УДК 519.233.2+681.5

Олександр С. Слабоспицький,
к.ф.-м.н., доц.

Рекурентний алгоритм для оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшими відхиленнями від точок "тяжіння" для лінійних динамічних систем при некласичних припущеннях

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка, пр. Глушкова, 4д,
м. Київ, 03680, Україна,
e-mail: sl@univ.kiev.ua

Alexander S. Slabospitsky,
Ph.D. (Physics & Mathematics), Associate Professor

Recurrent algorithm for non-stationary parameter estimation by the least squares method with variable forgetting factor and least deviations from 'attraction' points for linear dynamic systems under non-classical assumptions

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
4d Glushkov av., Kyiv, 03680, Ukraine,
e-mail: sl@univ.kiev.ua

Розглядається задача оцінювання нестаціонарних параметрів для лінійної дискретної динамічної системи у випадку, коли в кожен момент для матриці параметрів відома її точка "тяжіння". Отримано рекурентний алгоритм для оцінки параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" при некласичних припущеннях. Також запропоновано рекурентну процедуру для відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Ключові слова: оцінювання нестаціонарних параметрів, оператор псевдообернення, лінійна дискретна динамічна система, метод найменших квадратів, змінний фактор забування, рекурентний алгоритм, зважена залишкова сума квадратів, точки "тяжіння".

The estimation problem of non-stationary parameters is considered for linear discrete dynamic system in the case when for parameter matrix its 'attraction' point is known at any moment. The recurrent algorithm is obtained for estimate of the parameters by the least squares method with variable forgetting factor and least deviation norm from 'attraction' points under non-classical assumptions. The recurrent procedure is suggested for corresponding weighted residual sum of squares too.

Keywords: non-stationary parameter estimation, pseudo-inverse operator, linear discrete dynamic system, least squares method, variable forgetting factor, recurrent algorithm, weighted residual sum of squares, 'attraction' points.

Статтю представив д. т. н., проф. Гаращенко Ф.Г.

Вступ. При розв'язанні задач побудови високоточних математичних моделей для різноманітних складних об'єктів виникає потреба у знаходженні оптимальних оцінок їх невідомих параметрів. Для пошуку останніх було розроблено ряд методів в залежності від об'єму доступної апріорної інформації про невизначеності системи [1, 2]. Один з підходів для розв'язання подібного роду проблем базується на методі найменших квадратів (МНК) [3].

У загальному випадку при використанні оцінки МНК, коли можуть порушуватися класичні припущення, що гарантують її єдиність, не обійтися без використання оператора псевдообернення за Муром-Пенроузом [4, 5]. Для даної ситуації у роботі [6] оцінку МНК з найменшою нормою для стаціонарних параметрів регресійної моделі було проаналізовано, а також отримано рекурентні представлення для цієї оцінки та відповідної залишкової суми квадратів. Останні результати було перенесено на випадок оцінювання нестаціонарних параметрів регресійної моделі за допомогою МНК зі змінним фактором забування у публікаціях [7, 8].

Припустимо, що додатково до попередніх припущень у кожен момент відомі точки "тяжіння" для невідомих параметрів системи. Тоді в якості єдиної оцінки МНК будемо брати оцінку з найменшою нормою відхилення від цих заданих точок "тяжіння" у кожен момент. Для останньої оцінки стаціонарних параметрів регресійної моделі та відповідної залишкової суми квадратів рекуренти були отримані у роботі [9]. Узагальнення на випадок оцінювання нестаціонарних параметрів регресійної моделі було здійснено у публікаціях [10, 11].

У даній роботі останні результати по оцінюванню нестаціонарних параметрів за допомогою МНК зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від заданих точок "тяжіння" у кожен момент часу поширюються на клас лінійних дискретних динамічних систем.

Оцінка параметрів лінійної динамічної системи. Розглянемо задачу оцінки матриці параметрів A лінійної дискретної динамічної системи

$$x(k+1) = Ax(k) + \xi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

де $x(k) = \left(x_1(k), x_2(k), \ \dots \ , x_n(k)\right)^T$ - доступний для спостереження вектор фазового стану, $\xi(k) = \left(\xi_1(k), \xi_2(k), \ \dots \ , \xi_n(k)\right)^T$ - вектор похибок моделі, $A = \left(a_1, \ a_2, \ \dots \ , \ a_n\right)^T$, $a_i \in \mathbb{R}^n, \ i = \overline{1,n}$.

Припустимо, що матриця A може повільно змінюватися з плином часом і для неї у кожен момент часу доступна інформація про її точку тяжіння

$$A_*(N) = \left(a_{1*}(N), \ \ a_{2*}(N), \ \ \dots \ , \ \ a_{n*}(N)\right)^T,$$
$$a_{i*}(N) \in \mathbb{R}^n, \ i = \overline{1,n}, \quad N = 0,1,2,\dots \ .$$

Оцінки матриці параметрів A у момент N методом найменших квадратів зі змінним фактором забування $\left\{\lambda(k)\right\}_{k=1}^{\infty}$, якщо можуть порушуватися класичні припущення, які гарантують її єдиність, визначаються як

$$Arg\min_A Q(A,N), \tag{2}$$

де

$$Q(A,N) = \sum_{k=1}^{N} w(k,N) \left\|\xi(k)\right\|^2, \tag{3}$$

$$w(k,N) = \begin{bmatrix} \prod_{i=k}^{N-1} \lambda(i), & якщо \quad k = \overline{1, N-1}, \\ 1, & якщо \quad k = N, \end{bmatrix}$$

$\lambda(i)$ - заданий змінний фактор забування $\left(\lambda(i) \in (0,1], \ i \in \mathbb{N}\right)$, $\|\bullet\|$ - евклідова норма.

В якості єдиної оцінки $\hat{A}(N)$ на множині усіх оцінок (2) візьмемо оцінку з найменшою нормою відхилення від точки "тяжіння" $A_*(N)$ у кожен момент N.

Для цього представимо систему рівнянь (1) у вигляді

$$\tilde{X}_{2,N+1}^T = A\tilde{X}_{1,N}^T + \tilde{\Xi}_N^T, \ N \in \mathbb{N},$$

де $$\tilde{X}_{1+i,N+i} = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1,N)x^T(1+i) \\ w^{\frac{1}{2}}(2,N)x^T(2+i) \\ \vdots \\ w^{\frac{1}{2}}(N,N)x^T(N+i) \end{pmatrix}, \ i = \overline{0,1},$$

$$\tilde{\Xi}_N = \begin{pmatrix} w^{\frac{1}{2}}(1,N)\xi^T(1) \\ w^{\frac{1}{2}}(2,N)\xi^T(2) \\ \vdots \\ w^{\frac{1}{2}}(N,N)\xi^T(N) \end{pmatrix}.$$

А так як

$$Arg\min_A Q(A,N) = Arg\min_A \left\|\tilde{\Xi}_N\right\|^2,$$

то згідно роботи [12] отримаємо явний вигляд шуканої оцінки

$$\hat{A}(N) = \left[\tilde{X}_{1,N}^{+}\tilde{X}_{2,N+1}\right]^T + A_*(N)\left[E_n - \tilde{X}_{1,N}^{+}\tilde{X}_{1,N}\right], \ N \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

де E_n - одинична матриця порядку n.

Конструювання рекурентних алгоритмів оцінювання. Перейдемо до побудови рекурентного представлення для оцінки $\hat{A}(N)$.

Теорема 1. Для оцінки (4) при некласичних припущеннях, які не гарантують її єдиність, методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $A_*(N)$ у кожен момент часу N для лінійної дискретної динамічної системи (1) рекурентний алгоритм має такий вигляд:

$$\hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N+1) + \left[A_*(N+1) - A_*(N)\right]P(N+1), \tag{5}$$

причому якщо $\delta(N+1) > 0,$ то

$$\begin{cases} R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)}\Big[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)\Big] + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N)\right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \tag{6}$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N) - \dfrac{1}{\gamma(N+1)}R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)\right\}, \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \tag{7}$$

з початковими умовами $\hat{A}(0) = A_*(0), \quad R(0) = \Theta_n, \quad P(0) = E_n$,
де $\gamma(N+1) = \lambda(N) + x^T(N+1)R(N)x(N+1), \quad \delta(N+1) = x^T(N+1)P(N)x(N+1)$, Θ_n – нульова квадратна матриця порядку n.

Доведення. Неважко впевнитися, що справедливо $Q(A,N) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(a_i, N),$ де

$$Q_i(a_i, N) = \sum_{k=1}^{N} w\big(k,N\big)\xi_i^2\big(k\big), \; i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Останнє дозволяє стверджувати, що задача пошуку оцінки $\hat{A}\big(N\big)$ для матриці A системи (1) з функціоналом якості (3) розщеплюється на n задач знаходження оцінок $\hat{a}_i\big(N\big)$ для a_i методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки "тяжіння" $a_{i*}\big(N\big)$ у кожен момент часу N для систем виду

$$x_i(k+1) = x^T(k)a_i + \xi_i(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

з функціоналами якості (8), $i = \overline{1,n}$.

У свою чергу згідно роботи [11] для оцінок $\hat{a}_i\big(N\big)$ справедливий такий рекурентний алгоритм

$$\hat{a}_i(N+1) = \hat{a}_i(N) + R(N+1)x(N+1)[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)] + P(N+1)\big[a_{i*}(N+1) - a_{i*}(N)\big], \tag{9}$$

з початковою умовою $\hat{a}_i(0) = a_{i*}(0), \; i = \overline{1,n}$,
причому якщо $\delta(N+1) > 0,$ то

$$\begin{cases} R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)}\Big[R(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N) + P(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)\Big] + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\gamma(N+1)}{\delta^2(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N)\right\}, \\ P(N+1) = P(N) - \dfrac{1}{\delta(N+1)}P(N)x(N+1)x^T(N+1)P(N), \end{cases} \tag{10}$$

а у протилежному випадку

$$\begin{cases} R(N+1) = \dfrac{1}{\lambda(N)}\left\{R(N) - \dfrac{1}{\gamma(N+1)}R(N)x(N+1)x^T(N+1)R(N)\right\}, \\ P(N+1) = P(N), \end{cases} \tag{11}$$

з початковими умовами $R(0) = \Theta_n, \quad P(0) = E_n$.

Співвідношення (9) дозволяють стверджувати, що справедливо таке

$$\hat{A}^T(N+1) = \hat{A}^T(N) + R(N+1)x(N+1)[x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]^T + P(N+1)\left[A_*(N+1) - A_*(N)\right]^T,$$

з початковою умовою $\hat{A}^T(0) = A_*^T(0)$.

Після транспонування останнього співвідношення для оцінки $\hat{A}(N)$ отримаємо:

$$\hat{A}(N+1) = \hat{A}(N) + [x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)]x^T(N+1)R(N+1) + \left[A_*(N+1) - A_*(N)\right]P(N+1), \quad (12)$$

з початковою умовою $\hat{A}(0) = A_*(0)$.

Об’єднання (12) з (10) та (11) дає шуканий рекурентний алгоритм. Доведення завершено.

Для контролю якості процесу оцінювання потрібно вміти також здійснювати рекурентний перерахунок відповідної зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$. Це дозволяє здійснити таке твердження.

Теорема 2. Для зваженої залишкової суми квадратів $q(N) = Q(\hat{A}(N), N)$ справедливо рекурентне представлення

$$q(N+1) = \begin{cases} \lambda(N)q(N), & \textit{якщо } \delta(N+1) > 0, \\ \lambda(N)\left\{q(N) + \dfrac{1}{\gamma(N+1)}\left\|x(N+2) - \hat{A}(N)x(N+1)\right\|^2\right\}, & \textit{у протилежному випадку}, \end{cases} \quad (13)$$

з початковою умовою $q(0) = 0$.

Доведення. Очевидно, що $q(N) = \sum_{i=1}^{n} q_i(N)$, де $q_i(N) = Q_i(\hat{a}_i(N), N)$, $i = \overline{1,n}$, $N = 0,1,2,\ldots$. Але згідно роботи [11] рекурентний алгоритм для $q_i(N)$ має вигляд

$$q_i(N+1) = \begin{cases} \lambda(N)q_i(N), & \textit{якщо } \delta(N+1) > 0, \\ \lambda(N)\left\{q_i(N) + \dfrac{1}{\gamma(N+1)}\left[x_i(N+2) - \hat{a}_i^T(N)x(N+1)\right]^2\right\}, & \textit{у протилежному випадку}, \end{cases}$$

з початковою умовою $q_i(0) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Тоді твердження теореми стає очевидним.

Висновок. В якості оцінки матриці параметрів A лінійної дискретної динамічної системи (1) при некласичних припущеннях пропонується використовувати оцінку (4) методу найменших квадратів зі змінним фактором забування та з найменшою нормою відхилення від заданої точки “тяжіння” $A_*(N)$ у кожен момент часу N. Для оцінки (4) отримано рекурент (5)-(7), який доповнено рекурентним представленням (13) для відповідної зваженої залишкової суми квадратів.

Список використаних джерел

1. *Eykhoff P.* System Identification: Parameter and State Estimation / P. Eykhoff. – Chichester, England: Wiley, 1974. – 555 p.
2. *Ljung L.* System Identification: Theory for the User / L. Ljung. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987. – 544 p.
3. *Hsia T.C.* System Identification. Least-Squares Methods / T.C. Hsia. – Toronto: Lexington Books, 1977. – 165 p.
4. *Moore E. H.* On the reciprocal of the general algebraic matrix / E. H. Moore // Bull. American Mathematical Society. – 1920. – V. 26, № 9. – pp. 394 – 395.

References

1. EYKHOFF, P. (1974) *System Identification: Parameter and State Estimation*. Chichester, England: Wiley.
2. LJUNG, L. (1987) *System Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
3. HSIA, T.C. (1977) *System Identification. Least-Squares Method*. Toronto: Lexington Books.
4. MOORE, E. H. (1920) On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix. *Bull. American Mathematical Society*. V. 26, № 9. pp. 394 – 395.

5. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices / R. Penrose // Proc. Cambridge Philoc. Soc. – 1955. – V. 51, № 3. – pp. 406 – 413.
6. *Albert A.* Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse / A. Albert. – New York: Academic Press, 1972. – 180 p.
7. *Слабоспицький О.С.* Рекурентний алгоритм оцінювання методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 1999. – № 4. – С. 237-240.
8. *Слабоспицький О.С.* Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – № 1. – С. 282-285.
9. *Слабоспицький О.С.* Використання додаткової інформації в рекурентному оцінюванні параметрів систем з дискретним часом методом найменших квадратів при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2008. – №4. – С. 179-182.
10. *Слабоспицький О.С.* Оцінювання нестаціонарних параметрів методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та мінімальною нормою відхилення від точок "тяжіння" для систем при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фіз.-мат. науки. – 2012. – № 4. – С. 199-202.
11. *Слабоспицький О.С.* Рекурентне оцінювання нестаціонарних параметрів систем при некласичних припущеннях методом найменших квадратів зі змінним фактором забування та найменшою нормою відхилення від точок "тяжіння" / О.С. Слабоспицький // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2012. – № 2 (108). – С. 59-65.
12. *Слабоспицький О.С.* Оцінювання параметрів лінійних дискретних динамічних систем методом найменших квадратів з мінімальним відхиленням від точок "тяжіння" при некласичних припущеннях / О.С. Слабоспицький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – № 4. – С. 135-138.

5. PENROSE, R. (1955) A Generalized Inverse for Matrices. *Proc. Cambridge Philoc. Soc*. V. 51, № 3. pp. 406 – 413.
6. ALBERT, A. (1972) *Regression and the Moore-Penrose Pseudoinverse*. New York: Academic Press.
7. SLABOSPITSKY, A.S. (1999) Recursive Algorithm of Least Squares Estimation with Variable Forgetting Factor under Nonclassical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 237-240.
8. SLABOSPITSKY, A.S. (2000) Recursive Estimation of Nonstationary Parameters by the Least Squares Method with Variable Forgetting Factor under Nonclassical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 1. pp. 282-285.
9. SLABOSPITSKY, A.S. (2008) Usage of Supplementary Information in the Recurrent Parameter Estimation of the Systems with Discrete Time by the Least Squares Method under Non-Classical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 179-182.
10. SLABOSPITSKY, A.S (2012) Non-Stationary Parameter Estimation by the Least Squares Method with Variable Forgetting Factor and Minimal Deviation Norm from 'Attraction' Points for Systems under Non-Classical Assumptions. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*. 4. pp. 199-202.
11. SLABOSPITSKY, A.S (2012) Recurrent Non-Stationary Parameter Estimation of Systems under Non-Classical Assumptions by the Least Squares Method with Variable Forgetting Factor and Least Deviation Norm from 'Attraction' Points. *Journal of Computational & Applied Mathematics*. 2 (108). pp. 59-65.
12. SLABOSPITSKY, A.S (2009) Parameter Estimation of Linear Discrete Dynamic Systems by the Least Squares Method with the Minimum Deviation from 'Attraction' Points under Non-Classical Assumptions. *Bulletin of University of Kiev. Series: Physics & Mathematics*. 4. pp. 135-138.

Надійшла до редколегії 09.11.2016.