УДК 519.21

О.М. Шевчик, *аспірант*

Максимальні локально нільпотентні підалгебри алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64,
e-mail: oshev4ik@gmail.com

O.M. Shevchyk, *Ph.D student*

Maximal locally nilpotent subalgebras of the Lie algebra $W_3(\mathbb{K})$

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01033, Kyiv, 64 Volodymyrska str.,
e-mail: oshev4ik@gmail.com

Нехай K – довільне поле характеристики нуль і A – кільце многочленів від трьох змінних над K. Алгебра Лі W(3, K) всіх K-диференціювань алгебри A містить трикутну підалгебру u(3, K), яка складається з трикутних диференціювань кільця многочленів A. Алгебра Лі u(3, K) локально нільпотентна, але не нільпотентна, її будова і вкладення в W(3, K) представляють значний інтерес, оскільки елементи із u(3, K) визначають автоморфізми кільця многочленів A. В роботі доведено, що u(3, K) є максимальною (за включенням) локально нільпотентною підалгеброю алгебри Лі W(3, K). Також побудована ще одна максимальна локально нільпотентна підалгебра s(3, K) із W(3, K), яка містить не локально нільпотентні диференціювання алгебри A і тому не є спряженою з u(3, K). Як наслідок, використовуючи попередні результати в цьому напрямі, доведено, що кожна максимальна локально нільпотентна підалгебра L рангу 3 над A і розмірності не менше 4 над полем K ізоморфна одній із підалгебр u(3, K) або s(3, K).

Ключові слова: кільце многочленів, алгебра Лі, диференціювання, локально нільпотентний

Let K be a field of characteristic zero and A the polynomial ring over K. The Lie algebra W(3, K) of all K-derivations on A contains the triangular Lie algebra u(3, K), consisting of all triangular derivations on A. The Lie algebra u(3, K) is locally nilpotent but not nilpotent, its structure and embeddings in W(3, K) is of great interest because elements of u(3, K) define automorphisms of the polynomial ring A. It is proved that u(3, K) is a maximal (by inclusion) locally nilpotent subalgebra of W(3, K). We also built a maximal locally nilpotent subalgebra s(3, K) of W(3, K) which contains non locally nilpotent derivations of A, the Lie algebra s(3, K) is therefore non-conjugated with u(3, K). As consequence we proved (using some previous results in this direction) that every maximal locally nilpotent subalgebra L of rank 3 over A and of dimension at least 4 over K is isomorphic either to u(3, K) or to s(3, K).

Key Words: polynomial ring, Lie algebra, derivation, locally nilpotent.
Статтю представив доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Кириченко

1 Вступ

Нехай $\mathbb{K}$ – довільне поле характеристики нуль і $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ – кільце многочленів над $\mathbb{K}$. Нагадаємо, що $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D : A \to A$ називається $\mathbb{K}$-диференціюванням кільця A, якщо $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для довільних $f, g \in A$. Векторний простір $Der_{\mathbb{K}}A$ (над полем $\mathbb{K}$) всіх $\mathbb{K}$-диференціювань A є алгеброю Лі над $\mathbb{K}$ відносно операції комутування

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1,$$

де $D_1, D_2 \in Der_{\mathbb{K}}A$. Будова алгебри Лі $Der_{\mathbb{K}}A$ і її підалгебр представляє великий інтерес, оскільки у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ диференціювання D кільця многочленів A може розглядатися як векторне поле на $\mathbb{K}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами. Дослідженню алгебр Лі з поліноміальними, раціональними коефіцієнтами чи коефіцієнтами із кільця формальних степеневих рядів присвячено багато робіт різних авторів (див., наприклад, [1], [2], [6]). В роботі [4] дано опис максимальних (за включенням) підалгебр Лі із $Der_{\mathbb{K}}A$, де A – область цілісності над $\mathbb{K}$, при умові, що $\mathrm{rk}_A L \leqslant 3$. Ці алгебри Лі ізоморфні підалгебрам трикутної підалгебри $u_3(\mathbb{K})$ із $Der_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. Тому цікавим є питання про максимальні локально нільпотентні підалгебри із $W_3(\mathbb{K})$. Основний результат роботи: доведено максимальність в класі локально нільпотентних підалгебр підалгебри $u_3(\mathbb{K}) \in W_3(\mathbb{K})$ і підалгебри $s_3(\mathbb{K})$ вигляду $s_3(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\,(\frac{\partial}{\partial x_3},\ x_1\frac{x_3^i}{i!}\frac{\partial}{\partial x_1},\ x_2\frac{x_3^i}{j!}\frac{\partial}{\partial x_2},\ i,j \geqslant 0\ )$. Як наслідок, отримано опис максимальних локально нільпотентних підалгебр рангу 3 над A із $W_3(\mathbb{K})$.

Позначення в роботі стандартні, основне поле $\mathbb{K}$ довільне, характеристики нуль. Через A ми позначаємо кільце многочленів $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ і через R – його поле часток $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Алгебру Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціювань кільця A будемо позначати через $W_n(\mathbb{K})$. Якщо $g_1, \ldots, g_m$ – елементи алгебри Лі L над полем $\mathbb{K}$, то через $\mathbb{K}\langle g_1, \ldots, g_m\rangle$ позначається лінійна оболонка цих елементів над $\mathbb{K}$. Для підалгебри $L \subseteq W_n(\mathbb{K})$ L над R визначимо ранг $\mathrm{rk}_R L$ над полем R як розмірність $\dim_R RL$. Через $u_n(\mathbb{K})$ позначається трикутна підалгебра із $W_n(\mathbb{K})$, яка складається із диференціювань вигляду

$$D = f_1(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} +$$

$$+ \ldots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n},\ f_n \in \mathbb{K}.$$

Основані властивості диференціювань можна знайти в [3]. Нагадаємо, що алгебра Лі L називається локально нільпотентною, якщо кожна її скінченнопороджена підалгебра нільпотентна. Алгебра Лі $u_n(\mathbb{K})$ локально нільпотентна, але ненільпотентна (див. [1]).

2 Максимальність $u_3(\mathbb{K})$ в $W_3(\mathbb{K})$

Для доведення основної теореми цього розділу наведемо дві допоміжні леми.

Лема 1. *(див., наприклад, [?]). Нехай $D_1, D_2 \in W_3(\mathbb{K})$ і $a, b \in R$. Тоді виконується рівність $[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1$.*

Лема 2. *Якщо існує елемент $D_0 \in W_3(\mathbb{K}) \setminus u_3(\mathbb{K})$ такий, що підалгебра L_1, породжена D_0 і підалгеброю $u_3(\mathbb{K})$ локально нільпотентна, то підалгебра L_1 містить елемент D вигляду $D = \alpha_1 x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$, де $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{K}$ і хоча б один із цих коефіцієнтів ненульовий.*

Доведення. Оскільки елементи $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ утворюють базис модуля $W_3(\mathbb{K})$ над кільцем A, то елемент D_0 із умови леми однозначно записується у вигляді

$$D_0 = r_1\frac{\partial}{\partial x_1} + r_2\frac{\partial}{\partial x_2} + r_3\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (1)$$

де $r_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. Покажемо, що коефіцієнти r_i мають вигляд із умови леми. Доведення для зручності розділимо на частини:

Крок 1. Покажемо спочатку, що елемент D_0 вигляду (1) із $W_3(\mathbb{K})$ $u_3(\mathbb{K})$ можна вибрати так щоб r_1 мав вигляд $r_1 = \alpha_1 x_1$, $\alpha_1 \in \mathbb{K}$. Якщо $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 0$, то $r_1 = r_1(x_2, x_3) \in \mathbb{K}[x_2, x_3]$ і тоді $r_1\frac{\partial}{\partial x_1} \in u_3(\mathbb{K})$. Легко бачити, що елемент $D_0 - r_1\frac{\partial}{\partial x_1}$ належить підмножині $L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ і його можна вибрати замість елемента D_0 і вважати, що $r_1 = 0 = \alpha_1 x_1$. Нехай тепер $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \neq 0$. Якщо $deg_{x_1} r_1 = m_1 \geqslant 2$, то елемент

$$\overline{D}_0 = [\frac{\partial}{\partial x_1}, [\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_1}, D_0]..]],$$

де комутування $m_1 - 1$ разів, не лежить в підалгебрі $u_3(\mathbb{K})$ і для елемента $\overline{r}_1 = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{m_1-1}(r_1)$ отримаємо $deg_{x_1}\bar{r_1} = 1$, де

$$\bar{D_0} = \bar{r_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{r_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{r_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

для деяких $\bar{r_2}, \bar{r_3} \in A$. Замінюючи елемент D_0 на $\bar{D_0}$ ми можемо зразу вважати, що $deg_{x_1} r_1 = 1$ і тоді

$$r_1 = x_1 f_1(x_2, x_3) + g_1(x_2, x_3)$$

для деяких многочленів $f_1, g_1 \in \mathbb{K}[x_2, x_3]$, $f_1 \neq 0$. Оскільки $g_1(x_2, x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} \in u_3(\mathbb{K})$, то, не втрачаючи загальності можна вважати, що $g_1(x_2, x_3) = 0$ і $r_1 = x_1 f_1(x_2, x_3)$. Якщо $f_1(x_2, x_3) = const$, то покладаючи $\alpha_1 = f_1(x_2, x_3)$ ми отримаємо потрібний вираз для коефіцієнта r_1 в виразі (1). Якщо $deg_{x_2} f_1 \geqslant 1$, або $deg_{x_3} f_1 \geqslant 1$, то замінюючи D_0 на елемент

$$(\frac{\partial}{\partial x_2}, (\frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_2}, D_0)))$$

або на

$$(\frac{\partial}{\partial x_3}, (\frac{\partial}{\partial x_3}, \ldots, (\frac{\partial}{\partial x_3}, D_0)))$$

і повторюючи проведені вище міркування ми можемо без втрати загальності вважати, що $f_1 = const$ і тоді r_1 має потрібний вигляд.

Крок 2. Покажемо, що D_0 можна вибрати так, щоб у виразі (1) мала місце рівність

$$r_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \beta_i \in \mathbb{K}.$$

Якщо $r_2 = r_2(x_3) \in \mathbb{K}(x_3)$, то $r_2\frac{\partial}{\partial x_2} \in u_3(\mathbb{K})$ і тому, не втрачаючи загальності можна вважати, що $deg_{x_1}r_2 \geqslant 1$ або $deg_{x_2}r_2 \geqslant 1$. Нехай, наприклад, $deg_{x_1}r_2 \geqslant 1$. Повторюючи міркування із попереднього абзацу можна показати, що без втрати загальності виконується рівність $deg_{x_1}r_2 = 1$. Тоді

$$r_2 = x_1g_1(x_2, x_3) + g_2(x_2, x_3)$$

для деяких многочленів $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[x_2, x_3], g_1 \neq 0$. Як і вище, можна показати, що не втрачаючи загальності можна вважати, що $deg_{x_1}g_1 = 0$ і $deg_{x_3}g_1 = 0$. Але тоді

$$r_3 = \beta_1x_1 + g_2(x_2, x_3)$$

для деякого $\beta_1 \in \mathbb{K}$. Якщо $deg_{x_2}g_2 = 0$, то $g_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3} \in u_3(\mathbb{K})$ і тому без втрати загальності вважаємо, що $g_2 = 0$ і $r_2 = \beta_1x_1$, тобто r_2 має потрібний вигляд. Нехай $deg_{x_2}g_2 \geqslant 1$. Як і раніше можна вважати (при необхідності понизивши степінь), що $deg_{x_2}g_2 = 1$, тобто

$$r_2 = \gamma x_1 + \delta x_2h(x_3) + \mu h_1(x_3).$$

Ті ж самі міркування показують, що елемент D_0 в (1) можна вибрати так, що $r_2 = \gamma x_1 + \beta x_2$ для деяких $\beta, \gamma \in \mathbb{K}$ і r_2 має потрібний вигляд. Аналогічно можна розглянути випадок, коли $deg_{x_2}r_2 \geqslant 1$. Таким чином,

$$r_2 = \beta_1x_1 + \beta_2x_2, \beta_i \in \mathbb{K}.$$

Аналогічні міркування показують, що коефіцієнт r_3 в (1) можна вважати рівним

$$r_3 = \gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3$$

для деяких $\gamma_i \in \mathbb{K}$. Оскільки

$$D_0 = \alpha_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta_1x_1 + \beta_2x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} +$$

$$+(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

належить множині $L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$, то хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ ненульовий.

□

Теорема 1. *Підалгебра $u_3(\mathbb{K})$ є максимальною (за включенням) локально нільпотентною підалгеброю алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що $u_3(\mathbb{K})$ не є максимальною локально нільпотентною підалгеброю із $W_3(\mathbb{K})$ і $u_3(\mathbb{K}) \subset L_1$ – строге включення для деякої локально нільпотентної підалгебри L_1 із $W_3(\mathbb{K}$. Очевидно, що $\mathrm{rk}_R L_1 = 3$. За лемою 2 існує елемент $D_0 \in L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ вигляду

$$D_0 = \alpha_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta_1x_1 + \beta_2x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} +$$

$$+(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

де $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in \mathbb{K}$, і хоча б один із цих елементів ненульовий. Покажемо спочатку, що елемент $D_0 \in L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ можна вибрати у вигляді

$$D_0 = \alpha_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3x_3\frac{\partial}{\partial x_3},$$

де хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ ненульовий. Відзначимо спочатку, що, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\gamma_1 = 0$. Дійсно, нехай це не так і для деякого елемента D_0 виконується рівність $\gamma_1 \neq 0$. Тоді

$[x_3\frac{\partial}{\partial x_1}, D_0] = (\gamma_1x_1 - \gamma_2x_2 - \gamma_3x_3 + \alpha_1x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_1x_3\frac{\partial}{\partial x_3} \in L_1,$
і, оскільки $\gamma_1 \neq 0$, то

$$[x_3\frac{\partial}{\partial x_1}, D_0] \in L_1 \setminus u_3(\mathbb{K}).$$

Доданки

$$\beta_1x_3\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \text{і} \quad (-\gamma_2x_2 - \gamma_3x_3 + \alpha_1x_3)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

лежать в підалгебрі $u_3(\mathbb{K})$ і тому можна вважати, що отриманий елемент має вигляд

$$-\gamma_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_1x_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Але тоді D_0 має потрібний вигляд і тому, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\gamma_1 = 0$. Аналогічно можна показати, що D_0 можна вибрати так, щоб $\gamma_2 = 0$. Тому далі вважаємо, що $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Покажемо тепер, що без втрати загальності можна вважати, що $\beta_1 = 0$. Нехай це не так і для деякого $D_0 \in L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ маємо $\beta_1 \neq 0$. Розглянемо елемент

$$[x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, D_0] = [x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha_1x_1 + (\beta_1x_1 + \beta_2x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} +$$

$$+\gamma_3x_3\frac{\partial}{\partial x_3}] = (\alpha_1x_2 - \beta_1x_2 - \beta_2x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \beta_1x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Оскільки

$$(\alpha_1 - \beta_2)x_2\frac{\partial}{\partial x_1} \in u_3(\mathbb{K}),$$

то в $L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ лежить елемент вигляду $-\beta_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, який має потрібний вигляд. Тому можна вважати, що $\beta_1 = 0$ і тому в $L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ лежить елемент D_0 вигляду

$$D_0 = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (\beta_2 x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + (\gamma_3 x_3)\frac{\partial}{\partial x_3},$$

де хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_1, \beta_2, \gamma_3$ ненульовий.

Покажемо тепер, що $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3$. Розглянемо рівність

$$[D_0, x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}] = (\gamma_3 - \beta_3) x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Якщо $\gamma_3 \neq \beta_2$, то лінійний оператор adD_0 має на L_1 власний вектор $x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ з ненульовим власним числом $\gamma_3 - \beta_2$. Це суперечить локальній нільпотентності підалгебри L_1. Тому $\beta_3 = \gamma_2$. Аналогічно із рівності

$$[D_0, x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}] = (\beta_2 - \alpha_1) x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

випливає, що $\alpha_1 = \beta_2$, а рівність

$$[D_0, x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}] = (\gamma_3 - \alpha_1) x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

дає співвідношення $\alpha_1 = \gamma_3$. Але тоді в $L_1 \setminus u_3(\mathbb{K})$ лежить диференціювання Ейлера

$$E_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Далі, $x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \in u_3(\mathbb{K})$ і тому

$$[E_3, x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1}] = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \in L_1.$$

Це означає, що $x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ – власний вектор для $\mathrm{ad}E_3$ в L_1 з власним числом $\lambda = 1$. Це суперечить умові локальної нільпотентності підалгебри L_1. Отримана суперечність показує, що $L_1 = u_3(\mathbb{K})$ і $u_3(\mathbb{K})$ – максимальна локально нільпотентна підалгебра із $W_3(\mathbb{K})$.

□

В алгебрі Лі $W_3(\mathbb{K})$ ми вкажемо ще одну максимальну локально нільпотентну підалгебру рангу 3 над R (яка неізоморфна підалгебрі $u_3(\mathbb{K})$).

Теорема 2. *Нехай L – підалгебра із $W_3(\mathbb{K})$ вигляду $L = \mathbb{K}\ (\frac{\partial}{\partial x_3},\ x_1 \frac{x_3^i}{i!} \frac{\partial}{\partial x_1},\ x_2 \frac{x_3^i}{i!} \frac{\partial}{\partial x_2},\ i = 0, 1, 2, \ldots)$. Тоді L – максимальна (за включенням) локально нільпотентна підалгебра рангу 3 над R із алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$.*

Доведення. Алгебра Лі L містить абелевий ідеал

$$N = \mathbb{K}\langle \frac{\partial}{\partial x_3}, x_1 \frac{x_3^i}{i!} \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 \frac{x_3^i}{i!} \frac{\partial}{\partial x_2}, i = 0, 1, 2, \ldots \rangle$$

корозмірності 1 в L.

Очевидно, $\mathrm{ad}(\frac{\partial}{\partial x_3})$ – локально нільпотентний лінійний оператор на векторному просторі N. Звідси легко випливає, що алгебра Лі L локально нільпотентна. Припустимо від супротивного, що L не є максимальною локально нільпотентною і міститься (строго) в деякій більшій локально нільпотентній підалгебрі L_1 із $W_3(\mathbb{K})$. Візьмемо довільний елемент $D_0 \in L_1 \setminus L$. Тоді елемент D_0 однозначно запишеться у вигляді

$$D_0 = r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + r_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad r_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3].$$

Покажемо, що $r_1 = x_1 f_1(x_3)$ для деякого многочлена $f_1(t) \in \mathbb{K}[t]$. Якщо $r_1 = 0$, то r_1 має потрібний вигляд. Тому далі вважаємо, що $r_1 \neq 0$. Покажемо, що елемент $D_0 \in L_1 \setminus L$ можна вибрати так, щоб $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \neq 0$. Дійсно, нехай навпаки $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 0$. Тоді $r_1 = g(x_2, x_3)$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x_2, x_3]$. Має місце рівність

$$[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, D_0] = -g(x_2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{r_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{r_3} \frac{\partial}{\partial x_3}$$

для деяких многочленів $\bar{r_2}, \bar{r_3} \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. Оскільки $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \in L_1$, то приєднане диференціювання $ad(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1})$ з огляду на останню рівність не є локально нільпотентним диференціюванням алгебри Лі L_1. Це суперечить локальній нільпотентності підалгебри L_1 і тому $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} \neq 0$. Покажемо далі, що $deg_{x_1} r_1 = 1$. Дійсно, нехай це не так і $deg_{x_1} r_1 = m > 1$. Із рівностей

$$[x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + r_3 \frac{\partial}{\partial x_3}] =$$

$$= (x_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_1} - r_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{r_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{r_3} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

де $\bar{r_i} \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ та із умови $deg_{x_1} r_1 = m > 1$ отримаємо, що $\deg_{x_1}(x_1 \frac{\partial r_1}{\partial x_1} - r_1) = m$.

Звідси легко, випливає, що приєднане диференціювання $ad(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1})$ не є локально нільпотентним диференціюванням алгебри Лі L_1. Це суперечить її вибору і тому $deg_{x_1} r_1 = 1$. Тоді

$$r_1 = x_1 f(x_2, x_3) + g(x_2, x_3)$$

для деяких многочленів $f, g \in \mathbb{K}[x_2, x_3]$ і $f \neq 0$.

Зауважимо, що $\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = 0$. Дійсно, нехай це не так і $deg_{x_2} r_1 = m > 0$. Тоді маємо

$$[x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, r_1\frac{\partial}{\partial x_1} + r_2\frac{\partial}{\partial x_2} + r_3\frac{\partial}{\partial x_3}] =$$

$$= x_2\frac{\partial r_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \overline{r}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \overline{r}_3\frac{\partial}{\partial x_3} \in L_1,$$

для деяких многочленів $\overline{r}_2, \overline{r}_3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. Із останньої рівності ми бачимо, що $\deg_{x_2} x_2\frac{\partial r_1}{\partial x_2} = m$ і тому, як неважко переконатися, приєднане диференціювання $\mathrm{ad}(x_2\frac{\partial}{\partial x_2})$ не є локально нільпотентним диференціюванням алгебри Лі L_1, що суперечить її вибору. Отримана суперечність показує, що $\frac{\partial r_1}{\partial x_2}$ і тому $r_1 = x_1 f(x_3) + g(x_3)$ для деяких многочленів $f, g \in \mathbb{K}[x_3]$. Оскільки

$$x_1 f(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} \in L \subseteq L_1,$$

то елемент D_0 із $L_1 \setminus L_0$ можна вибрати у вигляді

$$D_0 = g(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + r_2\frac{\partial}{\partial x_2} + r_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Але тоді для коефіцієнта $r_1 = g(x_3)$ маємо $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = 0$, що неможливо за доведеним вище. Тому

$$D_0 = x_1 f_1(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + r_2\frac{\partial}{\partial x_2} + r_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Аналогічно можна довести, що $r_2 = x_2 f_2(x_3)$ для деякого многочлена $f_2(x_3) \in \mathbb{K}[x_3]$. Таким чином, елемент D_0 можна вибрати у вигляді

$$D_0 = x_1 f_1(x_3)\frac{\partial}{\partial x} + x_2 f_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} + r_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

для деякого $r_3 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$. Покажемо тепер, що $r_3 \in \mathbb{K}$. Оскільки

$$x_1 f_1(x_3)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 f_2(x_3)\frac{\partial}{\partial x_2} \in L \subseteq L_1,$$

то, не втрачаючи загальності можна вважати, що $D_0 = r_3\frac{\partial}{\partial x_3}$.

Повторюючи міркування із попередніх абзаців неважко показати, що $r_3 = f_3(x_3)$ для деякого многочлена $f_3(x_3) \in \mathbb{K}[x_3]$. Якщо $deg_{x_3} f_3 = 0$, або $r_3 = 0$, то все доведено. Нехай, навпаки, $deg_{x_3} f_3 = m \gtreqless 1$. Оскільки

$$[\frac{\partial}{\partial x_3}, f_3(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}] = \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3} \in L_1,$$

то, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $deg_{x_3} f_3 = m = 1$. Але тоді елемент D_0 можна взяти у вигляді $D_0 = x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$. Візьмемо елемент $D_1 = x_1 x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1} \in L$, і розглянемо добуток

$$[D_0, D_1] = [x_3\frac{\partial}{\partial x_3}, x_1 x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1}] =$$

$$= -2x_1 x_3^2\frac{\partial}{\partial x_1} = -2D_1.$$

Звідси випливає, що приєднане диференціювання $\mathrm{ad}D_0$ алгебри Лі L_1 не є локально нільпотентним, що суперечить локальній нільпотентності підалгебри L_1. Отримана суперечність показує, що $r_3 = c \in \mathbb{K}$ і тоді $D_0 \in L$. Це означає, що $L_1 = L$ – максимальна локально нільпотентна підалгебра із $W_3(\mathbb{K})$. □

Наслідок 1. *Кожна максимальна (за включенням) локально нільпотентна підалгебра рангу 3 із $W_3(\mathbb{K})$ ізоморфна одній із наступних підалгебр із W_3*

L_1 – максимальна нільпотентна підалгебра рангу 3 над R розмірності 3 над $\mathbb{K}$.

$L_2 = u_3(\mathbb{K})$ – трикутна підалгебра із $W_3(\mathbb{K})$.

$L_3 = \mathbb{K}\ (\frac{\partial}{\partial x_3},\ x_1\frac{x_3^i}{i!}\frac{\partial}{\partial x_1},\ x_2\frac{x_3^i}{i!}\frac{\partial}{\partial x_2},\ i = 0, 1,).$

Доведення. Із теорем 1 і 2 випливає, що L_2 і L_3 – максимальні локально нільпотентні підалгебри із $W_3(\mathbb{K})$. Підалгебра L_1 максимальна локально нільпотентна за умовою (зауважимо, що $W_3(\mathbb{K})$ такі підалгебри існують, наприклад,

$$L_1 = \mathbb{K}(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, x_3\frac{\partial}{\partial x_3})).$$

Нехай тепер L – максимальна локально нільпотентна підалгебра із $W_3(\mathbb{K})$, яка має ранг 3 над R. Тоді за теоремою 1 отримаємо, що L ізоморфна одній із алгебр Лі L_1, L_2 або L_3. □

Зауважимо, що нільпотентні алгебри Лі диференціювань областей цілісності, які мають ранг 3 над цими областями вивчалися в [5].

Список використаних джерел

1. *Bavula V.V.* Lie algebras of traiangular derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras / Bavula V.V. // Izv. RAM. Ser. Mat., 2013, 77, 3-44.
2. *Makedonskyi Ie. O.* On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations / Makedonskyi Ie. O., Petravchuk A.P. // Journal of Algebra, 2014, 401, 245-257.
3. *A. Nowicki* Polynomial derivations and their rings of constants / A. Nowicki // N.Copernicus University Press - 1994 - Torun.
4. *Petravchuk A.P.* On locally nilpotent Lie algebras of derivations of integral domains / Petravchuk A.P., Shevchyk O.M., Sysak K.Ya. // Appl. Problems of Mech. and Math., Pidstrygach Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017, **15**. – P.7-15.
5. *Petravchuk A.P.* On nilpotent Lie algebras of derivations of fraction fields / Petravchuk A.P. // Algebra and Discrete Math., (2016), v.22, no. 1, 118-131.
6. *T. Siebert* Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic 0 / T. Siebert // Math. Ann, 305, (1996), 271–286.
7. *K. Ya. Sysak* On nilpotent Lie algebras of derivations with large center / K. Ya. Sysak // Algebra Discrete Math., 2016, **21**, 153–162.

References

1. BAVULA V.V. (2013) Lie algebras of traiangular derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras. Izv. RAM. Ser. Mat., **77**, pp.3-44
2. MAKEDONSKYI Ie. O., PETRAVCHUK A.P. (2014) On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations. Journal of Algebra, **401**, pp.245-257.
3. NOWICKI A. (1994) "Polynomial derivations and their rings of constants N.Copernicus University Press, Torun.
4. PETRAVCHUK A.P., SHEVCHYK O.M., SYSAK K.Ya. (2017) On locally nilpotent Lie algebras of derivations, Appl. Problems of Mech. and Math., Pidstrygach Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, **15**, pp.7-15.
5. PETRAVCHUK A.P. (2016) On nilpotent Lie algebras of derivations of fraction fields, Algebra and Discrete Math., v.22, no. 1, pp.118-131.
6. T. SIEBERT (1996) Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic /,0, Math. Ann, **305**, pp.271–286.
7. K. YA. SYSAK (2016) On nilpotent Lie algebras of derivations with large center. Algebra Discrete Math., **21**, pp.153–162.

Received: 07.03.2017