УДК 519.21

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.
Лукович О.В., інж.

Про один підхід до аналізу систем з повторними викликами і чергою

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т Глушкова, 4д,
e-mail: usar69@ukr.net

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.
O.V. Lukovych, Eng.

On an approach to analyze retrial systems with queue

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar69@ukr.net

У статті розглядається марковська модель системи з повторними викликами з обмеженою кількістю обслуговуючих приладів, скінченною довжиною черги та скінченною орбітою. В ній вводиться клас двовимірних процесів міграції, в рамках якого можна описувати процес обслуговування для різних систем з повторними викликами. Спосіб надходження і обслуговування вимог (тип системи) обирається за рахунок керуючих параметрів міграції. В роботі проводиться пошук замкнених формул для стаціонарних ймовірностей двовимірного процесу обслуговування через параметри моделі процесу обслуговування. У випадку одного обслуговуючого приладу та одного місця в черзі векторно-матричне подання стаціонарних ймовірностей значно спрощується.

Ключові слова: стохастичні системи, повторні виклики, процеси міграції, стаціонарний режим.

The paper is devoted to the perspective direction of the theory stochastic systems associated with research of retrial queuing systems with queue. A class of bivariate migration processes is introduced to describe the service process of the system. We consider a Markov model of retrial queuing system with the finite number of servers, a finite length queue and a finite orbit. It introduces a class of two-dimensional migration processes, within which we can describe the service process for different retrial queuing systems. The way of receiving and servicing calls (system type) is selected due to the control parameters of migration. In the paper we search an explisit formulas for stationary probabilities of two-dimensional service process through the parameters of the service process model. In the case of one service device and one place in the queue, the vector-matrix representation of stationary probabilities is greatly simplified. The result obtained is used for construction of explicit formulas for stationary probabilities of one service device and one place in the queue.

Key Words: stochastic systems, repeated calls, migration processes, stationary regime.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Теорія систем з повторними викликами є одним із важливих розділів теорії масового обслуговування. Такі системи детально розглянуті в монографіях [1],[2]. Математичні моделі систем з повторними викликами широко застосовуються на практиці ([1],[2],[3],[4]).

В системах з повторними викликами і чергою вимога, яка надійшла в систему і застала всі сервери зайнятими, стає у чергу обмеженої довжини. Коли всі місця у черзі зайняті, вона попадає на віртуальну «орбіту» і повторює спробу потрапити на обслуговування через випадковий проміжок часу. Такі вимоги стають джерелами повторних викликів і генерують вторинний потік.

В даній роботі для описання процесу обслуговування систем з повторними викликами і чергою вводиться клас двовимірних процесів міграції. Тип системи обирається за рахунок керуючих параметрів міграції.

Основну модель, яка розглядається в роботі, визначимо як двовимірний ланцюг Маркова з неперервним часом $Q(t)=\left(Q_1(t),Q_2(t)\right),\ t\geq 0$ в обмеженій множині станів $S=\{0,1,\ldots,m+n\}\times\{0,1,\ldots,N\}$. Інфінітезимальні характеристики $q_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta\in S,\ \alpha\neq\beta$ для $Q(t)$ задамо системою співвідношень:

при $\alpha=(i,j)$ та $i\neq m+n$

$$q_{\alpha\beta}=\begin{cases}\lambda_{ij},\ \textit{якщо}\ \ \beta=(i+1,j),\\ \mu_{ij},\ \textit{якщо}\ \ \beta=(i-1,j),\\ \nu_{ij},\ \textit{якщо}\ \ \beta=(i+1,j-1),\end{cases}$$

при $\alpha=(m+n,j)$

$$q_{\alpha\beta}=\begin{cases}\mu_{m+n\,j},\ \textit{якщо}\ \ \beta=(m+n\text{-}1,j),\\ \lambda_{m+n\,j},\ \textit{якщо}\ \ \beta=(m+n,j+1).\end{cases}$$

За домовленістю інтенсивності тих переходів, які виводять за обмежену область S дорівнюють нулю $\mu_{0j}=\nu_{i0}=\nu_{m+n\,j}=\lambda_{m+nN}=0.$

Процеси міграції типу $Q(t)$ моделюють роботу марковських систем з чергою та обмеженим числом джерел повторних викликів. Так при

$$\lambda_{ij}=\lambda_{m+n\,j}=\lambda,\ \mu_{ij}=i\mu,\ i=\overline{1,m},$$

$$\mu_{ij}=m\mu,\ i=\overline{m+1,m+n},\ \nu_{ij}=j\nu$$

отримаємо класичну модель $[M/M/m/m+n]^{(N)}$ системи з чергою та повторними викликами ([1]), для якої m – число обслуговуючих приладів, n - число місць у черзі, N – максимально можливе число джерел повторних викликів.

Перейдемо до аналізу стаціонарного режиму процесу $Q(t),\ t\geq 0.$ Ми маємо на меті отримати для стаціонарних ймовірностей $\pi_{ij},\ (i,j)\in S$ подання, яке зручно використовувати як для обчислення, так і для вивчення аналітичних властивостей.

Для того, щоб сформулювати основний результат, для $j=0,1,\ldots,N-1$ введемо позначення: $A(j)$ - тридіагональна матриця вигляду

$$A(j)=\begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(+)} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ a_1^{(-)} & a_1^{(0)} & a_1^{(+)} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2^{(-)} & a_2^{(0)} & a_2^{(+)} & \ldots & 0 & 0 & 0\\ & & & & \ldots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m+n-2}^{(-)} & a_{m+n-2}^{(0)} & a_{m+n-2}^{(+)}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{m+n-1}^{(-)} & a_{m+n-1}^{(0)}\end{pmatrix}$$

$$a_i^{(0)}=\lambda_{ij}+\mu_{ij}+\nu_{ij},\ i=0,1,\ldots,m+n-1$$

$$a_i^{(+)}=-\lambda_{ij},\ i=0,1,\ldots,m+n-2$$

$$a_i^{(-)}=-\mu_{ij},\ i=1,2,\ldots,m+n-1$$

$$B(j)=\begin{pmatrix} 0 & \nu_{0\,j+1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \nu_{1\,j+1} & \ldots & 0\\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_{m+n-2\,j+1}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix};$$

$$C(j)=\frac{\mu_{m+n\,j}}{\lambda_{m+n\,j}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{0\,j+1}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{1\,j+1}\\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{m+n-2\,j+1}\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \nu_{m+n-1\,j+1}\end{pmatrix}.$$

Через $A(N)$ будемо позначимо трикутну матрицю

$$A(N)=\begin{pmatrix} \mu_{1N} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -(\nu_{1N}+\lambda_{1N}) & \mu_{2N} & 0 & \ldots & 0 & 0\\ -\nu_{1N} & -(\nu_{2N}+\lambda_{2N}) & \mu_{3N} & \ldots & 0 & 0\\ & & & \ldots & & \\ -\nu_{1N} & -\nu_{2N} & -\nu_{3N} & \ldots & -(\nu_{m+n-2N}+\lambda_{m+n-2N}) & \mu_{m+n-1N}\end{pmatrix}$$

Нам також необхідні будуть вектори:

$$\pi'(j)=\left(\pi_{0j},\pi_{1j},\ldots,\pi_{m+n-1j}\right),\quad Q(j)=\frac{\pi(j)}{\pi_{0N}},$$

$$\nu'(j)=\left(\nu_{0j},\nu_{1j},\ldots,\nu_{m+n-1j}\right),\ j=0,1,\ldots,N,$$

$\overline{1}(m+n-1)-(m+n-1)-$вимірний вектор, що складається з одиниць, $e_i(m+n-1)-(m+n-1)-$ вимірний вектор, $i-$та компонента якого дорівнює одиниці, а інші дорівнюють нулю. Через $\overline{1},\ e_i$ будемо позначати такі ж вектори розмірності $m+n$.

Теорема 1. Якщо для $Q(t)$ існує стаціонарний режим і матриці $A(j),\ j=0,1,\ldots,N-1$ мають обернену, то стаціонарні імовірності $\pi_{ij},\ (i,j)\in S$ можна подати у вигляді

$$\pi'(N)=S_Q^{-1}Q'(N),$$

$$\pi_{m+nN}=S_Q^{-1}\frac{1}{\mu_{m+nN}}Q'(N)\left(\nu(N)+\lambda_{m+n-1N}e_{m+n}\right),\quad (1)$$

$$\pi'(j)=S_Q^{-1}Q'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j),\quad (2)$$

$$\pi_{m+n\,j}=S_Q^{-1}\frac{1}{\lambda_{m+n\,j}}Q'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\nu(j+1),$$

$$j=0,1,\ldots,N-1,\quad (3)$$

де

$$S_Q = Q'(N)\left\{\bar{1} + \frac{1}{\mu_{m+nN}}\left(\nu(N) + \lambda_{m+n-1N} e_{m+n}\right) + \right.$$
$$+\sum_{j=0}^{N-1} T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\times$$
$$\left.\times\left[T(j)\bar{1} + \frac{1}{\lambda_{m+nj}}\nu(j+1)\right]\right\}, \qquad (4)$$

$$Q(N) = \begin{pmatrix} 1 \\ A^{-1}(N)\left(\nu_{0N}\bar{1}(m+n-1) + \lambda_{0N} e_1(m+n-1)\right)\end{pmatrix}, \qquad (5)$$

$$T(j) = [B(j) + C(j)]A^{-1}(j),\ j = 0,1,\ldots,N-1.$$

Доведення. Для кожного $k = 0,1,\ldots,m+n-1$ розіб'ємо S на дві підмножини $E_k = \{(0,N),(1,N),\ldots,(k,N)\}$ та $\bar{E}_k = S \setminus E_k$. В силу рівності потоків імовірності через замкнений контур у стаціонарному режимі ([3], стор.49), будемо мати

$$\begin{aligned}&\nu_{0N}\pi_{0N} + \nu_{1N}\pi_{1N} + \ldots + \nu_{k-1N}\pi_{k-1N} + \\ &+\left(\nu_{kN} + \lambda_{kN}\right)\pi_{kN} = \mu_{k+1N}\pi_{k+1N}, \\ &k = 0,1,\ldots,m+n-1.\end{aligned} \qquad (6)$$

Для $Q_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{\pi_{0N}}$, $(i,j)\in S$ перші $(m+n-1)$ рівняння із системи (6) мають вигляд

$$\begin{cases} \mu_{1N}Q_{1N} = \nu_{0N} + \lambda_{0N} \\ -\left(\nu_{1N} + \lambda_{1N}\right)Q_{1N} + \mu_{2N}Q_{2N} = \nu_{0N} \\ -\nu_{1N}Q_{1N} - \left(\nu_{2N} + \lambda_{2N}\right)Q_{2N} + \mu_{3N}Q_{3N} = \nu_{0N} \\ \ldots \\ -\nu_{1N}Q_{1N} - \ldots - \left(\nu_{m+n-2N} + \lambda_{m+n-2N}\right)Q_{m+n-2N} + \mu_{m+n-1N}Q_{m+n-1N} = \nu_{0N} \end{cases} \qquad (7)$$

Відносно $Q_{1N},\ldots,Q_{m+n-1N}$ розв'язком (7) буде

$$\begin{pmatrix} Q_{1N} \\ \cdots \\ Q_{m+n-1N}\end{pmatrix} = A^{-1}(N)(\nu_{0N}\bar{1}(m+n-1) + $$
$$+\lambda_{0N}e_1(m+n-1)).$$

Таким чином (5) доведено.

З (6) при $k = m+n-1$ знаходимо

$$Q_{m+nN} = \frac{1}{\mu_{m+nN}} Q'(N)(\nu(N) + \lambda_{m+n-1N} e_{m+n}). \qquad (8)$$

Узагальнимо співвідношення (8) на випадок $j = N-1,\ldots,1,0.$ Розіб'ємо S на дві підмножини $S_j = \{(\alpha,\beta)\in S : \beta \le j\}$ і $\bar{S}_j = S \setminus S_j$. Знову використовуючи рівність потоків ймовірностей через замкнений контур, маємо

$$\lambda_{m+nj}Q_{m+nj} = \nu_{0j+1}Q_{0j+1} + \ldots + \nu_{m+n-1j+1}Q_{m+n-1j+1}$$

або

$$Q_{m+nj} = \frac{1}{\lambda_{m+nj}} Q'(j+1)\nu(j+1),\ j = N-1,\ldots,0. \qquad (9)$$

Розглянемо тепер $(m+n)\times N$ замкнених контурів, які містять одну точку (i,j) з області $\tilde{S} = \{0,1,\ldots,m+n-1\}\times\{0,1,\ldots N-1\}$. Відповідні рівняння для Q_{ij}, $(i,j)\in\tilde{S}$ мають вигляд

$$(\lambda_{0j} + \nu_{0j})Q_{0j} = \mu_{1j}Q_{1j},\ i = 0, \qquad (10)$$

$$(\lambda_{ij} + \mu_{ij} + \nu_{ij})Q_{ij} = \nu_{i-1j+1}Q_{i-1j+1} + \lambda_{i-1j}Q_{i-1j} + \mu_{i+1j}Q_{i+1j},$$
$$i = 1,2,\ldots,m+n-2. \qquad (11)$$

При $i = m+n-1$ з урахуванням (9)

$$\left(\lambda_{m+n-1j} + \mu_{m+n-1j} + \nu_{m+n-1j}\right)Q_{m+n-1j} = \nu_{m+n-2j+1}Q_{m+n-2j+1} +$$
$$+\lambda_{m+n-2j}Q_{m+n-2j} + \frac{\mu_{m+nj}}{\lambda_{m+nj}} Q'(j+1)\nu(j+1). \qquad (12)$$

Систему (10)-(12) можна подати у векторно-матричному вигляді

$$Q'(j)A(j) = Q'(j+1)\left[B(j) + C(j)\right], \text{ або}$$

$$Q'(j) = Q'(j+1)\left[B(j)+C(j)\right]A^{-1}(j) = Q'(j+1)T(j),$$
$$j = N-1,\ldots 1,0, \qquad (13)$$

оскільки за умовою $A^{-1}(j)$ існує.

Розв'язком рекурентного співвідношення (13) буде послідовність векторів

$$Q'(j) = Q'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j),\ j = N-1,\ldots,1,0. \qquad (14)$$

Підставляючи праву частину (14) в (9), маємо

$$Q_{m+nj} = \frac{1}{\lambda_{m+nj}} Q'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\nu(j+1),$$
$$j = N-1,\ldots,1,0. \qquad (15)$$

Тепер умова нормування для стаціонарних ймовірностей π_{ij}, $(i,j)\in S$ дозволяє знайти

$$\pi_{0N} = \left\{Q'(N)\bar{1} + \sum_{j=0}^{N-1} Q'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j)\bar{1} + \right.$$
$$+\frac{1}{\mu_{m+nN}} Q'(N)(\nu(N) + \lambda_{m+n-1N}e_m) +$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\lambda_{m+nj}} Q'(N)T(N-1)\times\ldots\times T(j+1)\nu(j+1)\right\}^{-1}. \qquad (16)$$

Співвідношення (1)-(3) є безпосереднім наслідком (8), (14)-(16). Теорему доведено.

Отриманий результат можна застосувати до системи $[M/M/m/m+n]^{(N)}$ з повторними викликами і чергою. У даному випадку залежність локальних характеристик від точки $(i,j)\in S$ фазового простору має простий явний вигляд і можна провести більш детальний аналіз.

Лема 1. Для $[M/M/m/m+n]^{(N)}$ - системи з повторними викликами і чергою

$$Q_{kN}=\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\prod_{j=0}^{i-1}(j\frac{\mu}{\lambda}+N\frac{\nu}{\lambda}),$$

$$k=0,1,\ldots m-1,$$

де $\binom{k}{i}=\frac{k!}{i!(k-i)!}$ і за домовленістю $\prod_{i}^{j}\ldots=1$, при $j<i$.

Очевидно, формули (1)-(4) представляють собою ефективну рекурентну процедуру для обчислення стаціонарного розподілу. У випадку одного обслуговуючого приладу та одного місця в черзі векторно-матричне подання стаціонарних ймовірностей значно спрощується.

Будемо вважати $\mu=1$.

Наслідок 1. Для $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ – системи з повторними викликами і чергою

$$\pi(0,j)=S^{-1}(N)\frac{\rho^j}{1+\rho+\lambda+j\nu}\varphi(j),\tag{17}$$

$$\pi(1,j)=S^{-1}(N)\rho^j\frac{\lambda+j\nu}{1+\rho+\lambda+j\nu}\varphi(j),\ j=0,1,\ldots,N,\tag{18}$$

$$\pi(2,j)=S^{-1}(N)\rho^j\frac{\Lambda(j)(1+\lambda+j\nu)}{(1+\rho+\lambda+j\nu)(1+\rho+\lambda+(j+1)\nu)}\times$$
$$\times\varphi(j),\ j=0,1,\ldots,N-1,\tag{19}$$

$$\pi(2,N)=S^{-1}(N)\rho^N\frac{\Lambda(N)}{1+\rho+\lambda+N\nu}\varphi(N),$$

де $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda$ завантаження системи первинними викликами,

$$\Lambda(j)=(\lambda+j\nu)(1+\lambda+j\nu)-\lambda,$$

$$\varphi(j)=\prod_{i=0}^{j-1}\frac{\Lambda(i)}{(i+1)\nu(1+\rho+\lambda+i\nu)},\ j=0,1,\ldots,$$

а $S(N)$ - нормуюча константа.

Щоб отримати формули для $[M/M/1/1+1]$-системи, перейдемо до границі при $N\to\infty$.

Наслідок 2. Якщо для $[M/M/1/1+1]$-системи з повторними викликами і чергою $\rho<1$, то для неї існують стаціонарні імовірності

$$\pi(0,j)=S^{-1}\frac{\rho^j}{1+\rho+\lambda+j\nu}\varphi(j),\tag{20}$$

$$\pi(1,j)=S^{-1}\rho^j\frac{\lambda+j\nu}{1+\rho+\lambda+j\nu}\varphi(j)\tag{21}$$

$$\pi(2,j)=S^{-1}\rho^j\frac{\Lambda(j)(1+\lambda+j\nu)}{(1+\rho+\lambda+j\nu)(1+\rho+\lambda+(j+1)\nu)}\varphi(j),$$
$$j=0,1,\ldots,\tag{22}$$

де

$$S=\sum_{j=0}^{\infty}\rho^j\frac{1+\lambda+j\nu}{1+\rho+\lambda+j\nu}\left[1+\frac{\Lambda(j)}{1+\rho+\lambda+(j+1)\nu}\right]\varphi(j).$$

В даній роботі для обчислення стаціонарних ймовірностей отримані явні формули в векторно-матричному вигляді. Вони є зручними як для обчислення так і розв'язку оптимізаційних задач. Прості формули, подібні (17)-(19), (20)-(22) можуть бути отримані для інших типів міграцій, що визначаються вибором залежності локальних характеристик від фазової точки області S.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I.* Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию массового обслуживания.– М.:Мир, 1993. – 336 с.
4. *Anisimov V.V.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.

References

1. FALIN G.I., TEMPLETON J.G.C. (1997) *Retrial queues*. London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*, Springer-Verlag.
3. WALRAND, J. (1993) *An Introduction to queueing systems*, Moscow.
4. ANISIMOV V.V., ARTALEJO J.R. (2001) "Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals" *J. Queuing Systems*. Vol.39., p.p. 157-182.

Надійшла до редколегії 23.11.2018