

УДК 539.376

Павлюк Я.В.¹, к.т.н., н.с.,
Фернаті П.В.², к.т.н., н.с.,
Рагуліна В.С.³, к.ф.-м.н., м.н.с.

**Повзучість ізотропних однорідних і
нестаріючих лінійно-в'язкопружних
матеріалів за умов складного
напруженого стану**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057, м. Київ-57, вул. Нестерова, 3,
e-mail: ¹slavikp406@gmail.com,
²Pavel147223@gmail.com,
³ragulinavera@rambler.ru

Y.V. Pavlyuk¹, Ph. D.,
P.V. Fernati², Ph. D.,
R.V. Ragulina³, Ph. D. (Phys.-Math.).

**Creep of isotropic homogeneous and non-
aging of linear-viscoelastic materials under
the complex stress state**

National Academy of Sciences of Ukraine
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, 03057,
Kyiv-57, P. Nesterov str., 3,
e-mail: ¹slavikp406@gmail.com,
²Pavel147223@gmail.com,
³ragulinavera@rambler.ru

Розглядається повзучість ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Розв'язок будується шляхом узагальнення вихідної одновимірної моделі в'язкопружності на складний напружений стан, що побудований на використанні гіпотези пропорційності девіаторів. Ядра спадковості задаються дробово-експоненційною функцією Работнова. Встановлюється залежність між ядрами інтенсивності та об'ємної повзучості, що задають скалярні властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану у визначальних рівняннях типу рівнянь малих пружно-пластичних деформацій, і ядрами поздовжньої і поперечної повзучості, що задають спадкові властивості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу. Розв'язано та експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій повзучості тонкостінних труб за умов комбінованого навантаження розтягом із скрученням.

Ключові слова: повзучість, лінійно-в'язкопружність, ядро спадковості.

The creep of isotropic homogeneous and non-aging linear-viscoelastic materials under conditions of complex stress state is considered. Thin-walled tubular specimens of High Density Polyethylene (HDPE) for creep under a single-axial stretching, with a pure twist and combined load tension and torsion are considered as base experiments, tests. The solution is obtained by generalizing the initial one-dimensional viscoelasticity model to a complex stressed state, constructed using the hypothesis of the proportionality of deviators. The heredity kernels are given by the Rabotnov's fractional-exponential function. The dependence between the kernels of intensity and volumetric creep is established, which determine the scalar properties of linear viscoelastic materials in the conditions of a complex stressed state in the defining equations of the type of equations of small elastic-plastic deformations, and the kernels of longitudinal and transverse creep defining the hereditary properties of linear-viscoelastic materials under the conditions of the uniaxial tension. The problems of creep strain calculation of thin walled tubes under combined tension with torsion have been solved and experimentally approved.

Key Words: creep, linear-viscoelastic, heredity kernel.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Постановка задачі

Розглядається повзучість ізотропних однорідних і нестаріючих лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Визначальні рівняння повзучості, що задають

залежність між компонентами тензора деформацій ε_{ij} , тензора напружень σ_{ij} і часом t , записуються у вигляді:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(t, \sigma_i)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)), \\ \varepsilon_i(\sigma_i, t) &= \frac{2(1+\nu)}{3E} \left(\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right); \\ \varepsilon_v(\sigma_0, t) &= \frac{3(1-2\nu)}{E} \left(\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (1)$$

тут $\varepsilon_v(t)$ і $\varepsilon_i(\sigma_i, t)$ – об’ємна деформація і інтенсивність деформації повзучості; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(\varepsilon_i, t)$ – середнє напруження і інтенсивність напружень; $K_i(t-\tau)$ і $K_v(t-\tau)$ – ядра інтенсивності повзучості і об’ємної повзучості; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; λ_i , λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – одинична функція Кронекера.

Ідентифікація ядер повзучості $K_i(t)$ і $K_v(t)$ в (1) здійснюється на основі групи базових дослідів на повзучість при постійних напруженнях.

Група базових дослідів включає випробування суцільних циліндричних зразків на повзучість за умов одновісного розтягу з заміром поздовжніх і поперечних деформацій. Однови-мірні моделі повзучості, що встановлюють залежність між напруженнями, деформаціями і часом, задаються у цьому випадку рівняннями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}(t)}{E} + \frac{\lambda_{11}}{E} \int_0^t K_{11}(t-\tau) \sigma_{11}(\tau) d\tau; \\ \gamma_{21}(t) &= \frac{\tau_{21}(t)}{G} + \frac{\tau_{21}}{G} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

котрі при $\sigma_{11} = const$ та $\tau_{21} = const$ зводяться до рівнянь

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma_{11}}{E} \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right); \\ \gamma_{21}(t) &= \frac{\tau_{21}}{G} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (3)$$

тут $\sigma_{11}(t)$ – поздовжнє напруження; $\tau_{21}(t)$ – дотичне напруження кручення; $\varepsilon_{11}(t)$ і $\gamma_{21}(t)$ – поздовжня і кутова деформація, що включає пружну деформацію і деформацію повзучості; $K_{11}(t)$ – ядро поздовжньої повзучості; E – модуль пружності; G – модуль зсуву; λ_{11} і λ_{21} – реологічні параметри.

Ядра повзучості $K(t)$ в (1) та (2) апроксимуються дробово-експоненційними функціями [1]:

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}, \quad (4)$$

де α і β – параметри ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$); $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Вважається, що матеріал є лінійно-в’язкопружним, якщо функція інтенсивності деформації повзучості інваріантна по відношенню до рівня інтенсивності напружень для декількох моментів часу, а розрахункове значення квантиля статистики [1].

Задача заключається у встановленні та експериментальній апробації залежності між ядрами повзучості $K_i(t)$ і $K_v(t)$ в (1), що задають скалярні властивості лінійно-в’язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану у визначальних рівняннях типу рівнянь малих пружно-пластичних деформацій, і ядрами поздовжньої $K_{11}(t)$ і зсувної $K_{21}(t)$ повзучості, що задають спадкові властивості лінійно-в’язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу.

2. Ідентифікація ядер інтенсивності повзучості

Залежність між ядрами інтенсивності повзучості $K_i(t)$ і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється виходячи з сумісного розв’язку рівнянь (1) і (3).

Із другого рівняння в (1) з врахуванням (3) виходячи з умов зв’язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = const$ і $\sigma_i(t) = const$ отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{(1+\nu)}{E} \left(\sigma_{21}(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \tau_{21}(\tau) d\tau \right) &= \\ = \frac{1+\nu}{E} \left(\tau_{21}(t) + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) \sigma_{21}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (5)$$

із якого випливає співвідношення

$$\lambda_i K_i(t) = \lambda_{21} K_{21}(t), \quad (6)$$

і відповідно можна вважати

$$\lambda_i = \lambda_{21} \text{ і } K_i(t) = K_{21}(t). \quad (7)$$

$$\text{В (5) прийнято, що } \gamma_{21}(t) = 2\varepsilon_{21}(t); G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8)$$

Із співвідношень (6) і (7) випливає, що параметри ядер інтенсивності повзучості співпадають із параметрами ядер зсувної повзучості, що визначаються в експерименті на чисте кручення.

3. Ідентифікація ядер об'ємної повзучості

Залежність між ядрами об'ємної повзучості $K_v(t)$ і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості $K_{11}(t)$ і $K_{21}(t)$ встановлюється виходячи з сумісного розв'язку рівнянь (1) і (3).

Із першого рівняння в (1) з врахуванням (3) виходячи з умови зв'язку компонентів тензорів напружень і деформацій за умов одновісного розтягу при $\sigma_{11}(t) = const$ отримуємо співвідношення

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) d\tau \right) + \frac{(1-2\nu)\sigma_{11}}{3E} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right), \quad (11)$$

із врахуванням першого рівняння в (1) і (7) випливає залежність між операторами

$$\frac{1-2\nu}{3} \left(1 + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) d\tau \right) = \left(1 + \lambda_{11} \int_0^t K_{11}(t-\tau) d\tau \right) - \frac{2(1+\nu)}{3} \left(1 + \lambda_{21} \int_0^t K_{21}(t-\tau) d\tau \right). \quad (12)$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (12) по t і використовуючи теорему Ньютона-Лейбніца отримуємо рівняння

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{3\lambda_{11}K_{11}(t) - 2(1+\nu)\lambda_{21}K_{21}(t)}{1-2\nu}. \quad (13)$$

Рівняння (13) встановлює залежність між ядром об'ємної повзучості і ядрами поздовжньої і зсувної повзучості при одновісному розтягу та чистому крученні. Дозволяє розрахувати дискретні значення ядер об'ємної повзучості $K_v(t)$ за умов складного напруженого стану в функції часу t . Параметри ядер визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер вибраним для ядра аналітичним виразом.

4. Визначення параметрів ядер спадковості

У якості об'єкту дослідження обрані тонкостінні трубчаті зразки з поліетилену високої щільності ПЕВП. Експериментальні дані запозичені з [2]. В якості базових експериментів розглядаються випробування тонкостінних трубчастих зразків на повзучість при

одновісному розтягу, при чистому крученні і при комбінованому навантаженні із розтягом і крученням. За даними випробувань на одновісний розтяг визначаються параметри ядер поздовжньої та зсувної повзучості.

В таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЕВП. Значення пружних сталей запозичені з [1].

Таблиця 1

Значення параметрів ядер спадковості для ПЕВП

$K_{11}(t), \text{ год}^{-1}$			$K_{21}(t), \text{ год}^{-1}$		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}
-0,6460	+0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197
$K_i(t), \text{ год}^{-1}$			$K_v(t), \text{ год}^{-1}$		
α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396

Значення параметрів ядер спадковості визначаються за результатами апроксимації дискретних значень ядер повзучості дробово-експоненційною функцією (4) за методикою викладеною в [1]. Розмірність коефіцієнтів β і λ – $\text{год}^{-(1+\alpha)}$, а коефіцієнт α – безрозмірний.

5. Розрахунок поздовжньої і зсувної повзучості

Розв'язується задача розрахунку деформацій поздовжньої і поперечної повзучості тонкостінних трубчатих зразків при одновісному розтягу і розтягу зі крученням, а також деформацій зсувної повзучості при чистому крученні і крученні з розтягом. Розв'язок будується на основі тривимірної моделі в'язкопружності (1) з використанням значень пружних сталей і значень параметрів ядер спадковості, наведених в таблицях 1 і 2.

Для компонент тензора деформацій повзучості $\varepsilon_{ij}(t)$ з (1) випливає рівняння

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(\sigma_i, t)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) \quad (14)$$

звідки для деформацій поздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ при двовісному комбінованому навантаженні розтягом із скрученням при $\sigma_{11} = const$ і $\tau_{21} = const$ з урахуванням (4) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{11} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\}, \quad (15)$$

і для деформації зсувної повзучості $\varepsilon_{21}(t)$ – рівняння

$$\varepsilon_{21}(t) = \frac{1}{2G} \tau_{21} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^n t^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1 + (1+n)(1+\alpha_i)]} \right\}^k. \quad (16)$$

Результати розрахунків деформацій поздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ і зсувної $\varepsilon_{21}(t)$ повзучостей тонкостінних трубчатих зразків з поліетилену високої щільності ПЕВП,

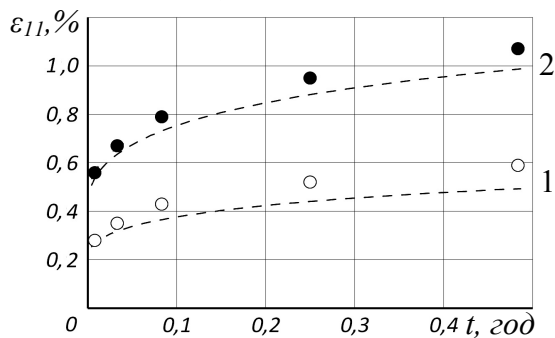


Рис.1 Поздовжня повзучість

виконаних за рівняннями (15) і (16) з використанням наведених в таблиці 1 значеннях пружних сталей і параметрів ядер спадковості, співставлені на рис. 1 і 2 з експериментальними даними. Результати розрахунків нанесені штриховими лініями, а експериментальні дані – точками.

Список використаних джерел

1. Голуб В.П. Идентификация ядер наследственности изотропных линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. 1. Суперпозиция сдвиговой и объемной ползучести / В. П. Голуб, Б. П. Маслов, П. В. Фернати // Прикл. механика. – 2016. – Том 52, № 2. – С. 78-90
2. Креггерс А.Ф. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений / А.Ф. Креггерс, М.Р. Килевич // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С. 195-201.

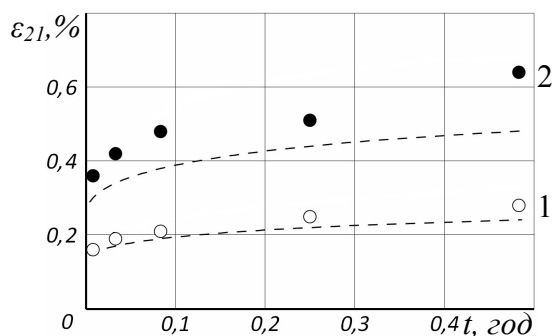


Рис.2 Поперечна повзучість

Деформації поздовжньої повзучості (рис. 1) і деформації зсувної повзучості (рис.2) розраховувались при напруженнях $\sigma_{11} = 1,77$ МПа і $\tau_{21} = 0,83$ МПа (криві 1; \circ) і при напруженнях $\sigma_{11} = 3,54$ МПа і $\tau_{21} = 1,66$ МПа (криві 2; \bullet).

6. Обговорення результатів

Наведені на рис. 1-2 результати розрахунків нормальних σ_{11} і дотичних τ_{21} напружень, свідчать про задовільне узгодження умові лінійності. Ця умова сформульована для складного напруженого стану і передбачає що за будь-якого фіксованого часу t_i інтенсивності деформацій повзучості $\varepsilon_i(t)$ знаходяться у тому ж відношенні між собою, як і інтенсивності напружень σ_i .

References

1. GOLUB, V. P. and MASLOV, B. P. and FERNATI, P.V. (2016) Identifikatsiya yader nasledstvennosti izotropnykh lineynovyazkouprugih materialov pri slozhnom napryazhenom sostoyanii. 1. Superpozitsiya sdvigovoy i ob'emnoy polzuchesti. *Prikladnaya mehanika*. 52 (2). p. 78-90.
2. KREGERS, A.F. and KILEVICH, M.R. (1985) Kompleksnoe issledovanie polietilena vyisokoy plotnosti v usloviyah nelineynoy polzuchesti i relaksatsii napryazheniy. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2. p. 195-201.

Надійшла до редколегії 15.09.2017