УДК 535.341.08, 535.342, 53.096.

Сіжук А. С.[1], к.ф.-м.н.,
Єжов С. М.[2], д.ф.-м.н., проф.

Використання мікроскопічного розподілу частинок для квантовооптичних усереднених

[1,2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, м. Київ, вул. Володимирська 64/13,
e-mail: [1]andrii.sizhuk@gmail.com,
[2]yezhov@univ.kiev.ua

A. S. Sizhuk[1], PhD.,
S. M. Yezhov[2], Dr. Sci.

Use of the microscopic distribution of particles for the quantum optical averages

[1,2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, Volodymyrska st. 64/13,
e-mail: **1**andrii.sizhuk@gmail.com,
2yezhov@univ.kiev.ua

У даній роботі обговорюється можливість представлення квантово-оптичних виразів для коефіцієнта поглинання у термінах інтегралів зіткнення для відповідних напівкласичних кінетичних рівнянь. Показано, що у певному наближенні, задані градієнтні поля для розподілу кількості частинок у фазовому просторі (координати і імпульсу) можуть відповідним чином визначати поглинальні властивості системи.

Ключові слова: коефіцієнт поглинання, кінетичне рівняння, інтеграл зіткнення, комутаційні співвідношення, квантова оптика.

In this work the representation of the quantum optical expressions for the absorption coefficient in terms of collisional integrals of the corresponding semi-classical kinetic equations is discussed. It was shown, that in certain approximation, the given gradient field of particle number distribution in the phase space (of coordinates and momentums) can determine the absorption properties of a system. The atom-photon and atom-atom collisions are formally represented here in the form of the corresponding items in the kinetic equation. The proposed approximation can be used to introduce the chronology of absorption/reemission and interatomic collision events in the system within an impact theory or a semi-classical evolution operator in the kinetic equation. The single-atom methods, such as the equation of motion for the one-particle population matrix, to find the number of quanta, imbibed by atoms or liberated into the environment per unit time, are not used here. The derived expression for the local absorption coefficient non-linearly depends on atomic density and initial intensity. It was found that the ability of the system to absorb or emit quanta can quantitatively be expressed through the semi-classical form of collision integrals.

Key Words: absorption coefficient, kinetic equation, collision integral, commutation relation, quantum optics.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Макарець М.В.

Вступ

Відомо, що, феноменологічно, розширення та зсув спектральної лінії (поглинання переходом між двома енергетичними рівнями), спричинених відповідно короткодіючою (абсолютно пружною) та далекодіючою (непружною або пружною) взаємодіями між атомами, можуть бути описані розподілом Лоренца для спектральної густини (інтенсивності: див., наприклад, [1]):

$$I(\omega) = \frac{C}{(\omega - \omega_0 - \Delta\omega)^2 + \left(\gamma/2\right)^2}, \qquad (1)$$

Де зсув лінії задається параметром $\Delta\omega = n_A \bar{v} \sigma_s$, а розширення лінії поглинання – за допомогою $\gamma = \gamma_0 + n_A \bar{v} \sigma_b$, $C = I_0 \gamma / 2\pi$. Тут, n_A – це концентрація атомів, $\bar{v}$ – середня теплова швидкість атомів, σ_s та σ_b – це так звані площі поперечних перерізів для зсуву та розширення спектральної лінії, відповідно. γ_0 – частота розпаду («натуральна ширина» лінії) відповідного збудженого стану вільного атома. I_0 – деяка інтегральна (початкова) інтенсивність скануючого променя.

Поставимо наступне запитання. Чи можна звести процедуру обчислення поглинальних властивостей середовища, отриману на основі теорії квантової оптики, до виразів, подібних формулі (1) і сформульованих у напівкласичних термінах кінетичної теорії (таких, як інтеграл зіткнення, переріз розсіяння тощо)?

Незважаючи на значний поступ на шляху позвитку понять класичної та квантової теорій розсіяння світла оптично активним середовищем (див., наприклад, [2] – [10]), поєднання термінологій теорії кінетичних рівнянь та методу вторинного квантування для електромагнітного поля, на нашу думку, є доволі нетривіальним.

У даній роботі пропонується розглянути мікроскопічний опис системи взаємодіючих атомів та електромагнітного поля. Досліджується можливість представлення квантово-оптичних виразів для коефіцієнта поглинання за допомогою відповідних інтегралів зіткнення.

Представлення у кінетичних термінах

Нехай локальний коефіцієнт поглинання електромагнітного випромінювання є визначений як похідна вздовж вісі симетрії поширення променя (OZ) від логарифма інтенсивності. Як може бути показано при певних припущеннях (див., наприклад, [11]), коефіцієнт може бути виражений за допомогою комутаційних співвідношень між відповідним модельним гамільтоніаном і оператором інтенсивності:

$$\alpha_{tot} \approx \mathrm{Re}\frac{\delta}{\delta z}\ln\sum_{\Psi}\left\langle \Psi\middle|\hat{I}_{\tau}\hat{\rho}_{\Psi}\middle|\Psi\right\rangle, \tag{2}$$

де $\hat{I}_{\tau}$ є оператор інтенсивності у заданий момент часу:

$$\hat{I}_{\tau} = \hat{I} + \frac{i}{\hbar}\tau\left[\hat{H},\hat{I}\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{i}{\hbar}\tau\right)^2\left[\hat{H},\left[\hat{H},\hat{I}\right]\right], \tag{3}$$

де модельний гамільтоніан $\hat{H} = \hat{H}^{A} + \hat{H}^{F} + \hat{H}^{AF} + \hat{H}^{AA}$ описує взаємодію системи однакових атомів з електромагнітним полем (доданок $\hat{H}^{AF}$) та міжатомну короткодіючу взаємодію (доданок $\hat{H}^{AA}$). $\hat{H}^{A}$, $\hat{H}^{F}$ – оператори енергії вільних атомів (молекул) та поля, відповідно. $\hat{\rho}_{\Psi}$ – статистичний розподіл по чистим станам системи $|\Psi\rangle$ у деякий початковий момент часу. Оптичний шлях розсіюваного променя визначається віссю *Z*. τ є деякий інтервал часу.

Для прикладу, розглянемо такі члени у розкладі (3), як $\left[\hat{H}^{AF},\hat{I}\right]$ та $\left[\hat{H}^{AA},\hat{I}\right]$.

Введемо до розгляду дельта-функцію:

$$f\left(\mathbf{X},\hat{\mathbf{D}}\right) = \sum_{i=1}^{N}\delta\left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_i\right)\delta\left(\hat{\mathbf{D}}-\hat{\mathbf{D}}_i\right), \tag{4}$$

яка являє собою мікроскопічний розподіл частинок у фазовому просторі координати та імпульсу, позначеного як **X** = (**r**, **p**), і оператора дипольного моменту, $\hat{\mathbf{D}}$. *f* є нормована на кількість частинок (атомів) у системі *N*. При цьому $\mathbf{X}_i$ визначає положення *i*-го атома (молекули) у даному просторі $\mathbf{X}_i = \left(\mathbf{r}_i,\mathbf{p}_i\right)$. Зміна функції розподілу *f*, позначену як $\Delta_{coll} f\left(t,\mathbf{X}\right)$, за достатньо малий проміжок часу Δt при «зіткненнях» атомів з квантами поля та з іншими атомами нехай визначена за допомогою інтегралів зіткнення I_{AF}^{coll} та I_{AA}^{coll}, відповідно. Іншими словами, наступне кінетичне рівняння може мати місце (див., наприклад, [12]):

$$\begin{aligned}\Delta_{coll} f\left(t,\mathbf{X}\right) &= \left(I_{AF}^{coll} + I_{AA}^{coll}\right)\Delta t = \\ &\Delta t\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right) f\left(t\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Тут $\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\right)$, де **D** є деякий характеристичний (усереднений) дипольний момент атома. **E**(**r**) – величина вектора напруженості електромагнітного поля в околі точки **r**.

Формально представимо значення комутаторів у (3) через дельта-функціональний розподіл у фазовому просторі $\mathbf{X}',\mathbf{D}$. Наприклад,

$$\left[\hat{H}^{AF},\hat{I}\right] \to -\int d\mathbf{X}'d\hat{\mathbf{D}} f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\left[\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{r}'\right),\hat{I}\right]. \tag{6}$$

Тоді, переходячи від суми до інтегрування по параметрам станів $d\Psi = d\mathbf{X}^N d\Psi^{red}$, де $d\mathbf{X}^N = d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 ... d\mathbf{X}_N$, та припускаючи факторизацію за теоремою про середнє, представимо доданки під знаком логарифма у формулі (2) у формі середнього за розподілом $\rho\left(\mathbf{X}^N\right)$ у фазовому просторі $\mathbf{X}^N = \left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,...,\mathbf{X}_N\right)$ наступним чином:

$$\sum_{\Psi}\left\langle\Psi\right|\left[\hat{H}^{AF},\hat{I}\right]\hat{\rho}_{\Psi}\left|\Psi\right\rangle \to \int d\mathbf{X}^N dX'd\mathbf{D}g\left(\mathbf{X}^N\right)\rho\left(\mathbf{X}^N\right)\overline{\langle[,]\rangle}, \tag{7}$$

де $\mathbf{X}' = \left(\mathbf{r}',\mathbf{p}'\right)$, $\mathbf{X}^N = \left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,...,\mathbf{X}_N\right)$, і (див.[11])

$$\begin{aligned}&\overline{\langle[,]\rangle} = \\ &\int d\Psi^{red} g^{red}\left(\Psi\right)\rho_{\Psi}^{red}\left(\Psi\right)\left\langle\Psi\right| f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\left[-\hat{\mathbf{D}}\cdot\mathbf{E}\left(\mathbf{r}'\right),\hat{I}\right]\left|\Psi\right\rangle \\ &\to I_{AF}\left(\mathbf{X}'\right) f^{*}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right) - I_{FA}\left(\mathbf{X}'\right) f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\end{aligned}$$

$$= \mathrm{Re}\left(I_{AF}\left(\mathbf{X}'\right)\right)\left\{f^*\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)-f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\right\}$$
$$+i\,\mathrm{Im}\left(I_{AF}\left(\mathbf{X}'\right)\right)\left\{f^*\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)+f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\right\}.$$

Тут $f^*\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)$ позначає значення функції f після взаємодії атома (атомів) з фотоном. $I_{AF}\left(\mathbf{X}'\right)$ є деяка цілком визначена функція.

Таким чином, у даному наближенні можемо записати, що

$$\sum_{\Psi}\langle\Psi|\left[\hat{H}^{AF},\hat{I}\right]\hat{\rho}_{\Psi}|\Psi\rangle\to C_{AF}\frac{\Delta t}{\tau_1}+iC_{AF}^{F}n_A, \qquad (8)$$

де

$$C_{AF}\frac{\Delta t}{\tau_1}=\int d\mathbf{X}'d\hat{\mathbf{D}}\,\mathrm{Re}\left(I_{AF}\left(\mathbf{X}'\right)\right)\left\langle I_{AF}^{coll}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\right\rangle\Delta t,$$
$$C_{AF}^{F}n_A=2\left\langle \mathrm{Im}\left(I_{AF}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\right)\right\rangle N,$$
$$I_{AF}^{coll}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\Delta t=f^*\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)-f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right),$$
$$\langle\ldots\rangle\equiv\int d\mathbf{X}^N g\left(\mathbf{X}^N\right)\rho\left(\mathbf{X}^N\right)\ldots\ .$$

За аналогією до вище наведеного предствлення записуємо наступне:

$$\left[\hat{H}^{AA},\hat{I}(\mathbf{r})\right]\to$$
$$\int d\mathbf{X}'d\hat{\mathbf{D}}'d\mathbf{X}''d\hat{\mathbf{D}}''f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)\left[\hat{H}^{AA},\hat{I}\right]. \qquad (9)$$

Тоді

$$\sum_{\Psi}\langle\Psi|\left[\hat{H}^{AA},\hat{I}\right]\hat{\rho}_{\Psi}|\Psi\rangle\to$$
$$\int d\mathbf{X}^N d\mathbf{X}'d\hat{\mathbf{D}}'d\mathbf{X}''d\hat{\mathbf{D}}''g\left(\mathbf{X}^N\right)\rho\left(\mathbf{X}^N\right)\overline{\langle[,]\rangle^{(2)}}, \qquad (10)$$

де, аналогічно з отриманим наближенням у [11], можемо покласти:

$$\overline{\langle[,]\rangle^{(2)}}=\int d\Psi^{red}g^{red}(\Psi)\rho_{\Psi}^{red}(\Psi)\times$$
$$\langle\Psi|f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)\left[\hat{H}^{AA},\hat{I}\right]|\Psi\rangle=$$
$$\langle\Psi|f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)\left(\hat{I}_{AA}-\hat{I}_{AA}^{\dagger}\right)|\Psi\rangle\to$$
$$\mathrm{Re}\left(I_{AA}\left(\mathbf{X}',\mathbf{X}''\right)\right)\times$$
$$\left\{f^{**}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f^{**}\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)-f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)\right\}$$
$$+i\,\mathrm{Im}\left(I_{AA}\left(\mathbf{X}',\mathbf{X}''\right)\right)\times$$
$$\left\{f^{**}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f^{**}\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)+f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)f\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)\right\}.$$

Тут $f^{**}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)$ позначає значення функції f після взаємодії між атомами (парного зіткнення). Звідки робимо таке наближення:

$$\sum_{\Psi}\langle\Psi|\left[\hat{H}^{AA},\hat{I}(\mathbf{r})\right]\hat{\rho}_{\Psi}|\Psi\rangle\to C_{AA}\frac{\Delta t}{\tau_2}+iC_{AA}^{F}n_A^2, \qquad (11)$$

де введені наступні позначення:

$$C_{AA}\frac{\Delta t}{\tau_2}=2\int d\mathbf{X}'d\hat{\mathbf{D}}'d\mathbf{X}''d\hat{\mathbf{D}}''\,\mathrm{Re}\left(I_{AA}\left(\mathbf{X}',\mathbf{X}''\right)\right),$$
$$\left\langle f\left(\mathbf{X}'',\hat{\mathbf{D}}''\right)I_{AA}^{coll}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}'\right)\right\rangle\Delta t,$$
$$C_{AA}^{F}n_A^2=2N^2\left\langle \mathrm{Im}\left(I_{AA}\right)\right\rangle_{\mathrm{int}}(\mathbf{r}),$$
$$I_{AA}^{coll}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)\Delta t=f^{**}\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right)-f\left(\mathbf{X}',\hat{\mathbf{D}}\right),$$
$$\langle\ldots\rangle_{\mathrm{int}}\equiv\int d\mathbf{X}'d\hat{\mathbf{D}}'d\mathbf{X}''d\hat{\mathbf{D}}''\langle\ldots\rangle.$$

Отже, підставляючи вирази (8) та (11) у (2), формально отримуємо таку формулу для локального коефіцієнта поглинання:

$$\alpha_{tot}\approx\frac{1}{2}\frac{\frac{\delta}{\delta z}\left\{\Delta\Omega^2+\Gamma^2\right\}}{\Delta\Omega^2+\Gamma^2}, \qquad (12)$$

де

$$\Delta\Omega=I_0\frac{\hbar}{\tau}-n_A\left(C_{AF}^{F}+C_{AA}^{F}n_A\right), \qquad (13)$$

$$\Gamma=C_{AF}\frac{\Delta t}{\tau_1}+C_{AA}\frac{\Delta t}{\tau_2}, \qquad (14)$$

τ_1 та τ_2 є характерні часи релаксації (збудження) для атом-фотон та атом-атом взаємодій.

Відмітимо наступне. Якщо знехтувати частинною похідною за часом $\partial/\partial t$ та/або електромагнітною силою $\mathbf{F}$ (чи частинною похідною за імпульсом) у кінетичному рівнянні, то вираз (12) буде визначатись відповідним інтегралом по фазовому просторі від проекції градієнта частинкової функції розподілу на напрямок моменту імпульсу. Додаткового дослідження потребує тут питання побудови відповідної геометричної інтерпретації.

Слід зазначити, що для отримання виразу типу (1), що залежить від різниці скануючої та атомної резонансної частот $\omega-\omega_0$, необхідно визначити введені коефіцієнти, такі, як C_{AF}^{F} та C_{AA}^{F}. Останні, взагалі кажучи, можуть залежати від просторової фази, визначеної хвильовим та просторовим векторoми (див. [11]).

Висновки

Отже, у даній роботі продемонстровано можливість представлення квантово-оптичних виразів для коефіцієнта поглинання у термінах інтегралів зіткнення для відповідних напівкласичних кінетичних рівнянь. Таким чином, у певному наближенні, задані градієнтні поля для розподілу кількості частинок у фазовому просторі координати, імпульсу (та, наприклад, моменту імпульсу) можуть певним чином визначати поглинальні властивості системи.

Список використаних джерел

1. *Демтрьодер В.* Лазерна спектроскопія Т. 1: Базові принципи/ В. Демтрьодер. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 78 c.

2. *Ліндгольм І.* Залежність ширини спектральних ліній від тиску / І. Ліндгольм. // Ark. Mat. Astron. Fys. A. – 1945. – №32. – P. 17–18.

3. *Лекс М.* Квантовані шуми. IV. Квантова теорія джерел шуму / М. Лекс. // Phys. Rev. – 1966. – №145. – P. 110–129.

4. *Бен-Ріувен А.* Інтерпретація розширення спектральних ліній. Аналогія з класичним осцилятором / А. Бен-Ріувен. // Adv. Atom. Mol. Phys. – 1969. – №5. – P. 201–235.

5. *Воробйов Ф. А.* Випрмінювальні та поглинальні спектри у сильному полі. Ефект віддачі / Ф. А. Воробйов, Р. І. Соколовскій. // Журнал прикладної спектроскопії. – 1970. – №13. – С. 906–913.

6. *Лемберг Р.* Випромінювання N-атомною системою. I. Загальний формалізм. / Р. Лемберг. // Phys. Rev. A. – 1970. – №2. – P. 883–888.

7. *Сандо К. М.* Форми спектральних ліній у лазерному полі при різних тисках / К. М. Сандо, Ш. Чи. // Adv. At. Mol. Phys. – 1989. – №25. – P. 133–162.

8. *Берман П. Р.* Порівняння збудженого віддачею резонансу та колективної атомної віддачі / П. Р. Берман. // Phys. Rev. A. – 1999. – №59. – P. 585–596.

9. Квантовий ефект віддачі для двох нетотожних атомів на скінченних проміжках часу/ Ф. Ластра, С. Валентович, М. Орзаг, М. Гернандес // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. – 2009. – №42. – P. 065504–065505.

10. Кооперативний ефект та безлад: маштабний аналіз спектру для ефективного атомного гамільтоніана / Л.Беландо, А. Геро, І. Акерманс, Р. Кайзер. // Phys. Rev. A.. – 2014. – №90. – P. 063822–063823.

11. *Сіжук А. С.* Квантовооптичне формулювання поняття коефіцієнта поглинання / А.С.Сіжук, С. М. Єжов. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2016. – №1. – С. 193 – 197.

12. *Сіжук А. С.* Мікроскопічне рівняння еволюції для непружно взаємодіючих кульок, обмежених стінкою / А. С. Сіжук, С. М Єжов. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2005. – №3. – С. 591–595.

References

1. DEMTRÖDER, W. (2008) *Laser Spectroscopy*. Berlin: Springer-Verlag.

2. LINDHOLM, E. (1945) Pressure broadening of spectral lines. *Ark. Mat. Astron. Fys. A*. 32. p.17-18.

3. LAX, M. (1966) Quantum Noise. IV. Quantum Theory of Noise Sources. *Phys. Rev.* 145(1). p.110-129.

4. BEN-REUVEN, A. (1969) The meaning of collisional broadening of spectral lines: The classical oscillator analog. *Adv. Atom. Mol. Phys*. 5. p. 201-235.

5. VOROB'EV, F. A. and SOKOLOVSKII, R. I. (1970) Emission and absorption spectra in a strong field, and recoil effect. *Journal of Applied Spectroscopy*. 13(1). p. 906-913.

6. LEHMBERG, R. H. (1970) Radiation from an *N*-Atom System. I. General Formalism. *Phys. Rev. A.* 2(3). p. 883-888.

7. SANDO, K. M., CHU, SHI-I. (1989) Pressure broadening and laser-induced spectral line shapes. *Adv. At. Mol. Phys*. 25. p.133-162.

8. BERMAN, P. R. (1999) Comparison of recoil-induced resonances and the collective atomic recoil. *Phys. Rev. A.* 59(1). p. 585-596.

9. LASTRA, F. et. al. (2009) Quantum recoil effects in finite-time disentanglement of two distinguishable atoms. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 42(6). p. 065504-065505.

10. BELLANDO, L. et. al. (2014) Cooperative effects and disorder: A scaling analysis of the spectrum of the effective atomic Hamiltonian. *Phys. Rev. A.* 90(6). p. 063822-063823.

11. SIZHUK, A. S., YEZHOV, S. M. (2016) The quantum optical formulation of absorption coefficient. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics*. (1). p. 193–197.

12. SIZHUK, A. S., YEZHOV, S. M. (2005) The microscopic equation for the system of rough spheres bounded by a wall. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics*. 3. p. 591–595.

Надійшла до редколегії 17.08.16