

УДК 539.3

Федорченко Л. М., к. ф.-м. н.

L.N. Fedorchenko, Ph.D. (Phys.-Math.)

**Вплив стороннього струму на  
напружено-деформований стан  
ортотропної циліндричної оболонки**

**Influence of extraneous current on the  
stress-strain state of orthotropic cylindrical  
shell**

Київський національний університет імені  
Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т.  
Глушкова, 4е,  
e-mail: [fedorchenko555@gmail.com](mailto:fedorchenko555@gmail.com)

Taras Shevchenko National University of Kyiv,  
03680, Kyiv, Glushkova st., 4 e,  
e-mail: [fedorchenko555@gmail.com](mailto:fedorchenko555@gmail.com)

*Дана робота присвячена дослідженню впливу стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки, яка знаходиться в нестационарному магнітному полі. Проведено аналіз її напружено-деформованого стану при різних значеннях величини стороннього струму.*

*Ключові слова: ортотропна оболонка, сторонній струм, магнітопружність.*

*The problem of the effect of external current on the stress-strain state of an orthotropic cylindrical shell with orthotropic electrical conductivity is relevant both from a theoretical and a practical point of view. Having an idea of the behavior of a shell in a magnetic field under the influence of an extraneous current, we can optimize its stress-strain state. Thus, to avoid the destruction of the design element, and therefore to increase the bearing capacity of the structure as a whole.*

*The analysis of electromagnetic effects is investigated on the basis of the Maxwell equations in Lagrangian variables together with material relations and equations of motion. When constructing geometrically nonlinear equations of an orthotropic cylindrical shell, orthotropic electric conductivity is also taken into account.*

*In the paper, the numerical technique for solving the nonlinear problem of magnetoelasticity for shells is developed on the basis of the consecutive application of the Newmark finite-difference scheme, the method of quasilinearization along with the method of discrete-orthogonalization. A numerical example is considered. The effect of extraneous current on the stress state of a orthotropic cylindrical shell is analyzed.*

*Key Words: orthotropic shell, extraneous current, magnetoelasticity.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Задача про вплив стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки з ортотропної електропровідністю є актуальною як з теоретичної так і з практичної точки зору. Маючи уявлення про поведінку оболонки в магнітному полі при дії стороннього струму ми можемо оптимізувати її напружено-деформований стан. Тим самим уникнути руйнування елемента конструкції, а отже і збільшити несучу здатність конструкції в цілому.

**Постановка задачі.** Розглядаємо гнучку ортотропну циліндричну оболонку змінної товщини з ортотропною електропровідністю в лагранжевих змінних. Такий підхід дає

можливість використовувати співвідношення деформацій і кривизн з урахуванням нелінійності.

Припускаємо, що оболонка знаходиться під дією нестационарного механічного і електромагнітного впливів. Нехтуючи впливом процесів поляризації і намагнічування, а також температурними напруженнями. Приймаємо, що до торця оболонки підводиться змінний електричний струм  $J_{\text{вст}}$  від зовнішнього джерела [1].

Серединну поверхню оболонки в недеформованому стані віднесемо до криво-лінійної системи координат  $s$  і  $\theta$ , де  $s$  – довжина дуги меридіана,  $\theta$  – центральний кут.

Координатні лінії  $s = const$ ,  $\theta = const$  є лініями головних кривизн серединної поверхні.

Пружні властивості матеріалу – ортотропні, головні напрямки пружності яких співпадають з відповідними координатними лініями.

Електромагнітні властивості матеріалу характеризуються тензорами електричної провідності  $\sigma_{ij}$ , діелектричної проникності  $\varepsilon_{ij}$  та магнітної проникності  $\mu_{ij}$ .

Процес деформування описується геометрично нелінійною теорією в квадратичному наближенні.

Аналіз електромагнітних ефектів досліджуємо на основі системи рівнянь Максвелла в лагранжевих змінних разом з матеріальними співвідношеннями і рівняннями руху.

Розглядаємо тіла з ромбічною кристалічною структурою. Виходячи з кристалографії [2] тензори  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$  приймають діагональний вигляд.

Беремо у якості незалежної змінної довжину дуги меридіану циліндра  $s$ , тоді величини, що характеризують геометрію оболонки, запишуться наступним чином:

$$\frac{1}{R_s} = 0, \quad r = R$$

Враховуючи діагональний вигляд тензорів і геометрію циліндричної оболонки розв'язувальна система рівнянь магнітопружності осесиметричної ортотропної оболонки обертання має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{1 - \nu_s \nu_\theta}{e_s h} N_s - \frac{\nu_\theta}{r} w - \frac{1}{2} g_s^2, \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= -g_s, \quad \frac{\partial g_s}{\partial s} = \frac{12(1 - \nu_s \nu_\theta)}{e_s h^3} M_s, \\ \frac{\partial N_s}{\partial s} &= -F_s - h J_{\text{ост}} B_\gamma - \\ &- \sigma_1 h \left[ E_\theta B_\gamma + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma^2 \right] + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_s}{\partial s} &= \frac{\nu_\theta e_\theta}{r e_s} N_s + e_\theta h \frac{w}{r} - F_\gamma - \\ &- 0,5 h J_{\text{ост}} (B_s^+ + B_s^-) - \sigma_3 h [-0,5 E_\theta (B_s^+ + B_s^-) - \\ &- 0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ - B_s^-)^2 + \\ &+ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma (B_s^+ + B_s^-)] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= Q_s + N_s g_s - \frac{\nu_s M_s}{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\gamma}{\partial s} &= -\mu \sigma_2 \left[ E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma \right] + \\ &+ \frac{(B_s^+ - B_s^-)}{h}, \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Де  $u$ ,  $w$  – переміщення;  $N_s$  – нормальні зусилля;  $Q_s$  – поперечні зусилля;  $M_s$  – згинальний момент;  $g_s$  – кут повороту нормалі;  $h = h(s)$  – товщина оболонки;  $\rho$  – густина матеріалу;  $r(s)$  – радіус кола оболонки;  $\nu_s$ ,  $\nu_\theta$  – коефіцієнти Пуассона;  $e_s$ ,  $e_\theta$  – модулі Юнга;  $F_i$  – механічна сила;  $E_\theta$  – компонента напруженості електричного поля;  $B_\gamma$  – нормальна складова магнітної індукції;  $B_s^+$ ,  $B_s^-$  – відомі складові магнітної індукції на поверхнях оболонки;  $J_{\text{ост}}$  – складова густини стороннього електричного струму.

Розв'язувальна система рівнянь є нелінійною гіперболічно-параболічною системою восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами. Для визначення сталих, що з'являються в загальному розв'язку системи рівнянь після інтегрування, необхідно задати граничні та початкові умови на кінцях оболонки. Граничні умови для функцій, що характеризують механічну частину задачі, задаються так само, як і у звичайній теорії оболонок. Крайові умови для електромагнітних функцій можуть задаватись через компоненти електромагнітного поля або комбінацію компонент магнітних і електричних полів. При цьому початкові умови задаються в класичному вигляді.

#### Методика чисельного розв'язання осесиметричних задач оболонок обертання.

Дослідження напружено-деформованого стану ортотропних оболонок обертання зводиться до розв'язання нестационарної крайової задачі, яка описується системою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних восьмого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Для ефективного використання запропонованої методики нехтуємо скін-ефектами, які виникають по товщині ортотропної оболонки, і електромагнітний процес швидко виходить на режим, який близький до усталеного.

Застосовуючи схему Ньюмарка, весь інтервал зміни часу розбивається на окремі малі інтервали. При заміні похідних за часом скінченно-різницевиими виразами, згідно схеми Ньюмарка, необхідно враховувати взаємозв'язок

між кроком за часом і кроком інтегрування по просторовій координаті.

Співвідношення кроків різницевої схеми за часом і просторовою координатою обумовлюється критерієм стійкості Куранта.

За допомогою метода квазілінеаризації крайова задача магнітопружності, яка описує напружено-деформівний стан оболонок обертання, зводиться до послідовності лінійних крайових задач. Кожна з лінійних задач розв'язується чисельно стійким методом дискретної ортогоналізації [3-4].

### Числовий приклад.

Розглянемо задачу про вплив стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки з кадмію змінної товщини  $h = 5 \cdot 10^{-4} (1 + 0.3 \sin \frac{\pi s}{l}) \text{ м}$  ( $l$  – довжина оболонки). Оболонка знаходиться під впливом нормального навантаження  $P_\gamma = 1 \cdot 10^3 \text{ н/м}^2$ . Напружений стан ортотропної циліндричної оболонки досліджувався в залежності від дії тангенційної складової стороннього струму  $J_{\theta CT}$ .

Граничні умови вибираємо наступним чином:

$$u = 0, Q_s = 1 \cdot 10^3, M_s = 0; B_\gamma = 0,5 \sin \omega t$$

при  $s = s_0$

$$u = w = M_s = 0; B_\gamma = 0 \text{ при } s = s_N.$$

Параметри оболонки і матеріалу взяті наступні:

$$S_0 = 0; S_N = 0,5i; \omega = 314,16\tilde{n}^{-1}; B_s^\pm = 0,1T\ddot{e}$$

$$e_s = 8,1 \cdot 10^{10} \tilde{f} / i^2; e_\theta = 2,82 \cdot 10^{10} \tilde{f} / i^2;$$

$$\nu_s = 0,3; \nu_\theta = 0,3; \rho = 8640\tilde{e}\tilde{a} / i^3;$$

$$\mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \tilde{A}i / i; \sigma_1 = 0,147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot i)^{-1};$$

$$\sigma_2 = 0,147 \cdot 10^8 (\tilde{h} \cdot i)^{-1};$$

Розв'язок задачі отримано на інтервалі часу  $t = 1 \cdot 10^{-2} \tilde{n}$ , крок інтегрування за часом  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ .

Досліджуємо вплив стороннього струму на напружено-деформівний стан ортотропної циліндричної оболонки. При розв'язанні крайової задачі магнітопружності оболонки, необхідно задати початкову ітерацію. Початкова ітерація визначається з рівнянь лінійної задачі магнітопружності (лінійні рівняння руху пластини і лінеаризовані рівняння Максвелла).

Величину стороннього струму і його напрямок вибираємо наступним чином:

$$1). J_{\theta CT} = 0 \text{ (A/м}^2\text{); } 2). J_{\theta CT} = 1 \cdot 10^5 \text{ (A/м}^2\text{);}$$

$$3). J_{\theta CT} = -1 \cdot 10^5 \text{ (A/м}^2\text{);} \quad (2)$$

Результати розв'язку розглянутої задачі приведені нижче у вигляді графіків.

Лінії 1-3 відповідають значенням стороннього струму (2).

На Рис. 1 представлені результати розподілу нормальної складової сили Лоренца  $\rho F_\gamma^\wedge(t)$  на лівому контурі при  $s = 0i$  для ортотропної циліндричної оболонки з кадмію. З графіка видно, що максимальні значення сили Лоренца досягаються при додатному значенні стороннього струму.

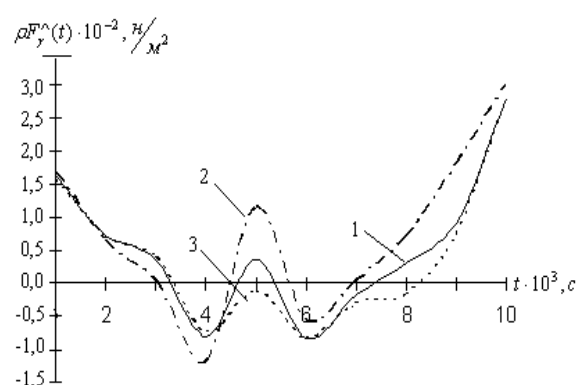


Рис. 1 Розподілу нормальної складової сили Лоренца  $\rho F_\gamma^\wedge(t)$  на лівому контурі

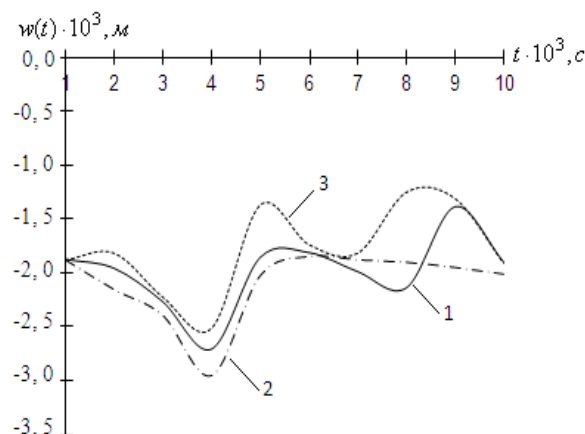


Рис. 2. Зміна прогину  $w$  в залежності від часу  $t$  на лівому контурі

На Рис. 2 приведено зміну прогину  $w$  в залежності від часу  $t$  на лівому контурі. При додатному значенні струму абсолютне значення прогину збільшується в порівнянні з його відсутністю. Абсолютне значення  $w/h \approx 5,89$ . В той час як при від'ємному значенні струму, абсолютне значення струму зменшується.

Абсолютне значення  $w/h \approx 5,12$ . Максимальні значення досягаються при  $t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ c}$ . Це пояснюється тим, що пондеромоторна сила, за наявності стороннього струму, має дві складові, які залежать від індукційного електромагнітного поля утвореним зовнішнім магнітним полем і стороннім струмом. У одному випадку ці складові діють співнапрямлено, а у іншому – протилежно напрямлено.

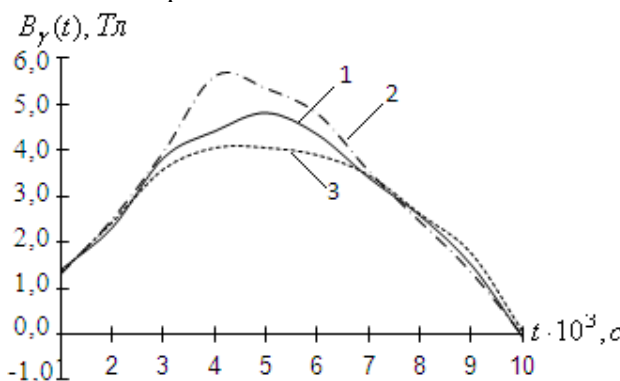


Рис. 3. Зміна тангенційної складової магнітної індукції в залежності від часу  $t$  на лівому контурі

На Рис. 3 приведено зміну тангенційної складової магнітної індукції  $B_y(t)$  в залежності від часу  $t$  на лівому контурі при  $s = 0i$ . Максимальні значення досягаються при додатному значенні стороннього струму при  $t = 4 \cdot 10^{-3} \text{ c}$ . Бачимо, що зі збільшенням значення стороннього струму значення магнітної індукції збільшується.

#### Висновки

В даній статті проведено аналіз впливу стороннього струму на напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки з ортотропною електропровідністю. Враховуючи проведений аналіз можна відмітити значний вплив стороннього струму на її напружено-деформований стан. Приведені результати дають можливість стверджувати, що на напружено-деформований стан впливає як величина струму так і його напрямок. Таким чином змінюючи величину та напрям струму можна оптимізувати напружено-деформований стан ортотропної циліндричної оболонки.

#### Список використаних джерел

1. Molchenko L.V. Influence of extraneous current on the stress state of an orthotropic ring plate with orthotropic conductivity / L.V. Molchenko, I.I. Loos, L.M. Fedorchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – Vol.50, N 6. – P. 683-687.
2. Келли А., Кристаллография и дефекты в кристаллах / А. Келли, Г. Гровс. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Mol'chenko L.V. A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells / L.V. Mol'chenko // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – Vol.41, No 5.
4. Bian Yu-Hong Analysis of nonlinear stresses and strains in a thin current-carrying elastic plate / Bian Yu Hong // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – Vol.51, № 1. – P. 108–120.
5. Mol'chenko L.V. Deformation of a flexible orthotropic spherical shell of variables stiffness in a magnetic field / L.V. Mol'chenko, I.I. Loos, L.M. Fedorchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – Vol.52. № 1. – P. 56-61.

#### References

1. MOL'CHENKO L., LOOS I. and FEDORCHENKO L. (2014) Influence of extraneous current on the stress state of an orthotropic ring plate with orthotropic conductivity. *Int. Appl. Mech.* 50 (6). p. 683-687.
2. KELLI, A. and GROVS, G. (1974) *Kristallografiya i defekti v kristalakh*. Moskva: Mir.
3. MOL'CHENKO, L.(2005) A method for solving two-dimensional nonlinear boundary-value problems of magnetoelasticity for thin shells. *Int. Appl. Mech.* 41 (5).
4. BIAN YU-HONG (2015) Analysis of nonlinear stresses and strains in a thin current-carrying elastic plate. *Int. Appl. Mech.* 51 (1). p.108-120.
5. MOL'CHENKO L., LOOS I. and FEDORCHENKO L. (2016) Deformation of a flexible orthotropic spherical shell of variables stiffness in a magnetic field. *Int. Appl. Mech.* 52 (1). p. 56-61.

Надійшла до редколегії 26.08.2017