – нулю. Тоді, враховуючи Умову 2, аналогічно тому, як це було зроблено в Лемі 2 в [3], для процесу $\tilde{v}^{(n)}(nt)$ можна записати:

$$\tilde{W}^{(n)}(t)=n^{-1/2}\left(\tilde{v}^{(n)}(nt)-\tilde{\Lambda}^{(n)}(nt)\right)\underset{n\to\infty}{\overset{U}{\Rightarrow}}\tilde{W}^{(0)}(t),$$

де $\tilde{W}^{(0)}(t)$ – це $\tilde{r}$ - вимірний вектор, елементи якого з номерами $N^{(i)},\ i=1,2,...,r$, є незалежними вінерівськими процесами, з нульовим вектором математичних сподівань та $Var\tilde{W}_{N_i}^{(0)}(t)=\Lambda_i^{(0)}(t)$, а інші дорівнюють нулю.

Розглянемо тепер для $[\overrightarrow{M_t}\,|\,E_m\,|\,\infty]^r$ - мережі нормований процес обслуговування

$$\hat{\xi}^{(n)}(t)=n^{-1/2}(Q^{(n)}(nt)-\hat{q}^{(n)}(nt)),\quad t\ge 0,$$

де

$$\hat{q}^{(n)\prime}(t)=(\hat{q}_1^{(n)}(t),...,\hat{q}_r^{(n)}(t)),$$

$$\hat{q}_j^{(n)}(nt)=\bar{1}^{(j)\prime}\tilde{q}^{(n)}(nt),\qquad j=1,...,r,$$

$$\tilde{q}^{(n)\prime}(nt)=(\tilde{q}_1^{(n)}(nt),\tilde{q}_2^{(n)}(nt),...,\tilde{q}_{\tilde{r}}^{(n)}(nt)),$$

$$\hat{q}_j^{(n)}(nt)=\sum_{i=1}^{\tilde{r}}\int_0^{nt} d\tilde{\Lambda}_i^{(n)}(u)\,\tilde{p}_{ij}^{(n)}(nt-u),\ \ j=1,...,\tilde{r},$$

$$\tilde{P}^{(n)}(\tau)=\left\|\tilde{p}_{ij}^{(n)}(\tau)\right\|_1^{\tilde{r}}=exp\left\{\Delta(\tilde{\mu}^{(n)})(\tilde{P}-\tilde{I})\tau\right\},$$

$$\tilde{\mu}^{(n)}=(\underbrace{\mu_1^{(n)},...,\mu_1^{(n)}}_{m^{(1)}},\underbrace{\mu_2^{(n)},...,\mu_2^{(n)}}_{m^{(2)}},...,\underbrace{\mu_r^{(n)},...,\mu_r^{(n)}}_{m^{(r)}}),$$

$\tilde{P}$ – блочна матриця, що складається r^2 блоків виду (2), (3), $\tilde{I}$ – одинична матриця розміром $\tilde{r}\times\tilde{r}$.

Для того, щоб описати границю послідовності випадкових процесів $\hat{\xi}^{(n)}(t)$, $n\geq 1$, при $n\to\infty$, ми введемо аналогічно тому, як це було зроблено в передньому розділі, два незалежних гауссівських процеси $\tilde{\xi}^{(i)\prime}(t)=(\tilde{\xi}_1^{(i)}(t),...,\tilde{\xi}_{\tilde{r}}^{(i)}(t))$, $i=1,2$.

Процес $\tilde{\xi}^{(1)}(t)$ визначається середніми значеннями $E\tilde{\xi}^{(1)}(t)=0$

та кореляційними матрицями

$$\tilde{R}^{(1)}(t)=E\tilde{\xi}^{(1)}(t)\tilde{\xi}^{(1)\prime}(t)-E\tilde{\xi}^{(1)}(t)E\tilde{\xi}^{(1)\prime}(t)=$$

$$=\int_0^t\tilde{P}'(t-\tau)\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau),$$

$$\tilde{R}^{(1)}(s,t)=E\tilde{\xi}^{(1)}(s)\tilde{\xi}^{(1)\prime}(t)-E\tilde{\xi}^{(1)}(s)E\tilde{\xi}^{(1)\prime}(t)=$$

$$=\tilde{R}^{(1)}(s)\tilde{P}(t-s),\quad s<t,$$

де

$$\tilde{\Lambda}^{(0)\prime}(t)=(\underbrace{\Lambda_1^{(0)}(t),0,...,0}_{m^{(1)}},\underbrace{\Lambda_2^{(0)}(t),0,...,0}_{m^{(2)}},...,\underbrace{\Lambda_r^{(0)}(t),0,...,0}_{m^{(r)}}),$$

$$\tilde{P}(\tau)=\exp\{\Delta(\tilde{\mu})(\tilde{P}-\tilde{I})\tau\},$$

$$\tilde{\mu}=(\underbrace{\mu_1,...,\mu_1}_{m^{(1)}},\underbrace{\mu_2,...,\mu_2}_{m^{(2)}},...,\underbrace{\mu_r,...,\mu_r}_{m^{(r)}}).$$

Для процесу $\tilde{\xi}^{(2)}(t)$: $E\tilde{\xi}^{(2)}(t)=0$,

$$\tilde{R}^{(2)}(t)=\int_0^t[\Delta[(d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau))'\tilde{P}(t-\tau)]-$$

$$-\tilde{P}'(t-\tau)\Delta[d\tilde{\Lambda}^{(0)}(\tau)]\tilde{P}(t-\tau)],$$

$$\tilde{R}^{(2)}(s,t)=\tilde{R}^{(2)}(s)\tilde{P}(t-s),\quad s<t.$$

Наслідком теореми 1 є наступний результат.

Теорема 2. *Нехай для стохастичної мережі типу* $[\overrightarrow{M_t}\mid E_m\mid\infty]^r$ *виконуються Умови 1.2, 2, і в початковий момент часу мережа порожня:* $Q^{(n)}(0)=(0,...,0)'$. *Тоді на будь-якому скінченному проміжку* $[0,T]$ *послідовність випадкових процесів* $\hat{\xi}^{(n)}(t)$ *при* $n\to\infty$ *збігається в рівномірній топології до гауссівського процесу* $\hat{\xi}^{(1)}(t)+\hat{\xi}^{(2)}(t)$, *де*

$$\hat{\xi}^{(i)}(t)=(\hat{\xi}_1^{(i)}(t),...,\hat{\xi}_r^{(i)}(t)),$$

$$\hat{\xi}_j^{(i)}(t)=\overline{1}^{(j)\prime}\tilde{\xi}^{(i)}(t),\ j=1,2,...,r,\ i=1,2.$$

Зауважимо, що часто розглядаються також системи масового обслуговування з багатоетапним обслуговуванням, в яких вимога може почати обслуговування не з першого етапу. В цьому випадку треба вказати кількість вже відпрацьованих (або тих, що залишилися) етапів та ймовірності почати обслуговування в i - тому вузлі з k - того етапу. В цьому випадку час обслуговування можна задати за допомогою гіперерлангівського розподілу.

З теореми 2 можна зробити важливий висновок. У випадку розподілу часу обслуговування ерлангівського типу граничний гауссівський процес є сумою відповідних компонент марковського процесу, причому розмірність цього марковського процесу співпадає з сумарним числом фаз. Це також пояснює те, що коли час обслуговування хоча б в одному вузлі мережі не є показниковим, то граничний процес втрачає марковську властивість.

Список використаних джерел

1. Анисимов В.В. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели / Анисимов В.В., Лебедев Е.А.// Лыбидь. – 1992. –105 С.
2. Лебєдєв Є.О. Одна гранична теорема для стохастичних мереж та її застосування / Є.О. Лебєдєв // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2003. – Вип. 68. – С. 74-85.
3. Ливинская А.В. Предельная теорема для перегруженных многоканальных сетей / А.В. Ливинская, Е.А. Лебедев // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – №6. – С. 106-113.

References

1. ANISIMOV V.V. and LEBEDEV E.A. (1992) Stochastic service networks. Markov models. *Lybid.*
2. LEBEDEV E.O. (2003) A limit theorem for stochastic networks and its applications. *Theor. Probability and Math. Statist.*, No.68, 81-92.
3. LIVINSKAYA A.V. and LEBEDEV E.A. (2012) A Limit Theorem for Multi-channel Networks in Heavy Traffic. *Cybernetics and Systems Analysis*, No.6, 106-113.

Надійшла до редакції 17.10.2016