

УДК 539.3

Середницька Х. І., к.ф.-м.н.,
Мартиняк Р. М., д.ф.-м.н., проф.

Теплові потоки на берегах заповненої теплопровідним середовищем міжфазної тріщини

Інститут прикладних проблем механіки і мате-
матики ім. Я. С. Підстригача НАН України,
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.),
R. M. Martynyak, Dr. Sci. (Phys.-Math.).

The heat flows on the faces of interfacial crack, which filled thermo-conducting medium

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Me-
chanics and Mathematics, National Academy of
Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b,
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

На основі розв'язку задачі термопружності для біматеріального тіла з міжфазною заповненою теплопровідним середовищем тріщиною досліджено розподіл потоку тепла через міжфазну лінію в межах тріщини і поза нею. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини та напряму прикладеного до тіла теплового потоку на нормальну і дотичну складові вектора теплового потоку.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна тріщина, теплопровідний заповнювач, вектор теплового потоку.

Thermal conductivity of the interfacial crack filled with a heat-conducting medium is investigated. The bimaterial with different thermo-mechanical parameters of materials and with zero Dundurs parameter is considered. A crack with a fixed length and heat-conducting filler is located on the interface of bimaterial. The heat conduction between faces crack is determined by thermal resistance, which proportional to the opening crack and inversely proportional to the filler thermal conductivity. The opening crack is modified under the thermal and mechanical loads. Based on the solution of the thermoelastic problem for the bimaterial with such a crack, the distribution of the heat flow vector at the interface on crack and outside is determined. The dependence of the tangential and normal components of the heat flow vector on filler's thermal conductivity and direction of the heat flow applied to the bimaterial is analyzed. It is shown, that the absolute value of the normal component (tangential component) of the heat flow vector across crack increases (decreases) with increasing of the filler's thermal conductivity.

Key Words: bimaterial, interfacial crack, heat-conducting filler, heat flow vector.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

1. Вступ

Термопружний стан тіл з тріщинами суттєво залежить від передачі тепла між її берегами, що відбувається через заповнювач тріщин. Використовуючи умови теплового контакту тіл через тонкий прошарок, у праці [1] змодельовано теплопередачу між берегами тріщини в однорідному матеріалі, припускаючи, що термоопір заповнювача тріщини не залежить від її розкриття. Розв'язано задачі термопружності для однорідних [2] і функціонально градієнтних тіл [3] з теплопроникними тріщинами та для біматеріальних тіл з міжфазними теплопроникними тріщинами [4], термоопір яких наперед заданий. Термонапружений стан біматеріалу з міжфазною тріщиною, заповненою теплопровідним середовищем,

термоопір якої залежить від її розкриття і змінюється в процесі навантаження, досліджено у праці [5], де проаналізовано розподіл розкриття тріщини та стрибка температури між її берегами.

У даній статті досліджено залежність компонент вектора теплового потоку на міжфазній лінії та берегах тріщини від коефіцієнта теплопровідності її заповнювача і напряму прикладеного до біматеріалу теплового потоку.

2. Формулювання задачі

Розглянемо біматеріал, компонентами якого є півплощини D_1 і D_2 , що характеризуються коефіцієнтами теплопровідності λ_1 і λ_2 , коефіцієнтами лінійного теплового розширення α_1 і α_2 ,

коефіцієнтами Пуассона ν_1 і ν_2 , модулями зсуву G_1 і G_2 . Вважаємо, що пружні сталі пов'язані між собою залежністю $G_1(1-2\nu_2) = G_2(1-2\nu_1)$, тобто параметр Дандерса [6] біматеріалу рівний нулеві. На міжфазній лінії біматеріалу розташована тріщина завдовжки $2a$ (рис. 1). Порожнича тріщини заповнена середовищем (газом, рідиною) з коефіцієнтом теплопровідності λ_c . Вважаємо, що заповнювач тріщини не чинить опору деформуванню тіла.

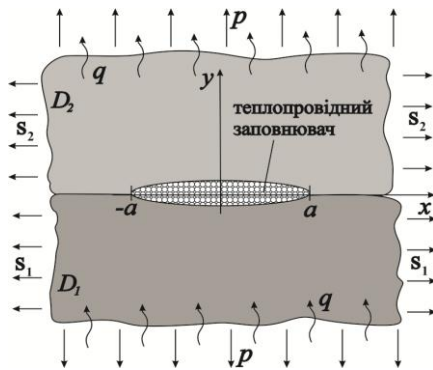


Рис. 1 Біматеріал з міжфазною тріщиною

До біматеріалу на нескінченності прикладено перпендикулярні до міжфазної лінії однорідний стаціонарний тепловий потік q та рівномірно розподілені розтягувальні навантаження p . Паралельно міжфазній лінії, до півплощин D_1 і D_2 на нескінченності прикладені лінійно розподілені по координаті y нормальні напруження S_1 і S_2 [5], які компенсують поздовжню деформацію в напрямку осі Ox і глобальне викривлення границь півплощин, що зумовлені зусиллями p і тепловим потоком q .

В біматеріалі реалізується двовимірне стаціонарне поле і стан плоскої деформації. Береги тріщини вільні від напружень, а вплив теплопровідності заповнювача тріщини на теплопередачу між берегами враховуватимемо [5] термоопором, пропорційним розкриттю тріщини $h(x)$, що змінюється в процесі навантаження, і обернено пропорційним коефіцієнту теплопровідності заповнювача λ_c . Поза тріщиною виконуються умови ідеального теплового і механічного контакту півплощин D_1 і D_2 .

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Згідно з викладеною у праці [5] методикою сформульовану задачу зведено до системи нелі-

нійних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно розкриття тріщини $h(x)$ та стрибка температури між її берегами $\gamma(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{Kp}{2} - \frac{\lambda \eta^-}{2} \gamma(x), \quad |x| < a, \quad (1)$$

$$\lambda_c \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = q, \quad |x| < a, \quad (2)$$

де $K = (1 - \kappa_1 \kappa_2) / (G_1(1 - \kappa_2))$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$; $\lambda = 2\lambda_1 \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2)$; $\eta_i = \alpha_i(1 + \nu_i) / \lambda_i$ – термічна дистортивність компонент біматеріалу D_i ; $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$, $i = 1, 2$.

Шукані функції на кінцях тріщини задовольняють умови $h(\pm a) = 0$, $\gamma(\pm a) = 0$.

Розв'язок системи (1), (2) побудовано на основі аналітично-числової процедури, викладеної у праці [5].

4. Компоненти вектора теплового потоку

За знайденими функціями стрибка температури $\gamma(x)$ та розкриття тріщини $h(x)$ визначаємо температуру, компоненти вектора теплового потоку та напруження в біматеріалі.

Нормальна і дотична складова вектора теплового потоку на міжфазній лінії мають вигляд

$$q_x^+ = \frac{\lambda}{2} \gamma'(x), \quad q_x^- = -\frac{\lambda}{2} \gamma'(x), \quad |x| < a,$$

$$q_x^+ = -q_x^- = 0, \quad |x| \geq a, \quad (3)$$

$$q_y^+ = q_y^- = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} + q, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4)$$

Тут q_x , q_y – компоненти вектора теплового потоку. Верхніми індексами „+” і „-” позначено граничні значення величин на міжфазній лінії в півплощинах D_1 і D_2 відповідно.

5. Числові результати та їх аналіз

Для числових розрахунків вводимо в розгляд безрозмірні величини: розкриття тріщини $\bar{h} = h/a$, стрибок температури $\bar{\gamma} = \lambda \eta^- \gamma$, коефіцієнт теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c = \lambda_c / \lambda$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = Kp$, тепловий потік $\bar{q} = q a \eta^-$, змінну $\bar{x} = x/a$, нормальну $\bar{q}_y = q_y a \eta^-$

і дотичну $\bar{q}_x^+ = q_x^+ a \eta^-$ складові вектора теплового потоку. Вважаємо, що термічні дистортивності матеріалів різні ($\eta_1 \neq \eta_2, \eta^- \neq 0$).

Безрозмірний тепловий потік \bar{q} набуває додатніх значень ($\bar{q} > 0$), якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою термічною дистортивністю (ТД), та від'ємних ($\bar{q} < 0$), якщо до матеріалу з меншою ТД.

Числовий аналіз проведено для $\bar{p} = 0.01$.

На рис. 2 проілюстровано вплив теплопровідності заповнювача тріщини і напряму заданого на нескінченності теплового потоку на розподіл дотичної складової вектора теплового потоку \bar{q}_x^+ на міжфазній лінії. Дотична складова вектора теплового потоку \bar{q}_x^+ змінюється в межах тріщини, поза тріщиною рівна нулю. Зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ абсолютна величина \bar{q}_x^+ зменшується. У випадку теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД, \bar{q}_x^+ набуває більших за абсолютною величиною значень порівняно з випадком теплового потоку до матеріалу з меншою ТД. Зі збільшенням $\bar{\lambda}_c$ зменшується різниця між значеннями $|\bar{q}_x^+|$ при зміні напряму теплового потоку \bar{q} .

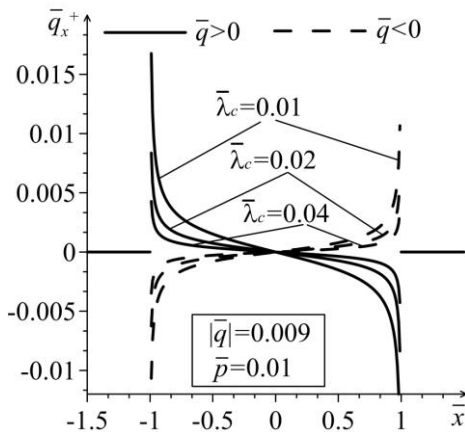


Рис. 2 Розподіл дотичної складової вектора теплового потоку на міжфазній лінії

Розподіл нормальної складової вектора теплового потоку \bar{q}_y на міжфазній лінії для різних значень коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини $\bar{\lambda}_c$, якщо тепловий потік скерований до матеріалу з більшою ТД, зображено на рис. 3. Бачимо, що \bar{q}_y має мінімальне значення в центрі тріщини, зростає при наближенні до її кі-

нців, де має місце розрив другого роду, а з віддаленням від кінців тріщини спадає, асимптотично прямуючи до значення прикладеного на нескінченності теплового потоку \bar{q} . Зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача $\bar{\lambda}_c$ нормальна складова \bar{q}_y зростає в межах тріщини і спадає поза тріщиною. У випадку, коли прикладений на нескінченності тепловий потік скерований до матеріалу з меншою ТД, розподіл нормальної складової вектора теплового потоку \bar{q}_y на міжфазній лінії по абсолютній величині має аналогічний характер, відрізняючись лише тим, що в центрі тріщини має максимум.

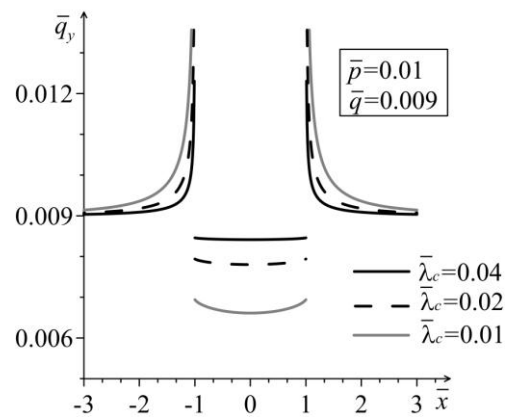


Рис. 3 Розподіл нормальної складової вектора теплового потоку на міжфазній лінії для заданого на нескінченності теплового потоку, скерованого до матеріалу з більшою ТД

На рис. 4 проілюстровано розподіл модуля нормальної складової вектора теплового потоку $|\bar{q}_y|$ вздовж тріщини для двох напрямів теплового потоку, заданого на нескінченності.

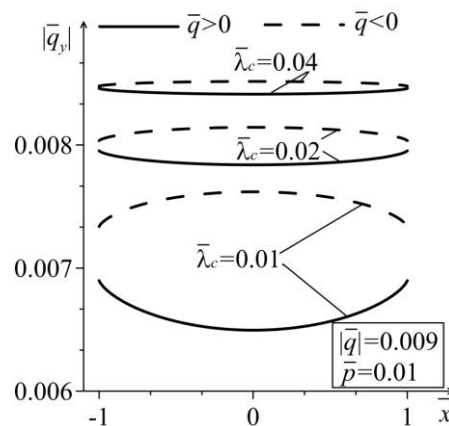


Рис. 4 Розподіл абсолютної величини нормальної складової вектора теплового потоку на берегах

тріщини за двох напрямів теплового потоку, заданого на нескінченності

Бачимо, що при збільшенні $\bar{\lambda}_c$ для обох напрямів заданого на нескінченності теплового потоку $|\bar{q}_y|$ зростає, проте різниця між значеннями $|\bar{q}_y|$ при зміні напрямку потоку зменшується.

6. Висновки

На основі розв'язку задачі термопружності для біматеріалу з міжфазною тріщиною, що містить теплопровідний заповнювач, досліджено розподіл потоку тепла на міжфазній лінії. Проаналізовано залежності нормальної і дотичної складової вектора міжфазного теплового потоку від коефіцієнта теплопровідності заповнювача

тріщини та напрямку прикладеного на нескінченності теплового потоку, з урахуванням того, що термоопір тріщини пропорційний її розкриттю, яке змінюється в процесі навантаження. Показано, що зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача в межах тріщини абсолютна величина нормальної складової вектора теплового потоку зростає, а абсолютна величина дотичної – спадає. Поза тріщиною відмінною від нуля є нормальна складова, модуль якої зі збільшенням теплопровідності заповнювача спадає. Зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності заповнювача тріщини збільшується різниця в розподілах компонент вектора теплового потоку на міжфазній лінії при зміні на протилежний напрямку заданого на нескінченності теплового потоку.

Список використаних джерел

1. Подстригач Я.С. Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин / Я.С. Подстригач, Г.С. Кит // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 194-201.
2. Кит Г.С. Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной / Г.С. Кит, О.В. Побережный // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – № 9. – С. 78-88.
3. El-Borgi S. A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgi, F. Erdogan, L. Hidri // Int. J. Eng. Sci. – 2004. – 42. – P. 371–393.
4. Мартиняк Р.М. Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором / Р.М. Мартиняк, Х.І. Гончар, С.П. Нагалка // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 5. – С. 59-66.
5. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Средницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
6. Schmauder S. Correlation between Dundurs' parameters and elastic constants / S. Schmauder, M. Meyer // Z. Metallkunde. – 1992. – Vol. 83. – P. 524–527.

References

1. PODSTRIGACH, Ya. S. & KIT, H. S. (1967) Opredelyeniye temperaturnykh poley i naprygeniy v okrestnosti teploprovodyashchih treshchin. *Teplovyye napryageniya v elementah konstruktsiy*. 7. p. 194-201.
2. KIT, H. S. & POBEREGNYY, O. V. (1970) Termouprugoye sostoyaniye beskonechnogo tela s teploprovodyashchey krugovoy treshchenoy. *Teplovyye napryageniya v elementah konstruktsiy*. 9. p. 78-88.
3. EL-BORGI, S. & ERDOGAN, F. & HIDRI, L. (2004) A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading. *Int. J. Eng. Sci.* 42. p. 371–393.
4. MARTYNYAK, R. M. & HONCHAR, KH. I. & NAGALKA, S. P. (2003) Modelyuvannia termomekhanichnoho zakryttya pochatkovo rozkrytoji mizhfaznoi trishchyny, nadilenoji termooporom. *Fizyko-khimichna mekhanika materialiv*. 39 (5). p. 59-66.
5. MARTYNYAK, R. M. & SEREDNYTSKA, K. I. (2017) *Kontaktni zadachi termoprugnosti dlya migfaznyh trishchyn v bimaterialnyh tilah*. Lviv : Rastr-7.
6. SCHMAUDER, S. & MEYER, M. (1992) Correlation between Dundurs' parameters and elastic constants. *Z. Metallkunde*. 83. p. 524–527.

Надійшла до редколегії 22.08.2017