

УДК 534.1

Перепічка В. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Шацький І. П.², д. ф.-м. н., проф.

**Нестационарна взаємодія пружного
стержня з недеформівною основою через
жорсткопластичний прошарок із
зміцненням**

Івано-Франківський відділ Інституту
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, 76002,
м. Івано-Франківськ, вул. Микитинецькая, 3,
¹ e-mail: an_w@i.ua
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Perepichka V. V.¹, Ph.D., (Phys.-Math.),
Shatskyi I. P.², Dr.Sci., (Phys.-Math.).

**Nonstationary interaction of an elastic rod
with nondeformable foundation through a
rigid-plastic layer with hardening**

Ivano-Frankivsk Branch of Pidstryhach Institute for
Applied Problems of Mechanics and Mathematics,
NAS of Ukraine, 76002, Ivano-Frankivsk,
Mykutyynetska str., 3,
¹ e-mail: an_w@i.ua
² e-mail: ipshatsky@gmail.com

Розглянуто нестационарну задачу про розповсюдження ударної хвилі стиску у півнескінченному пружному стержні, бічна поверхня якого взаємодіє з абсолютно недеформівною основою через тонкий жорстко-пластичний прошарок з лінійним зміцненням. Аналітичний розв'язок початково-крайової задачі побудовано інтегральним перетворенням Лапласа. Проаналізовано вплив ефекту зміцнення на структуру області руху, на розподіл нестационарних полів переміщення, швидкості та напружень, знайдено залишкові напруження після зупинки стержня. Встановлено обмеження для співвідношення реологічних параметрів, за яких в системі не розповсюджуються відбиті хвилі.

Ключові слова: стержень, динаміка, жорстко-пластичний прошарок, зміцнення.

The wave problem of propagation and deceleration of shock pressure perturbation in semi-infinite elastic rod interacting with the medium is investigated using the model of elastoplastic resistance with increasing relation between shear stress and jump of displacement on the lateral surface (model of thin rigid-plastic layer with linear hardening). An exact analytical solution of the initial-boundary problem is obtained using the Laplace transforms. A wave pattern of perturbation including the prefront zone of rest, the area of motion and the domain of stationary residual stresses has been built. The three-dimensional diagrams for nonstationary fields of velocity and stresses have been constructed too. The influence of the hardening effect on the solution is analyzed. Restrictions for the ratio of rheological parameters, in which the reflected waves do not propagate in the system, are established.

Key Words: rod, dynamics, rigid-plastic layer, hardening.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

У окремих галузях матеріалознавства, будівництва та нафтогазової справи актуальними є задачі динамічної взаємодії стержневих систем з довкіллям за складних умов контакту на бічних поверхнях стержнів. Це стосується проблем розтріскування волокнистих композитів з непружною матрицею, будівництва на палях, сейсмосахисту трубопровідних систем, ліквідації прихоплень бурильної колони тощо. Задачі розповсюдження ударних хвиль у стержнях із зовнішнім сухим тертям докладно описано у праці [1]. Варіанти взаємодії стержня з основою через в'язко-пластичний бінгамівський прошарок розглядалися у статтях [2–4].

Постановка задачі

Досліджуємо нестационарну задачу про розповсюдження ударної хвилі стиску у півнескінченному пружному стержні, бічна поверхня якого взаємодіє з абсолютно недеформівною основою через тонкий жорстко-пластичний прошарок з лінійним зміцненням. Дотичні зусилля на контактних поверхнях стержня визначаються силами опору, котрі моделюються паралельним з'єднанням за Фойхтом елементів Сен-Венана та Гука (відповідна діаграма подана на рис. 1).

До торця стержня в початковий момент часу прикладається зусилля, яке залишається надалі сталим. Слід вивчити вплив зміцнення на структуру хвильового поля.

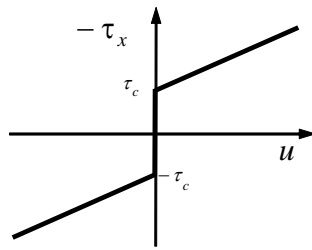


Рис. 1. Модель дотичних зусиль на бічних поверхнях стержня

Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщення стержня $u(x, t)$ має вигляд:

$$\frac{u''}{L} + \frac{\tau_x}{E} = \frac{\ddot{u}}{L}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{u} \neq 0: & \tau_x = -\tau_c \operatorname{sgn} \dot{u} - ku; \\ \dot{u} = 0: & |\tau_x + ku| < \tau_c. \end{cases} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad (3)$$

$$\frac{u'(0, t)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} H(t), \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Тут $x = X/L$, $t = cT/L$ – безрозмірні координата та час, $L = F/\Pi$ – характерний розмір, а F , Π – площа та периметр поперечного перерізу; $c = \sqrt{E/\rho}$ – швидкість хвилі; τ_x – дотичне напруження на бічній поверхні, $k = E_l/h_l$ – зведений модуль зміцнення, а τ_c , E_l та h_l – межа текучості, січний модуль матеріалу та товщина прошарку відповідно; σ_0 – величина напруження на торці стержня, $H(t)$ – функція Гевісайда.

Передбачаючи напрямок руху стержня ($\dot{u} > 0$) і припускаючи, що швидкість поширення збурення не перевищує акустичну швидкість в матеріалі стержня (область руху належить

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t)}{L} &= \frac{\sigma_0}{E} \left[\int_x^t J_0(\lambda \sqrt{\tau^2 - x^2}) d\tau + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{\lambda^2} \left\{ J_0(\lambda \sqrt{t^2 - x^2}) - 1 \right\} \right] H(t - x), \\ \frac{\dot{u}(x, t)}{L} &= \frac{\sigma_0}{E} \left[J_0(\lambda \sqrt{t^2 - x^2}) - \frac{\tau_c}{\sigma_0} t \frac{J_1(\lambda \sqrt{t^2 - x^2})}{\lambda \sqrt{t^2 - x^2}} \right] H(t - x), \\ \frac{u'(x, t)}{L} &= -\frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \lambda x \int_x^t \frac{J_1(\lambda \sqrt{\tau^2 - x^2})}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau - \frac{\tau_c}{\sigma_0} x \frac{J_1(\lambda \sqrt{t^2 - x^2})}{\lambda \sqrt{t^2 - x^2}} \right] H(t - x). \end{aligned} \quad (8)$$

Аналіз результатів

Для розрахунків взяли $\tau_c/\sigma_0 = 1$, $\lambda^2 = 2$.

Рис.2 подає в координатно-часовій площині хвилюву картину нестационарного збурення в

секторі $t > x$), дотичні напруження (2) подамо у вигляді:

$$\tau_x = -\tau_c H(t - x) - ku$$

і тим самим лінеаризуємо задачу (1)–(5). Цю дію слід трактувати як перший крок ітераційного процесу.

В такому разі рівняння (1) зводиться до лінійного неоднорідного рівняння Клейна-Гордона:

$$\frac{u''}{L} - \lambda^2 \frac{u}{L} = \frac{\ddot{u}}{L} + \frac{\tau_c}{E} H(t - x), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

де $\lambda^2 = kL/E = E_l L / (E h_l)$ – безрозмірний параметр зміцнення.

Аналітичний розв'язок

Розв'язок переформульованої задачі (5), (3), (4) побудуємо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Операційний еквівалент задачі у просторі зображень буде:

$$\frac{U''}{L} - (s^2 + \lambda^2) \frac{U}{L} = \frac{\tau_c}{E} \frac{e^{-sx}}{s}, \quad x > 0, \quad (6)$$

$$\frac{U'(0)}{L} = -\frac{\sigma_0}{E} \frac{1}{s}, \quad U(\infty) = 0. \quad (7)$$

Тут $U(x) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt$ – трансформанта переміщення, s – параметр перетворення.

У свою чергу розв'язок задачі (6)–(7) такий:

$$\frac{U(x)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left[\left(\frac{1}{s} + \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{e^{-x\sqrt{s^2 + \lambda^2}}}{\sqrt{s^2 + \lambda^2}} - \frac{\tau_c}{\sigma_0} \frac{1}{\lambda^2} \frac{e^{-sx}}{s} \right].$$

Переходячи до оригіналу, аналітичний розв'язок вихідної задачі та його похідні виразили через функції Бесселя:

стержні. Тут область A – передфронтна зона спокою, B – зона розповсюдження динамічного збурення в стержні, C – зона залишкових стаціонарних напружень. Штриховою лінією

показані відповідні зони для випадку сухого тертя. Зони *A* і *B* розділені характеристикою $x = t$, яка описує розповсюдження фронту хвилі і є лінією сильного розриву, тут мають місце стрибки швидкості і напружень. Розв'язок (8) справедливий в областях *A* та *B*, причому відсутність збурень у передфронтівій області врахована множителем Гевісайда.

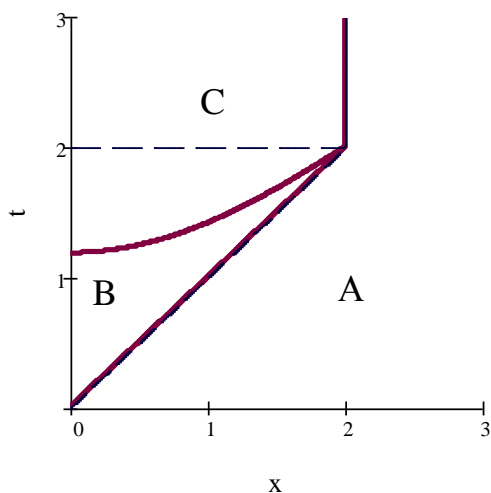


Рис. 2. Хвильова картина нестационарного збурення в стержні

В області *C* швидкість збурення $\dot{u}(x,t)$ стає від'ємною, тому отримані формули тут слід відкинути як такі, що суперечать вихідному припущенню про знак швидкості. Крива, що розділяє зони *B* і *C*, знаходиться числово з умови $\dot{u}(x,t) = 0$ і є лінією слабого розриву. При переході через неї рух припиняється, на ній мають місце стрибки прискорення, дотичного напруження і градієнта осьового напруження. У області *C* переміщення і напруження не змінюються з часом і мають значення, що зафіксовані на лінії зупинки. Дотичні напруження визначаються з рівнянь статки і дорівнюють градієнтові осьових напружень, обчислених на лінії слабого розриву. Вперше зупинка спостерігається на торці стержня. Безрозмірна довжина нестационарно збуреної ділянки $L_* = 2\sigma_0/\tau_c$ така ж, як і в задачі Нікітіна без зміцнення [1].

На рис. 3–5 подано графіки нестационарних полів швидкості та напружень у пружному стержні.

$$\frac{u(x,t)}{L} = \frac{\sigma_0}{E} \left\{ (t-x) - \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\sigma_0} (t^2 - x^2) - \left[\frac{1}{3} (t^3 - x^3) - x^2(t-x) - \frac{1}{16} \frac{\tau_c}{\sigma_0} (t^2 - x^2)^2 \right] \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4) \right\} H(t-x),$$

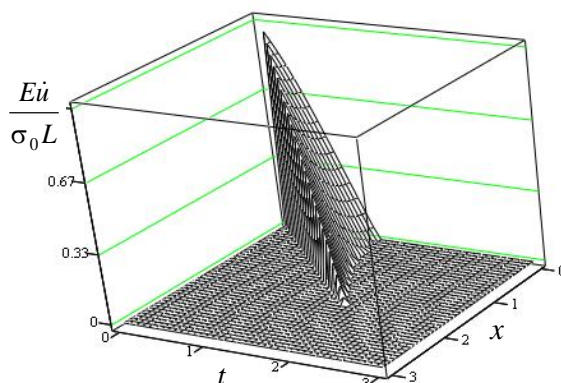


Рис. 3. Розподіл швидкості по довжині стержня

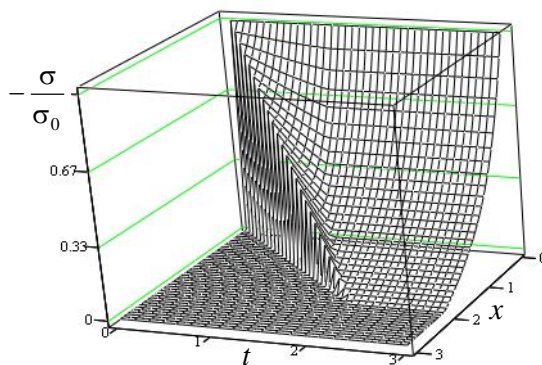


Рис. 4. Динамічне поле осьових напружень

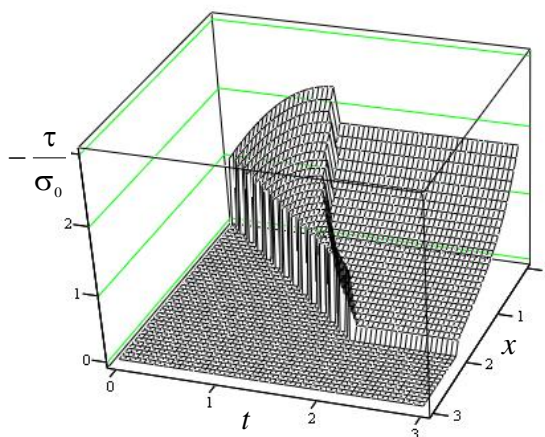


Рис. 5. Дотичні напруження на бічній поверхні

Крім того, для малого параметра зміцнення побудували асимптотичний розклад розв'язку (8) у першому наближенні:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}(x,t)}{L} &= \frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_c}{\sigma_0} t - \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\sigma_0} t \right) (t^2 - x^2) \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4) \right\} H(t-x), \\ \frac{u'(x,t)}{L} &= -\frac{\sigma_0}{E} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\tau_c}{\sigma_0} x + \left[2x(t-x) - \frac{1}{4} \frac{\tau_c}{\sigma_0} x(t^2 - x^2) \right] \frac{\lambda^2}{4} + O(\lambda^4) \right\} H(t-x).\end{aligned}\quad (10)$$

Ці вирази справедливі в області руху, обмеженій лінією зупинки:

$$t = t_*(x) = \frac{2\sigma_0}{\tau_c} \left[1 - (L_*^2 - x^2) \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^4) \right]. \quad (10)$$

Нарешті, залишкові напруження в області C є такими:

$$\begin{aligned}\sigma^{res}(x) &= -\sigma_0 \left[1 - \frac{x}{L_*} + x(L_* - x) \left(3 - \frac{x}{L_*} \right) \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^4) \right] H(L_* - x), \\ \tau_x^{res}(x) &= -\frac{\tau_c}{2} \left[1 + (3L_*^2 - 8L_*x + 3x^2) \frac{\lambda^2}{8} + O(\lambda^4) \right] H(L_* - x).\end{aligned}\quad (11)$$

При $\lambda = 0$ і точний, і асимптотичний результати дають розв'язок задачі для чисто сухого тертя [1] (або для жорстко-пластичного прошарку). Асимптотики (9)–(11) також якісно узгоджуються з графічно поданими числовими результатами.

Аналіз показав, що для значного зміцнення (грубо при $\lambda > 3\tau_c/\sigma_0$) порушуються вихідні припущення про структуру хвильового поля і

можливими є поява відбитих хвиль та зміна напрямку проковзування.

Висновки

У розглянутій задачі, на противагу випадковій жорстко-пластичного прошарку, зупинка руху не відбувається одномоментно, а збурена ділянка стержня рухається як деформівне тіло. Зупинка руху завжди починається зі сторони торця. Ефект зміцнення не впливає на довжину збуреної ділянки.

Для слабкого зміцнення отриманий розв'язок асимптотично близький до розв'язку задачі Нікітіна [1]. Для значного зміцнення очікується поява відбитих хвиль та ділянок зворотного проковзування з рухомими межами.

Поля залишкових напружень, що знаходяться за результатами обчислення градієнта напружень на лінії зупинки руху, характеризуються великою варіативністю залежно від параметрів задачі.

Список використаних джерел

1. Нікітін Л. В. Статика и динамика твердых тел с внешним сухим трением / Л. В. Нікітін. – Москва: Моск. лицей, 1998. – 272 с.
2. Шацкий И. П. Распространение ударной волны в упругом стержне с вязкопластическим внешним сопротивлением / И. П. Шацкий, В. В. Перепичка // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 6. – С. 175–180.
3. Шацкий И. П. Нестационарный скрут пружного стержня з в'язкопластичним зовнішнім опором / І. П. Шацкий, В. В. Перепічка // Доповіді НАН України. – 2014. – № 10. – С. 63–69.
4. Shatskyi I. Dynamic problem for an elastic rod with decreasing function of viscoplastic friction / I. Shatskyi, V. Perepichka // Proc. 22nd Int. Conf. "MECHANIKA 2017" (19 May 2017, Kaunas, Lithuania). – P. 348–350.

References

1. NIKITIN, L. V. (1998) *Statika i dinamika tverdykh tel s vneshnim sukhim treniem*. Moskva: Mosk. Litsei.
2. SHATSKII, I. P. & PEREPICHKA, V. V. (2013) Shock wave propagation in an elastic rod with a viscoplastic external resistance. *J. Appl. Mech. and Techn. Phys.* 54 (6), pp. 1016–1020.
3. SHATSKY, I. P. & PEREPICHKA, V. V. (2014) Nestationarnyi skrut pruzhnoho sterzhnya z v'iazkoplasychnym zovnyshnim oporom. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukrainy*. (10), pp. 63–69.
4. SHATSKYI, I. P. & PEREPICHKA, V. V. Dynamic problem for an elastic rod with decreasing function of viscoplastic friction. *Proc. 22nd Int. Conf. "MECHANIKA 2017"* (19 May 2017, Kaunas, Lithuania), pp. 348–350.

Надійшла до редколегії 29.08.17