УДК 519.17

М.А. Дуденко

Листково сконструйовані уніциклічні графи

Національний університет "Києво-Могилянська академія", 04655, м. Київ, вул. Григорія Сковороди, 2.
e-mail: rita.dudenko@gmail.com

M.A. Dudenko

Leaf-constructed unicyclic graphs

National University of Kyiv-Mohyla Academy, 04655, Kyiv, 2 Scovoroda st.
e-mail: rita.dudenko@gmail.com

Введено поняття сконструйованого та листково сконструйованого графа за допомогою операції додавання ребра. Залежно від типу з'єднання описано умови, за яких уніциклічний граф G, що є листково сконструйованим з дерева T, має метричну розмірність 2 та 3.

Ключові слова: уніциклічні графи, метрична розмірність, метричний базис, листково сконструйовані графи.

A metric dimension of graph G is the smallest size of a subset $S \in V(G)$ that elements can distinguish each vertex pair of G by the shortest-path distance to some vertex in S. Metric dimension as a graph parameter has numerous applications, such as pharmaceutical chemistry, robot navigation, network discovery and verification, sonar, combinatorial optimization, and was also studied for graphs with high degree of symmetry.

The metric dimension decision problem is among the classical NP-hard problems. But for some families of graphs the metric dimension can be computed in polynomial time. For example, formulas for metric dimension are known for specially structured graphs, such as trees and hypercubes. In the paper we present the concept of constucted and leaf-constructed graph with the help of the operation of an edge addition. Depending on the connection type, we give the conditions under which the unicyclic graph G, which is a leaf-constructed from the tree T, has metric dimension 2 and 3.

Key Words: unicyclic graph, metric dimension, metric basis, leaf-constructed graphs.

Communicated by Prof. Kirichenko V.V.

1 Вступ

Кожна мережа може бути представлена як граф, у якому вершини розглядаються як процесори, а ребра між двома довільними вершинами індукують зв'язки між процесорами. У праці [1] Кулер розглядав навігацію як графічну структуру, в якій робот рухається від вершини до вершини в графовому просторі. В певний момент часу робот може визначити своє місцезнаходження за допомогою вершин-орієнтирів. Якщо робот знає відстань до достатньої кількості орієнтирів, то його розташування визначається однозначно. Постала проблема в знаходженні мінімальної кількості орієнтирів та їх розташуванні в мережі, щоб робот міг завжди визначити своє місцезнаходження. Виявляється, що мінімальна кількість орієнтирів є метричною розмірністю в графовому просторі, поняття якої було введене Харарі та Мелтером в [2]. Слатер у своїй праці [3] описав користь ідеї пошуку метричної розмірності в довготермінових засобах навігації. Мелтер і Томеску [4] вивчали метричну розмірність для графів-сіток. Відомо, що обчислення метричної розмірності для довільного графа є NP-важкою проблемою [5], тому в багатьох працях досліджується метрична розмірність конкретних конструкцій графів та операцій над ними (декартового, лексикографічного та корона добутків). Так, у статті [6] виведено оцінку метричної розмірності уніциклічного графа G, отриманого з дерева T за допомогою додавання ребра: $dim(T) - 2 \leqslant dim(G) \leqslant dim(T) + 1$. Відповідно, якщо дерево T має метричну розмірність 2, то виконується нерівність $0 \leqslant dim(G) \leqslant 3$. Оскільки, згідно праці [7], метрична розмірність G дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли він є ланцюгом, то матимемо нерівність $2 \leqslant dim(G) \leqslant 3$. У даній статті описано умови, за яких уніциклічний граф G, листково сконструйований з дерева T ($dim(T) < 3$), має метричну розмірність 2. Відповідно охарактеризовано типи з'єднання, при яких отриманий граф G має метричну розмірність 3.

2 Основні означення та необхідні твердження

Нехай $G = (V, E)$ — простий, скінченний, неорієнтовний граф з множиною вершин V, $|V| < \infty$ і множиною ребер E.

Означення 2.1. Для $u, v, w \in V$ вершина u *розділяє* вершини v і w якщо найкоротша відстань між u і v відрізняється від відстані між u та w.

Означення 2.2. Підмножина $M \subset V$ називається *метричним генератором* графа G якщо будь-яку пару вершин $w, v \in V$ розділяє хоча б одна вершина $u \in M$.

Зауважимо, що множина вершин $V(G)$ є метричним генератором для самої себе.

Означення 2.3. Метричний генератор графа G потужності, найменшої серед усіх можливих, називається *метричним базисом*, а його потужніть — *метричною розмірністю* графа G і позначається $dim(G)$.

Як зазначалось в статті [8] очевидним є той факт, що метричний базис існує для будь-якого графа та не є унікальним. Наприклад, для простого ланцюга P_n з початком у вершині u та кінцем у вершині v підмножини $\{u\}$ та $\{v\}$ будуть метричними базисами.

Нагадаємо, що степінь вершини $deg_G(v)$ — це кількість ребер, що їй інцидентні.

Означення 2.4. Для деякого графа G *листком* називається вершина, що має степінь 1. Вершина v є *внутрішньою* якщо $deg_G(v) \geqslant 3$. Внутрішня вершина v *близька до листка* l якщо немає внутрішніх вершин в найкоротшому шляху, що з'єднує v і l.

В попередніх статтях ([9], [10], [11]) було введено поняття 1-листкової та 2-листкової вершин. Узагальнимо його для довільної кількості листків.

Означення 2.5. Для деякого натурального n внутрішня вершина називається *n-листковою* якщо вона близька рівно до n листків.

Означення 2.6. Простий граф називається *унiциклічним*, якщо він містить рівно один цикл.

Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф та $\hat{V}$ — множина вершин циклу даного графа.

Означення 2.7. Говоритимемо, що вершина $u \in V \setminus \hat{V}$ графа G *проектується* в вершину $w \in \hat{V}$ якщо для довільної вершини $q \in \hat{V}$ виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q).$$

Вершини степеня 3 циклу, в які проектуються вершини степеня 3, що лежать поза циклом, називатимемо *основними*.

Означення 2.8. [9] Уніциклічний граф G називається *парним* якщо існує таке натуральне k, для якого $|\hat{V}| = 2k$, і *непарним* якщо $|\hat{V}| = 2k + 1$.

Означення 2.9. [11] Уніциклічний граф G, що містить лише одну основну вершину, а решта вершин циклу мають степінь 2, називатимемо *мінорним* графом.

Нехай G — уніциклічний граф і $\hat{G}$ — його підграф, що є ізометричним простому циклу C_k.

Означення 2.10. [9] Уніциклічний граф G називається *базисним графом* якщо виконуються такі умови:

1) для довільної вершини v графа G $deg_v \leqslant 3$;
2) G містить рівно дві основні вершини;
3) в кожну основну вершину може проектуватись рівно одна 2-листкова вершина;
4) $\hat{G}$ містить лише основні вершини степеня 3.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ — два простих графи. Нехай $v_1 \in V_1$ та $v_2 \in V_2$. Граф $G = (V_1 \cup V_2/\sim, E_1 \cup E_2)$ називатимемо *склеюванням* графів G_1 і G_2 по вершинах v_1 і v_2.

Означення 2.11. [9] Нехай G_1 — базисний граф. Позначимо через u і v основні вершини графа G_1. Уніциклічний граф G називається *обплетенням* графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$ якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$ таким чином, що кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга, а також для будь-якої 1-листкової вершини w та суміжної з нею вершини a має місце нерівність:

$$d_G(u, v) + d_G(v, w) + 1 \neq d_G(u, a).$$

Лема 1. *[9] Непарний уніциклічний граф G, що містить дві основні вершини, має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді коли виконується одна з умов:*

1) *G — базисний граф;*

2) *G є обплетенням деякого базисного графа G_1.*

Парний уніциклічний з двома основними вершинами та $|\hat{V}| = 2k$ має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді коли виконується одна з вищезгаданих умов та $d(u, v) \neq k$.

В статті [11] було введено іншу конструкцію обплетення графів.

Означення 2.12. [11] Уніциклічний граф G називається *частковим обплетенням* графа G_1, що є уніциклічним графом (або простим циклом), ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$ якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \ldots, L_r$, причому кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга.

Лема 2. *[11] Нехай G — уніциклічний граф, що містить не більше однієї основної вершини. Граф G має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли він є частковим обплетенням простого циклу C_n або частковим обплетенням мінорного графа G_1 ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$.*

Позначимо символом n_v кількість листків, для яких v є внутрішньою вершиною.

Лема 3. *[12] Якщо T — дерево (не ланцюг), то $dim(T) = \sum_{v \in V, n_v \geqslant 1} (n_v - 1)$.*

Використовуючи дане твердження, можемо сформулювати умови, за яких метрична розмірність дерева буде дорівнювати 2. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Дерево T має метричну розмірність $dim(T) = 2$ тоді і тільки тоді коли у нього немає жодної вершини степеня більшого, ніж 3, існує або лише одна 3-листкова і жодної 2-листкової, або дві 2-листкові вершини. Зокрема, не може існувати рівно одна 2-листкова вершина.*

Proof. Нехай T — дерево і $dim(T) = 2$. Припустимо, що T не містить вершин степеня строго більшого, ніж 2. Тоді T є ланцюгом і згідно з результатом статті [7] $dim(T) = 1$. Отримали суперечність. Отже, граф T містить принаймні одну вершину степеня 3.

Нехай T містить вершину w, що має степінь 4. Тоді можливі такі випадки:

1) w — єдина внутрішня вершина. Тоді їй відповідає 4 листки. За лемою 3 $dim(T) = 3$.

2) w — вершина степеня 4, k — 2-листкова вершина. Згідно з лемою 3 до базису потрібно взяти три листки, що є близькими до w і один листок, близький до k. Отримали ту саму рівність $dim(T) = 3$.

Отже, всі вершини дерева мають степінь, що не перевищує 3.

Зауважимо, що довільне дерево T з $dim(T) = 2$, яке не має вершин степеня більшого, ніж 3, не може мати рівно одну 2-листкову вершину. Припустимо, що така вершина w існує. Тоді $deg_w = 2$ або $deg_w = 3$. В першому випадку згідно означення 2.5 w має бути внутрішньою, тому має виконуватись умова $deg_w \geqslant 3$. В другому видаку якщо решта вершин дерева T мають степінь менший, ніж 3, то w — єдина внутрішня вершина, а тому буде 3-листковою. Якщо існуватиме ще хоча б одна вершина u степеня 3, то u буде також 2-лисковою. В усіх випадках отримали суперечність.

Покажемо, що у T не може бути більше двох 2-листкових вершин. Нехай T все ж має три 2-листкові вершини v_1, v_2, v_3. Тоді згідно з лемою 3 до базису потрібно взяти по одному листку p_1, p_2, p_3, що є близькими до v_1, v_2, v_3 відповідно. В цьому випадку $dim(T) = 3$. Отже, в дереві T може існувати рівно дві 2-листкові вершини.

Доведемо в іншу сторону. Нехай T — дерево, що не має вершин степеня сторого більшого, ніж 3. Причому серед вершин степеня 3 існує не більше двох 2-листкових. Тоді якщо граф містить рівно одну вершину w степеня 3 і не має жодної 2-листкової вершини, то w близька до трьох листків. Отже, згідно з лемою 3 $dim(T) = 2$. У випадку коли в дерева T існує n внутрішніх вершин, причому дві з них є 2-листковими, а решта $n - 2$ мають по одному листку, $dim(T) = 2$ за тією ж таки лемою 3. $\square$

Означення 2.13. Говоритимемо, що граф G_1 *сконструйований* з графа G_2 якщо G_1 отриманий з графа G_2 додаванням одного ребра.

Твердження 1. *Якщо граф G сконструйований з дерева T, то G є уніциклічним графом.*

Proof. Оскільки довання рівно одного ребра до дерева T призводить до появи рівно одного циклу, то граф G є уніциклічним. □

Означення 2.14. Граф G_1 називається *листково сконструйований* з графа G_2 якщо G_1 отриманий з графа G_2 додаванням одного ребра, що з'єднує листок з довільною вершиною.

Теорема 2. *Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф, листково сконструйований з дерева T і $dim(T) < 3$. Тоді справедливі такі рівності:*

1) Якщо $dim(T) = 1$, то

$$dim(G) = dim(T) + 1;$$

2) Якщо $dim(T) = 2$, то

(a) $dim(G) = dim(T) + 1$, *якщо виконується одна з наступних умов:*

i. *в дереві T листок було з'єднано ребром з внутрішньою вершиною та утворений уніциклічний граф G є парним;*

ii. *в дереві T було з'єднано ребром листок з вершиною степеня 2 або листки, що належать різним 1-лисковим вершинам і в утвореному уніциклічному графі G не виконуються умови леми 1;*

(b) $dim(G) = dim(T)$ *у всіх інших випадках.*

Зауважимо, що не виконання умов леми 1 означає, що уніциклічний граф G має рівно дві основні вершини p, q, не є базисним або оплетенням базисного графа ланцюгами або є парним базисним 2.8 (оплетенням парного базисного графа) і при цьому $d(p, q) = k$.

Proof. Нехай уніциклічний граф G — листково сконструйований з дерева T. Нехай $dim(T) = 1$. Тоді з праці [7] випливає, що T є ланцюгом. Оскільки G - уніциклічний граф і відповідно не є ланцюгом, то $dim(G) > 1$. Утворений граф G може бути простим циклом або уніциклічним графом, що є частковим оплетеням циклу рівно одним ланцюгом. В першому випадку згідно [2] $dim(G) = 2$. В другому випадку візьмемо в метричний базис графа G листок p, що проектується в вершину w циклу. Вершини p і w з'єднані простим ланцюгом, тому всі вершини, що розділяє p, будуть розділятись w. Як відомо $dim(G) > 1$, тому існуватимуть вершини u, v в циклі, які не будуть розділятись w. Тому потрібно додати до базису вершину k, що є майже симетричною з w в циклі. Цього виявляється достатньо. Таким чином $dim(G) = 2$, тобто $dim(G) = dim(T) + 1$.

Нехай маємо уніциклічний граф G, що є листково сконструйований з дерева T і $dim(T) = 2$. Припустимо, що вершини u, v, які не з'єднані ребром в дереві T, з'єднані в G. Тоді можливі такі варіанти:

1. u, v — вершини в циклі G, які є листками в дереві T. Маємо 2 випадки:

1) u, v мають спільну внутрішню вершину w. Оскільки $dim(T) = 2$, то згідно з теоремою 1 T може містити рівно дві 2-листкові вершини або лише одну 3-листкову і не має жодної вершини степеня більшого, ніж 3. Тому отриманий граф G є уніциклічним графом, що є частковим оплетеням простого циклу рівно одним ланцюгом або мінорним графом. В обох випадках згідно з лемою 2 $dim(G) = 2$. Отже, $dim(G) = dim(T)$.

2) u, v належать різним внутрішнім вершинам w, q відповідно:

   (a) w, q – 2-листкові.За теоремою 1 в графі G не існуватиме жодної іншої 2-листкової вершини, крім даних. Звідси випливає, що отриманий уніциклічний граф G буде частковим оплетеням простого циклу ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. За лемою 2 $dim(G) = 2$. Тому $dim(G) = dim(T)$.

   (b) w – 2-листкова, q – 1-листкова вершини. У цьому випадку граф G буде частковим оплетеням мінорного графа ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$ і згідно з лемою 2 $dim(G) = 2$. Отримуємо $dim(G) = dim(T)$.

   (c) w, q – 1-листкові. Уніциклічний граф G матиме рівно 2 основні вершини.

Тоді якщо виконуються умови леми 1 , то метрична розмірність графа G буде дорівнювати 2, матимемо $dim(G) = dim(T)$. В іншому випадку, для того щоб розділити довільну пару вершин до базису потрібно додати ще одну. Таким чином $dim(G) = 3$. Отже, $dim(G) = dim(T) + 1$.

2. u, v — вершини в циклі графа G, одна з яких в дереві T є листком, а інша – внутрішньою вершиною. Маємо такі випадки:

1) u — листок, що є близьким, до 2-листкової вершини w, v — 2-листкова вершина. Отримаємо уніциклічний граф G, що має рівно одну вершину степеня 4. Тоді, згідно з результатами статті [13], якщо G — непарний, то $dim(G) = 2$. Тому $dim(G) = dim(T)$. В іншому випадку якщо G — парний уніциклічний граф, то $dim(G) = 3$. Звідси випливає, що $dim(G) = dim(T)+1$.

2) u — листок, що є близьким, до 2-листкової вершини w, v — 1-листкова вершина. Оскільки 1-листкова вершина як і 2-листкова має степінь 3, то після додавання ребра в циклі графа G матимемо рівно одну вершину степеня 4. Як випливає зі статті [13], якщо отриманий уніциклічний граф G є парним, то $dim(G) = 3$, відповідно $dim(G) = dim(T) + 1$. В іншому випадку $dim(G) = 2$ або $dim(G) = dim(T)$.

3) u — листок, що є близьким, до 1-листкової вершини w, v — 2-листкова вершина. Як і в попередньому випадку, в утвореному уніциклічному графі G 2-листкова вершина матиме степень 4. Згідно зі статтею [13], якщо G є парним, то $dim(G) = 3$ $(dim(G) = dim(T) + 1)$. Якщо G - непарний, то $dim(G) = 2$ $(dim(G) = dim(T))$.

4) u — листок, що є близьким, до 1-листкової вершини w, v — 1-листкова вершина. Вершина v є внутрішньою 1-листковою, тому $deg_v = 3$. Після додавання ребра отримаємо уніциклічний граф G з $deg_v = 4$. За результатами статті [13] граф G матиме $dim(G) = 2$ або $dim(G) = dim(T)$ якщо він буде непарним і $dim(G) = 3$ або $dim(G) = dim(T) + 1$ у протилежному випадку.

3. u, v — вершини в циклі G, одна з яких в T вершина степеня 2, а інша — листок. У випадку коли уніциклічний граф G має не більше однієї основної вершини він буде частковим обплетенням простого циклу або мінорного графа ланцюгами $L_1, \ldots, L_r$. За лемою 2 $dim(G) = 2$, тому $dim(G) = dim(T)$. Якщо граф G має рівно дві основні вершини та виконуються умови леми 1 , то $dim(G) = 2$, . Отже, $dim(G) = dim(T)$. В іншому випадку до базизу потрібно взяти ще одну вершину, тому $dim(G) = dim(T) + 1$.

□

Список використаних джерел

1. Khuller S. Landmarks in graphs / S. Khuller, B. Raghavachari, A. Rosenfeld // Disc. Appl.Math. – 1996 – **70** – P.217—229.

2. Harary F. On the the metric dimension of a graph / F. Harary, R. A. Melter // Ars Combinatoria – 1976 – **2** – P.191–195.

3. Slater P. J. Leaves of trees / P. J. Slater // Congr. Number – 1975 – **14** – P. 549–559.

4. Melter R. A. Metric bases in digital geometry / R. A. Melter, I. Tomescu // Comput.Vision, Graphics, Image Process. – 1984 – **25** – P. 113–121.

References

1. KHULLER, S., RAGHAVACHARI, B. and ROSENFELD, A. (1996) "Landmarks in graphs", Disc. Appl.Math., **70** , pp. 217—229.

2. HARARY, F. and MELTER, R. A.(1976) "On the the metric dimension of a graph", Ars Combinatoria, **2**, pp.191–195.

3. SLATER, P. J. (1975) "Leaves of trees", Congr. Number, **14**, pp.549–559.

4. MELTER, R. A. and TOMESCU, I. (1984)" Metric bases in digital geometry", Comput.Vision, Graphics, Image Process., **25**, pp. 113–121.

Список використаних джерел

5. Garey M. R. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness / M. R. Garey, D. S. Johnson // Freeman, New York, – 1979 – 338p.
6. Eroh L. A comparison between the metric dimension and zero forcing number of trees and unicyclic graphs/ L. Eroh, C. X. Kang, Y. Eunjeong // Acta Math. Sin., Engl. Ser. – 2017 – **33** – №6 – P. 731–747.
7. Chartrand G. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph/ G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson // Discrete Appl. Math. – 2000 – P. 99–113.
8. Sudhakara G. Graphs with metric dimension two — a characterization / G. Sudhakara, A. R. Hemanth Kumar // Adv. and Appl. in Disc. Math. – 2009 – **4** – №2 – P.169–186.
9. Dudenko M. On unicyclic graphs of metric dimension 2/ M. Dudenko, B. Oliynyk // Algebra and Discrete Math. – 2017 – **23** – №2 – P. 216–222.
10. Дуденко М. А. Уніциклічні графи метричної розмірності 2 / М. А. Дуденко // Наукові записки НаУКМА – 2015 – **165** – P. 7–10.
11. Дуденко М. А. Метрична розмірність уніциклічних графів, що містять не більше однієї основної вершини/ М. А. Дуденко // Вісник Львівського університету – 2017 – **83** – P. 189–195.
12. Sebo A. On Metric Generators of Graphs/ A. Sebo, E. Tannier // Mathematics of Operations Research – 2004 – **29** – №2 – P.383–393.
13. Dudenko M. On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4 / M. Dudenko, B. Oliynyk // Прикарпатські математичні публікації – 2018 (в друці).

References

5. GAREY, M. R. and JOHNSON, D. S. (1979) “Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness”, Freeman, New York, 338 p.
6. EROH, L., KANG, C. X. and EUNJEONG, Y. (2017) “A comparison between the metric dimension and zero forcing number of trees and unicyclic graphs”, Acta Math. Sin., Engl. Ser., **33**:6, pp. 731–747.
7. CHARTLAND, G., EROH, L. and JOHNSON, M. A. (2000) “Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph”, Discrete Appl. Math., pp. 99–113.
8. SUDHAKARA, G. and HEMANTH KUMAR, A. R. (2009) “Graphs with metric dimension two — a characterization”, Adv. and Appl. in Disc. Math., **4**:2, pp.169–186.
9. DUDENKO, M. and OLIYNYK, B. (2017) “On unicyclic graphs of metric dimension 2”, Algebra and Discrete Math., **23**:2, pp. 216–222.
10. DUDENKO, M. A. (2015) “Unicyclic graphs with metric dimension 2”, Nauk. Zapysky NaUKMA, **165**, pp. 7–10.
11. DUDENKO, M. A. (2017) “Metric dimension of unicyclic graphs with at most one main vertex”, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math., **83**, pp. 189–195.
12. SEBO, A. and TANNIER, E. (2004) “On Metric Generators of Graphs”, Mathematics of Operations Research, **29**:2 , pp. 383–393.
13. DUDENKO, M. and OLIYNYK, B. (2018) “On unicyclic graphs of metric dimension 2 with vertices of degree 4”, Carpathian Mathematical Publications , (in print) .

Received: 11.07.2017