

УДК 539.3

Рожок Л. С., к.ф.-м.н., доц.

Рівновага порожнистих некругових циліндрів при зміні форми їх поперечного перерізу

Національний транспортний університет, 01010,
м. Київ, вул. М. Омеляновича-Павленка, 1,
e-mail: r.l.s@ua.fm

Liliya S. Rozhok, Ph.D., (Phys.-Math.), Ass. Prof.

Equilibrium non-circular hollow cylinders by changing the shape of the cross section

National Transport University, 01010, Kyiv, M.
Omelyanovicha-Pavlenka, 1,
e-mail: r.l.s@ua.fm

Розв'язання задачі про рівновагу порожнистих ізотропних некругових циліндрів дано в просторовій постановці при певних граничних умовах на торцях. Поперечний переріз циліндрів, що розглядаються описаний рівняннями овалів Касині. При цьому застосовуються: метод відокремлення змінних вздовж твірної та прямої циліндра, метод апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є та стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Наводяться результати розрахунків у вигляді розподілу полів переміщень та напружень.

Ключові слова: некругові порожнисті циліндри, овали Касині, дискретні ряди Фур'є, метод дискретної ортогоналізації, напружений стан.

The paper considers solving the problem on equilibrium of noncircular hollow cylinders is performed in spatial formulation at certain boundary conditions at the ends.

Object of study – a hollow cylinder which noncircular cross sections. The cross section of these cylinders is described by the Cassini ovals equations.

Purpose – investigation of influence of the cross section shape on the stress state of noncircular hollow cylinders.

The paper presents a nontraditional approach to solving boundary-value problems on stress state of spatial bodies. The approach is based on the reduction of two-dimensional problems to one-dimensional one using the discrete Fourier series. The two-dimensional problem contains the geometrical and mechanical parameters as the multipliers on solving functions what makes it impossible to separate variables. Introduction of additional functions, which include resolving functions, and their derivatives together with indicated multipliers, allows to reduce the problem to one-dimensional one through expansion of all the functions into the Fourier series in one coordinate direction. In integrating the one-dimensional boundary-value problem, the amplitude values of additional functions are determined through the Fourier series of functions which are specified at the discrete set of points. The one-dimensional boundary-value problem is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization.

The results of the paper can be used when selecting the cross section of the cylinders of a similar type.

Key words: noncircular hollow cylinders, Cassini ovals, discrete Fourier series, discrete-orthogonalization method, hollow cylinders, stress state.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

Циліндричні оболонки – один із найважливіших елементів літаків, ракет, підводних човнів. У будівництві вони знаходять широке застосування у конструкціях будівель, резервуарів, газгольдерів, трубопроводів [1, 2].

При розробці нових конструкцій машин, обладнання, споруд саме на ранніх стадіях проектування для прийняття проектно-конструкторських рішень необхідно стає інформація про вплив на напружений стан як

конструктивних параметрів, так і властивостей матеріалу, з яких вони виготовлятимуться.

Така інформація за відсутності експериментальних даних може бути отримана тільки за допомогою теоретичних моделей. Розробка перспективних видів конструкцій залежить від наявності випереджаючих розробок ефективних засобів математичного моделювання.

Метою даної роботи є дослідження впливу на напружений стан некругових ізотропних

порожнистих циліндрів зміни форми їх поперечного перерізу.

Постановка задачі та метод розв'язування.

Розглядаються порожнисті некругові циліндри під дією внутрішнього тиску.

Перша квадратична форма в ортогональній криволінійній системі координат записується у вигляді

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(\psi, \gamma) d\psi^2 + d\gamma^2, \quad (1)$$

де s, ψ, γ ортогональні криволінійні координати: s - довжина дуги по твірній, ψ - полярний кут в поперечному перерізі, γ - нормальна координата по товщині циліндра.

Будемо розглядати циліндри, з еліптичним та двома видами овального поперечного перерізу. В роботі [3] такі поперечні перерізи було описано трьома різними кривими. Подібні форми поперечного перерізу можна описати одним рівнянням для овалів Касині в полярній системі координат [4]

$$\rho = c \sqrt{\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi),$$

$$0 \leq \frac{c}{a} < 1, a \neq 0, \quad (2)$$

де ρ - полярний радіус, c - половина відстані між фокусами, a - добуток відстаней від фокусів до довільної точки. Відношення параметрів c та a характеризує форму поперечного перерізу (рис.1). Так, якщо $c=0$ - маємо коло (1), при $0 < \frac{c}{a} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ - еліпс (2), $c = a\sqrt{2}$ - овал (3),

$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{c}{a} < 1$ - сплюснутий овал (4).

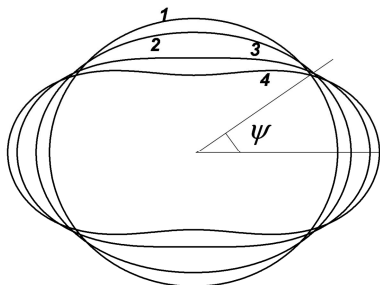


Рис. 1. Поперечний переріз поверхні відліку.

Тоді для параметру Ламе, коефіцієнту переходу від елемента дуги напрямної до кутового параметру ψ та радіуса кривизни

поверхні відліку, відповідно, маємо

$$H_2(\psi, \gamma) = \left(1 + \frac{\gamma}{R(\psi)}\right) \omega(\psi),$$

$$\omega(\psi) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2}; \quad (3)$$

$$R(\psi) = \frac{a^2 \rho}{\rho^2 + c^2 \cos 2\varphi}.$$

За вихідні приймаються основні рівняння просторової теорії пружності.

Вирази деформацій через переміщення

$$e_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad e_\psi = \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma,$$

$$e_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma}, \quad e_{s\psi} = \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_s}{\partial \psi} + \frac{\partial u_\psi}{\partial s}, \quad e_{s\gamma} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial \gamma},$$

$$e_{\psi\gamma} = H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_\psi}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2 \omega} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \psi}; \quad (4)$$

рівняння рівноваги

$$H_2 \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \tau_{s\gamma}) = 0,$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \tau_{\psi\gamma}) + H_2 \frac{\partial \tau_{s\psi}}{\partial s} + \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{\psi\gamma} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \sigma_\gamma) + H_2 \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial s} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \tau_{\psi\gamma}}{\partial \psi} - \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_\psi = 0;$$

співвідношення закону Гука

$$e_s = a_{11} \sigma_s + a_{12} \sigma_\psi + a_{13} \sigma_\gamma,$$

$$e_\psi = a_{12} \sigma_s + a_{22} \sigma_\psi + a_{23} \sigma_\gamma,$$

$$e_\gamma = a_{13} \sigma_s + a_{23} \sigma_\psi + a_{33} \sigma_\gamma, \quad (6)$$

$$e_{\psi\gamma} = a_{44} \tau_{\psi\gamma}, \quad e_{s\gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma}, \quad e_{s\psi} = a_{66} \tau_{s\psi},$$

де для ізотропного матеріалу маємо

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}; \quad (7)$$

$$a_{44} = a_{55} = a_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E}.$$

На торцях циліндра припускаються граничні умови типу простого обпирання.

Обравши за розв'язувальні функції компоненти напружень і переміщень, після деяких перетворень можна отримати розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних шостого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Відокремивши змінні в напрямку твірної циліндра, подаючи розв'язувальні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж твірної циліндра, отримуємо двовимірну крайову задачу, що описується розв'язувальною системою диференціальних рівнянь у частинних похідних більш високого порядку відносно амплітуд відповідних рядів Фур'є. Коефіцієнти отриманої розв'язувальної системи рівнянь містять параметри, що перешкоджають відокремленню змінних в напрямку напрямної циліндра. Тоді, вводимо до розв'язувальної системи рівнянь доповняльні функції і отримуємо систему рівнянь, коефіцієнти якої, формально, не перешкоджатимуть відокремленню змінних в напрямку напрямної [5]. Подаючи далі розв'язувальні, доповняльні функції та компоненти навантаження у вигляді розвинень в ряди Фур'є вздовж напрямної циліндра, приходимо до одномірної крайової задачі відносно амплітуд відповідних рядів Фур'є, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\frac{d\sigma_{\gamma,n,k}}{d\gamma} = (c_2 - 1)\varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,n,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22}\varphi_{1,k}^5 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22}\varphi_{4,k}^3;$$

$$\frac{d\tau_{s\gamma,n,k}}{d\gamma} = -c_1\lambda_n \sigma_{\gamma,n,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12}\lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11}\lambda_n^2 u_{s,n,k} - b_{66}\varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{4,k}^2;$$

$$\frac{d\tau_{\psi\gamma,n,k}}{d\gamma} = -c_2\varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22}\varphi_{5,k} + (b_{12} + b_{66})\lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22}\varphi_{7,k} + b_{66}\lambda_n^2 u_{\psi,n,k};$$

$$\frac{du_{\gamma,n,k}}{d\gamma} = c_4\sigma_{\gamma,n,k} - c_2\varphi_{4,k}^2 + c_1\lambda_n u_{s,k} - c_2\varphi_{1,k}^3; \quad (8)$$

$$\frac{du_{s,n,k}}{d\gamma} = a_{55}\tau_{s\gamma,n,k} - \lambda_n u_{\gamma,n,k};$$

$$\frac{du_{\psi,n,k}}{d\gamma} = a_{44}\tau_{\psi\gamma,n,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2, \quad (k = \overline{0, K}; n = \overline{0, N})$$

з граничними умовами

$$\gamma = \gamma_p: \quad \sigma_{\gamma,n,k} = q_{\gamma,n,k}; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0;$$

$$\gamma = \gamma_q: \quad \sigma_{\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{s\gamma,n,k} = 0; \quad \tau_{\psi\gamma,n,k} = 0. \quad (9)$$

Для розв'язування отриманої одномірної крайової задачі (8, 9) застосовується стійкий чисельний метод дискретної ортогоналізації. Для

визначення значень доповняльних функцій в процесі інтегрування використовуються ряди Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок.

Числові результати та їх аналіз.

На основі розглянутого підходу досліджено напружений стан порожнистих циліндрів під дією внутрішнього тиску $q = q_0 \sin(\pi s/l)$ ($q_0 = const$). Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндрів $l = 80$, товщина циліндрів $H = 4$; параметри поверхні відліку – $a=20$; $c=0$ (коло), $c=8$ (еліпс), $c=14,14$ (овал), $c=16$ (сплюснутий овал). Механічні параметри: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, модуль Юнга $E=1$.

Результати розв'язку задачі подано в середньому перерізі по довжині $l = 40$ на рис. 2 для розподілу полів переміщень u_γ поверхні відліку та для розподілу полів напружень σ_ψ на внутрішній (рис. 3) та зовнішній (рис. 4) поверхні циліндра вздовж напрямної в інтервалі $0 \leq \psi \leq \pi/2$.

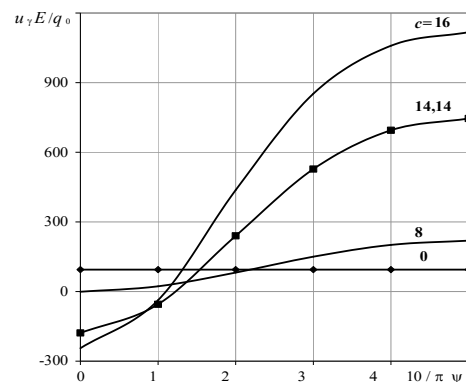


Рис. 2. Розподіл переміщень поверхні відліку вздовж напрямної циліндра.

Відхилення форми поперечного перерізу від кругової призводить до збільшення жорсткості в перерізі $\psi = 0$ і зменшення в перерізі $\psi = \pi/2$. Чим більше поперечний переріз відрізняється від кругового, тим більш значної величини набувають переміщення в перерізі $\psi = \pi/2$. Так для $c=8$ переміщення збільшуються у 2,3 рази, для $c=14,14$ – у 7,9 рази і для $c=16$ – в 11,8 рази. При цьому, на відміну від циліндрів з еліптичним поперечним перерізом ($c=8$), для циліндрів з овальним поперечним перерізом ($c=14,14; 16$) в перерізі $\psi = 0$, переміщення змінюють знак на протилежний.

Розподіл напружень як на внутрішній, так і на зовнішній поверхні для циліндрів з некруговим поперечним перерізом носить

хвильовий характер. Своїх максимальних значень напруження досягають на проміжку $[3\pi/10; 2\pi/5]$.

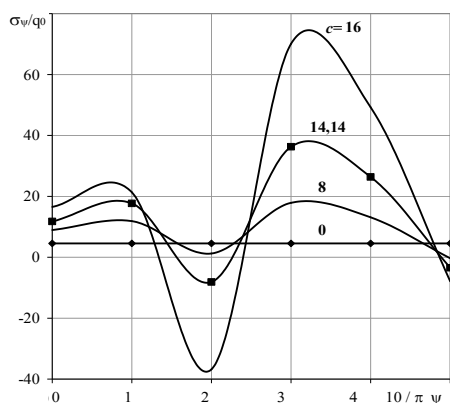


Рис. 3. Розподіл напружень вздовж напрямної циліндра на внутрішній поверхні.

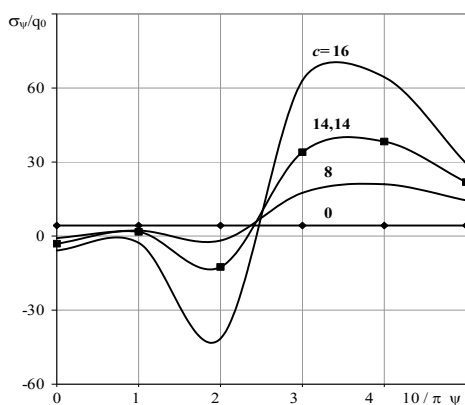


Рис. 4. Розподіл напружень вздовж напрямної циліндра на зовнішній поверхні.

При цьому, порівняно до кругового циліндра, їх значення збільшуються у 16; 8,2; 4 рази на внутрішній (рис. 3) та у 16,3; 9,8; 5,5 рази на зовнішній (рис. 4) поверхні циліндрів відповідно для $c=16; 14,14; 8$.

Висновки. В просторовій постановці розв'язано задачу та проведено аналіз напруженого стану порожнистих ізотропних циліндрів, що знаходяться під дією внутрішнього тиску в залежності від форми поперечного перерізу. Зокрема розглядалися циліндри з поперечним перерізом у вигляді еліпса та двох видів овалів. Було встановлено, що відхилення форми поперечного перерізу від кругової призводить до зміни жорсткості, що в свою чергу впливає на розподіл полів переміщень та

напружень. Отримані результати можуть бути використані при виборі поперечного перерізу циліндрів подібної форми.

Список використаних джерел

1. Kinde K.S. Buckling characteristic of multi-laminated composite elliptical cylindrical shells / K.S. Kinde, Ch. Kyoung-Sik // IJASE. – 2015. – 7. – P. 1 – 10.
2. Hatanaka K.S. Numerical investigations on shock oscillations ahead of a hemispherical shell in supersonic flow / K.S. Hatanaka, M. V. Rao, T. Saito, T. Mizukaki // Shock Waves. – 2016. – 26, № 3. – P. 299 – 310.
3. Влайков Г.Г. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением / Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко, С.Н. Шевченко – К.: Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Тех. центр НАН Украины, 2001. – 147 с.
4. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. (Справочное руководство) / А.А. Савелов – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. – 292 с.
5. Grigorenko Ya.M. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders / Ya.M. Grigorenko, L.S. Rozhok // Int. App. Mech. – 2014. – 50, № 2. – P. 105 – 127.

References

1. KINDE K. Buckling characteristic of multi-laminated composite elliptical cylindrical shells (2015) IJASE. (7). p. 1 – 10.
2. HATANAKA K. Numerical investigations on shock oscillations ahead of a hemispherical shell in supersonic flow (2016) Shock Waves. 26. (3). p. 299 – 310.
3. VLAYKOV G. Some problems of the theory of elasticity for anisotropic cylinders with non-circular cross section (2001) Inst. of Mechanics. S.P. Tymoshenko of NAS of Ukraine, Tech. Center of NAS of Ukraine.
4. SAVELOV A. Plane curves. Systematization, properties, application. (Reference Guide). (1960). M.: PHISMATHLIT.
5. GRIGORENKO Ya. Applying Discrete Fourier Series to Solve Problems of the Stress State of Hollow Noncircular Cylinders (2014) Int. App. Mech. 50(2). p. 105 – 127.

Надійшла до редколегії 16.12.2016