

УДК 539.3

Хома І.Ю.¹, д. ф.-м. н., с.н.с.,
Дашко О.Г.¹, к. ф.-м. н.,
Прощенко Т.М.², к. ф.-м. н., доц.

Третя крайова задача деформування транстропної пластини з круговим отво- ром при чистому зсуві на нескінченності

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН
України, 03057 м. Київ, вул. П. Нестерова, 3,
e-mail: olga.dashko@gmail.com

² Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 83000, м. Київ, пр-т.
Глушкова 4д,
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

I. Yu. Khoma¹, Dr. (Phys.-Math.),
O. G. Dashko¹, Ph. D. (Phys.-Math.),
T. M. Proshchenko², Ph. D. (Phys.-Math.).

The third boundary problem of deformation transtropic plate with a circular hole in pure shear at infinity

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P. Nesterov str., 3
e-mail: olga.dashko@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv,
83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: t.proshchenko@gmail.com

Викладено метод побудови розв'язку задачі про напружений стан трансверсально-ізотропної товстої пластини, послабленої круговим отвором. На поверхні отвору задано нульові значення нормального переміщення і дотичних напружень, тобто поставлено умови одного з видів однорідної третьої крайової задачі теорії пружності. На нескінченності пластини знаходиться під дією постійних зсувних навантажень. Задача розв'язується на основі методу розкладу шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини.

Ключові слова: транстропний матеріал, товста пластини, зсувні напруження, круговий отвір.

This paper is devoted to a problem of stress distribution near a circular hole in a thick transversely isotropic plate under the action of the permanent shear loads applied at infinity. On the surface of the hole, zero values of normal displacement and tangential stresses are defined, that is, the boundary conditions for one of the species of homogeneous third boundary value problem of the theory of elasticity are given. The problem is solved on the basis of the expansion method of the components of the unknown functions namely the displacement vector and the stress tensor into Fourier series by Legendre polynomials of the thickness coordinate. The method of solution constructing for the problem is presented and analytical formulas have been found that describe the stress state that arises in a plate under the specified boundary conditions. The stress concentration factors on the middle plane and the boundary surfaces of the plate are analyzed. The effects of the influence of the geometrical parameters of the hole on the stress concentration factor near the hole are investigated and the results of numerical calculations are shown.

Key Words: transversely isotropic material, thick plate, shear stresses, circular hole.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О

1. Вступ. Постановка задачі

В рамках тривимірної теорії пружності розглянемо задачу про визначення напруженого стану у товстій трансверсально-ізотропній пластині, яка містить круговий циліндричний отвір. На великому віддаленні від нього (умовно на нескінченності) пластини знаходиться під дією постійних зсувних навантажень $\sigma_{12}|_{r=\infty} = \tau$. Пластину має постійну товщину $2h$. Вона віднесена до декартової системи координат x_i ($i = \overline{1,3}$) і займає

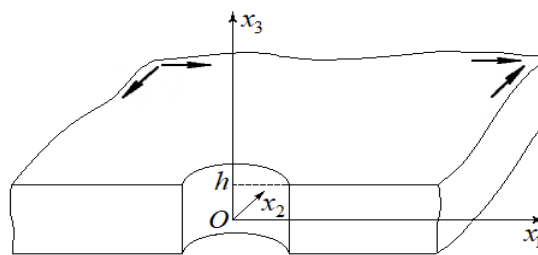


Рис.1 Пластину, що розглядається.

область $S \times [-h, h]$ тривимірного простору R^3 .

Отвір є підкріпленим: на його поверхні задано нульові значення для нормального переміщення і дотичних напружень

$$u_r(r, \theta)|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta)|_{r=R} = 0;$$

$$\sigma_{r3}(r, \theta)|_{r=R} = 0.$$

Таким чином, поставлено третю крайову задачу теорії пружності за класифікацією, що була запропонована Купрадзе та ін. [1]

Розв'язок аналогічної задачі для отвору у формі еліптичного циліндра, а також отворів, форма яких близька до квадрату та трикутника в плані представлено у роботі [2].

2. Метод побудови розв'язку задачі

Для розв'язання задачі використовуємо метод розкладення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра, що був розроблений в роботах Векуа [3] та Хоми [4].

Представимо компоненти вектора переміщень u_j і тензора напружень σ_{ij} у вигляді скінченного ряду Фур'є за поліномами Лежандра $P_k(\xi)$ координати товщини $\xi = x_3 / h$, тобто

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} =$$

$$= \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi),$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$; $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коефіцієнти розкладу, які ми будемо, наслідуючи Векуа [3], називати моментами; N – натуральне число, яке вважатимемо парним $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, \infty$).

Щодо складових даного розкладу отримаємо систему рівнянь рівноваги

$$\partial_\alpha \sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{3j}^{(k-2s-1)} = 0$$

$$(j=1, 2, 3; k=0, \overline{N}, K=(k-1)/2)$$

і співвідношення пружності $\sigma_{ij}^{(k)} = c_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(k)}$, що зв'язують моменти напружень і деформацій. Моменти тензора деформацій $\varepsilon_{lm}^{(k)}$ визначаються формулами

$$\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)}; \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[N_k]} u_j^{(k+2s+1)}$$

$$(\alpha=1, 2; j=1, 2, 3; N_k = (N-k-1)/2),$$

де символ $[]$ означає цілу частину числа.

Наведені рівності утворюють замкнену систему рівнянь щодо невідомих функцій моментів напружень і переміщень. Для трансверсально-ізотропного тіла ці рівняння зводяться до двох груп рівнянь, що описують симетричне і косиметричне відносно S деформування пластини.

При симетричному деформуванні система рівнянь має вигляд

$$c_{60} \Delta u_\alpha^{(2k)} + (c_{12} + c_{66}) \partial_\alpha e^{(2k)} +$$

$$+ (4k+1)h^{-1} \sum_{s=1}^n (\lambda_{2s-1}^{(k)} \partial_\alpha u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \beta_{2s}^{(k)} u_\alpha^{(2s)}) = 0,$$

$$(\alpha=1, 2; k=0, \overline{n}) \quad (1)$$

$$c_{44} \Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^n (\lambda_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - c_{33} h^{-1} \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)}) = 0, \quad (k=1, \overline{n}),$$

де $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – пружні сталі матеріалу; Δ – оператор Лапласа; $e^{(2k)} = \partial_1 u_1^{(2k)} + \partial_2 u_2^{(2k)}$;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, & k < s \leq n \end{cases},$$

$$\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k; \\ c_{44}, & k \leq s \leq n \end{cases};$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}, \beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютні постійні.

Для однозначного визначення дані рівняння необхідно доповнити умовами, заданими на границі області

$$u_r^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k=0, \overline{n});$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)}(r, \theta)|_{r=R} = 0 \quad (k=1, \overline{n}).$$

Загальний аналітичний розв'язок системи (1) в комплексній формі представляється таким чином [4]

$$c_{66} u_+^{(0)} = \chi \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_l;$$

$$c_{66} u_+^{(2k)} = \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_l +$$

$$+ i h \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s; \quad u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + i u_2^{(2k)}; \quad (2)$$

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\kappa_1 h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{l=1}^N c_l^{(1)} V_l;$$

$$c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^N c_l^{(2k-1)} V_l \quad (k=\overline{1, n}),$$

де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - довільні голоморфні функції комплексної змінної $z = x_1 + ix_2$; V_l і W_s - метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням

$$\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0 \quad (l=\overline{1, N});$$

$$\Delta W_s - t_s h^{-2} W_s = 0 \quad (s=\overline{1, n}),$$

в яких параметрами k_l і t_s є корені відповідних характеристичних рівнянь; κ , κ_1 , $\mu_*^{(2)} = \kappa_2$, $\mu_*^{(2k)} = 0$ ($k > 1$), $a_l^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_l^{(2k-1)}$ - безрозмірні константи.

Складові напружень $\sigma_{ij}^{(m)}$ згідно розв'язку (2) виражаються формулами

$$\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} = 4 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_l^N d_l^{(0)} V_l;$$

$$\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} =$$

$$= -4 \left[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] + 4h \sum_{l=1}^N a_l^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l;$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2h^{-1} \sum_{l=1}^N d_l^{(2k)} V_l;$$

$$\sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{l=1}^N d_{3l}^{(2k)} V_l$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4\mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} +$$

$$+ 4h \sum_{l=1}^N a_l^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_l + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s;$$

$$\sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{23}^{(2k-1)} = 2 \sum_{l=1}^N p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_l +$$

$$+ 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s, \quad (k=\overline{1, n}).$$

Введемо полярну систему координат r, θ і скористаємося формулами перетворення

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = e^{2i\theta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right);$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)};$$

$$u_r^{(2k)} - iu_\theta^{(2k)} = e^{i\theta} \overline{u_+^{(2k)}};$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = e^{i\theta} \left(\sigma_{13}^{(2k-1)} - i\sigma_{23}^{(2k-1)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right).$$

Отримаємо вирази для граничних умов на контурі отвору

$$c_{66}u_r^{(2k)} = \text{Re} \left(c_{66} \overline{u_+^{(2k)}} e^{i\theta} \right),$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} = \text{Re} \left[e^{i\theta} \left(\sigma_{13}^{(2k-1)} - i\sigma_{23}^{(2k-1)} \right) \right];$$

$$2\sigma_{r\theta}^{(2k)} = \text{Im} \left[e^{2i\theta} \left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right) \right].$$

Представимо голоморфні функції $\varphi(z)$, $\psi(z)$, у вигляді

$$\varphi(z) = \Gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \psi(z) = \Gamma' z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

де a_n , b_n , - довільні постійні;

$$\Gamma + \overline{\Gamma} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty} \right),$$

$$\Gamma' = -\frac{1}{4} \left(\sigma_{11}^{(0)\infty} - \sigma_{22}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty} \right).$$

Залежно від значень коренів k_m характеристичного рівняння, які можуть бути дійсними позитивними (k_1) і комплексно-спряженими (k_2 , $k_3 = \overline{k_2}$), метагармонічні функції представимо таким чином:

$$V_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(\rho x_1) e^{in\theta},$$

$$V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\theta},$$

$$V_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\theta},$$

Тут $K_n(\rho x_1)$, $H_n^{(1)}(\rho x_2)$, $H_n^{(2)}(\rho x_3)$ - циліндричні функції Бесселя, Ханкеля першого і другого роду, $\rho = r/R$, $x_1 = Rh^{-1} \sqrt{k_1}$, $x_2 = Rh^{-1} \sqrt{-k_2}$, $x_3 = \overline{x_2}$. Аналогічний вигляд мають метагармонічні функції W_s .

Радіальні σ_{rr} і окружні $\sigma_{\theta\theta}$ напруження представляються виразами

$$\frac{1}{\tau} \sigma_{rr} = \frac{1}{2} \left\{ 2 - \sum_{k=0}^n T_{rr}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\xi) \sin 2\theta \right\},$$

$$\frac{1}{\tau} \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left\{ -2 + \sum_{k=0}^n T_{\theta\theta}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\xi) \sin 2\theta \right\},$$

де $T_{rr}^{(2k)}(\rho)$, $T_{\theta\theta}^{(2k)}(\rho)$ - складові, що містять циліндричні функції, $\rho = r/R$.

3. Числовий аналіз результатів

Проведено числове дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропної пластини з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0,25$, $\nu' = 0,35$ і співвідношеннями модулів пружності $E/G' = 5,0$, $E/E' = 1,75$, що містить кругову циліндричну порожнину і знаходиться під дією постійних зсувних зусиль τ на нескінченності.

Як показав аналіз, при заданих умовах домінуючими є радіальні напруження в граничних точках отвору при значенні $\theta = \pi/4$.

Графік на рис. 2 ілюструє зміну коефіцієнта концентрації радіальних напружень на контурі отвору ($r = R$, $\theta = \pi/4$) в залежності від співвідношення між півтовщиною пластини і радіусом отвору.

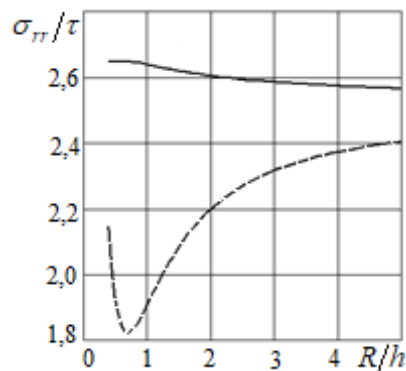


Рис.2 Залежність радіальних напружень від відношення радіусу отвору і півтовщини пластини.

Значення напружень в точках на серединній площині пластини показано суцільною кривою лінією, а на її граничних поверхнях – штриховою.

Як видно з рисунку, коефіцієнт концентрації радіальних напружень σ_{rr} досягає значень $2,55 \div 2,65$, він тим більший, чим менше діаметр отвору, порівняно з товщиною пластини, але його зростання значно сповільнюється, коли діаметр і товщина пластини стають рівними.

Список використаних джерел

1. Купрадзе В. Д. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башенейшвили, Т.В. Бурчуладзе. – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1968. – 627 с.
2. Khoma I.Yu. Solving the Third Homogeneous Boundary-Value Problem of the Deformation of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole Under Uniform Tension Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole / I.Yu. Khoma, O.G. Dashko // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – Vol 52, N 6. – P. 605-615.
3. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / И.Н. Векуа // *Тр. Тбилисск. матем. ин-та.* – 1965. – № 30. – С. 3–103.
4. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates / I.Yu. Rhoma // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2000. – Vol. 101, N 6. – P. 3577-3584.

References

1. KUPRADZE, V.D., GEGELIA, T.G., BASHENEYSHVILI, M.O. and BURCHULADZE, T.V. (1968) *Trehmernyie zadachi matematicheskoy teorii uprugosti i termouprugosti.* Tbilisi: Izdatel'stvo Tbilisskogo universiteta.
2. KHOMA, I.YU. AND DASHKO, O.G. (2016) Solving the Third Homogeneous Boundary-Value Problem of the Deformation of a Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole Under Uniform Tension Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole. *International Applied Mechanics.* 52(6). p. 605-615.
3. VEKUA, I.N. (1965) Teoriya tonkih pologoh obolochek peremennoj tolschiniy. *Trudy Tbilisskogo matematicheskogo instituta.* 30. p. 3-103.
4. KHOMA, I.YU. (2000) Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates. *Journal of Mathematical Sciences.* 101 (6). p. 3577-3584.

Надійшла до редколегії 03.09.17