

УДК 004.42+612.1

Балабанов В. А., аспірант,
Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

**Моделі транспортних систем для
рівномірного постачання рідини до
заданого об'єму простору**

Харківський національний університет імені
В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, пл. Свободи, 4
e-mail: lekarsenten@gmail.com

V. A. Balabanov, Postgraduate Student,
N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

**Modeling of transport systems for uniform
fluid delivery to a given volume of space**

V. N. Karazin Kharkov National University, 61022,
Kharkiv, Svobody sq., 4
e-mail: lekarsenten@gmail.com

Розглядається задача постачання рідини або газу до/від розподіленої системи споживачів/виробників, які займають безперервним чином деякий об'єм суцільного середовища, по розгалуженій системі трубок. Задача має безпосереднє відношення до систем транспорту рідини у сучасних електрохімічних паливних елементах, електрохімічних реакторів та подібних систем, які потребують високоточного рівномірного постачання газу та виводу рідини до/від пористого каталітичного шару, де відбуваються реакції. Аналогічні системи, такі як кровоносні, дихальні та інші трофічні провідні системи тварин та рослин, наявні в живій природі і їх дизайн може бути використано в технічних системах.

В роботі запропонована модель провідної системи у вигляді самоподібного бінарного дерева трубок, кути розгалужень якого відповідають умові мінімального гальмування течії на розгалуженнях. Отримані умови на діаметри та довжини трубок, які забезпечують рівномірний транспорт до кінцевих трубок дерева з мінімальними витратами енергії при заданому об'ємі системи. Показано існування двох типів розв'язків задачі.

Ключові слова: паливні елементи, транспорт рідини, бінарне дерево, оптимальні системи.

The problem of supply of a liquid or gas to/from a distributed system of consumers/producers, which occupy uniformly a given volume of continuous medium, through the branched system of tubes is considered. The problem is directly related to the fluid transportation systems in modern electrochemical fuel cells, electrochemical reactors and similar systems, which require highly uniform supply of gas and the withdrawal of liquid to/from the porous catalytic layer, where the reactions occur. Similar systems, such as the circulatory, respiratory and other trophic conductive systems in animals and plants, are presented in nature and their design can be used in technical systems.

In the paper, a model of the transportation system in the form of a self-similar binary tree of tubes whose branching angles correspond to the condition of minimal flow deceleration at the bifurcations is proposed. The conditions for the diameters and lengths of the tubes that provide uniform transport to the terminal pipes of the tree with minimal energy consumption at a given volume of the system are obtained. The existence of two types of solutions of the problem formulated is shown.

Key Words: Fuel cells, Fluid transport, Binary tree, Optimal systems.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

В технічних системах часто використовуються розгалужені транспортні системи для постачання рідини або газу до розподіленої системи споживачів – водо- і газопроводи, теплопроводи, дренажні системи, у тому числі на мікро- і нанорівні – для сучасних мікроелектромеханічних систем (MEMS), що використовуються як

паливні елементи, мікродвигуни, електрохімічні або мікробіологічні реактори, лабораторії на чіпах та інші. В живій природі аналогічні системи використовуються для постачання газу в дихальних системах, крові – в системах кровообігу, трофічних рідин – для живлення тканин у тварин, рослинних соків – у рослин та багато інших. Головними принципами будови систем постачання в живій природі є мінімізація

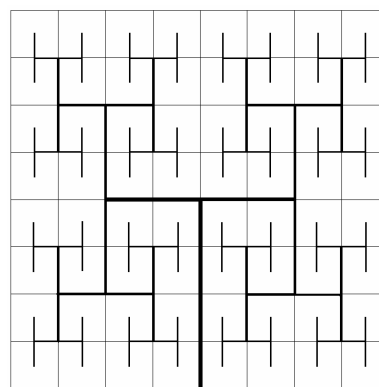
витрат енергії, завдяки чому такі системи задовольняють принципу мінімуму виробництва ентропії [1], а також рівномірного заповнення без самоперетинів деякого заданого об'єму простору [2-5]. В останній час інтерес до таких систем підвищився, зокрема, у зв'язку з необхідністю оптимізації дизайну систем постачання газу та виводу рідини з новітніх паливних елементів для електрокарів, велокарів та стаціонарних кімнатних електроприладів. В основі таких екологічно чистих паливних елементів лежать електрохімічні реакції з'єднання водню і кисню повітря з утворенням води та електричного потенціалу на електродах [6], або аналогічні паливні елементи, які працюють на метанолі.

В обидвох типах елементів відбувається перетворення хімічної енергії в електричну без проміжного утворення теплової енергії. Успішна робота паливного елементу потребує високоточного рівномірного розподілу палива та кисню в деякому об'ємі пористого шару, який заповнений наночастинками каталізатора. Зараз ціна водневих паливних елементів складає 500\$ на 1 кВт енергії, але заплановано її зменшення до 50\$ за рахунок всебічної оптимізації.

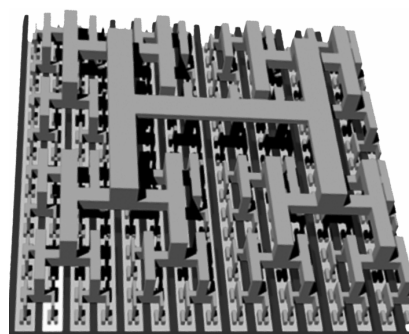
Для активних мембран в формі квадрата або прямокутника в паливних елементах використовуються змієподібні канали, які щільно заповнюють шар, паралельний до пористого шару, але такий дизайн не забезпечує рівномірного постачання палива та кисню і виводу води, що приводить до оклюзії каналів, нерівномірному навантаженню каталізатора та, як наслідок, нерівномірному нагріванню за рахунок екзотермічних хімічних реакцій, неефективній роботі, зниженню часу життя каталізатора та ряду інших небажаних фізико-хімічних процесів [7,8].

Запропонована та протестована велика кількість різних видів дизайну систем трубок для постачання газів та рідин з паралельною та сітчастою геометрією, у вигляді фракталів, кривій Гільберту, листів рослин та багато інших [7-9], але рівномірний розподіл зафіксовано тільки для фрактального дерева з кутом розгалужень $\alpha = \pi / 2$ (Рис.1а,б). Такий великий кут розгалужень значно гальмує рух газу та рідини, що викликає небажані витрати енергії.

Відомо, що в артеріальних та дихальних системах людини, тварин та рослин кути розгалужень транспортних елементів відповідають принципу мінімуму виробництва ентропії [1,10]. Розв'язок відповідної математичної постановки задачі оптимізації дає



а



б

Рис.1. Найпростіше бінарне дерево для рівномірного постачання рідини до кожного квадрату заданої поверхні в 2d (а) 3d (б) вигляді

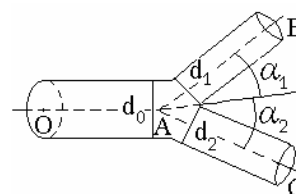


Рис. 2. Елементарна одиниця будови розгалуженого трубопроводу

залежності кутів розгалуження θ в біфуркації трубок з діаметрами d_0, d_1, d_2 (Рис.2) у вигляді [10]

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &= ((1 + \xi^\gamma)^{4/\gamma} + 1 - \xi^4) / (1 + \xi^\gamma)^{2/\gamma} / 2, \\ \cos \alpha_2 &= ((1 + \xi^\gamma)^{4/\gamma} \xi^4 - 1) / (1 + \xi^\gamma)^{2/\gamma} / \xi^2 / 2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\xi = \min\{d_1, d_2\} / \max\{d_1, d_2\}$ – коефіцієнт асиметрії біфуркації, $\gamma = 3$.

При цьому діаметри судин в кожній біфуркації зв'язані між собою законом Мюрера [1-5, 10]:

$$d_0^\gamma = d_1^\gamma + d_2^\gamma. \quad (2)$$

Численні вимірювання на живих системах показали, що $\gamma \in [2.55, 3.02]$ для артеріальних судин, $\gamma \in [2.76, 3.02]$ для вен, $\gamma \in [2.61, 2.91]$ для бронхіального дерева, $\gamma \in [2.89, 3.06]$ - для листів рослин [1-5,11].

Рівняння (1) забезпечують мінімальні витрати енергії на скрутах потоку на кути α_1, α_2 під час його розділення між трубками з d_1, d_2 , а (2) відповідає оптимальній прямій трубці [11]. Було показано, що (1)–(2) є необхідними умовами локальної і глобальної оптимальності самоподібного бінарного дерева, яке забезпечує постачання рідини до або від розподіленої системи точок в просторі з мінімальними витратами енергії [1,10,11].

Кожний зі шляхів від вхідного перерізу до будь-якої кінцевої трубки вздовж фрактального трубопроводу (Рис.1) складається з аналогічних трубок 1-го, 2-го, ... n-го порядку розгалуження, так що кожний шлях має однаковий опір, а тому і однакову витрату рідини, якщо на виході з кінцевих трубок підтримується однаковий тиск P^* . Аналогічні 3d системи постачання рідини були запропоновані в [12] (Рис.1б). На відміну від 2d систем, вони займають значно більший об'єм простору. Оскільки навіть 2d дизайн (Рис.1а) транспортної системи займає >60% маси та ~30% загальної вартості паливного елемента [6], то задача зменшення її об'єму стає найважливішою.

В даній роботі досліджуються несиметрично розгалужені трубопроводи у вигляді 2d бінарних дерев, які забезпечують рівномірне постачання та розподілення рідини з кутами розгалуження, близькими до оптимальних значень (1).

2. Математичне обґрунтування дизайну трубопроводів як бінарних дерев з постійним загальним опором вздовж довільного шляху

2.1. Випадок елементарної біфуркації.

Спочатку розглянемо біфуркацію, яка утворена трьома трубками (Рис.2). В перерізі О заданий вхідний тиск P_0 , а на виході з біфуркації в перерізах В,С – вихідний тиск $P^* = const$. Вздовж трубок ОА, АВ, АС маємо стаціонарну ламінарну течію рідини, так що опір кожної трубки (з діаметрами $d_{0,1,2}$ та довжинами $L_{0,1,2}$) відповідає Пуазейлівському ($Z_j = kL_j / d_j^4$, $k = 128\mu / \pi$, μ - в'язкість рідини), так що

$$P_0 - P_1 = Q_0 Z_{01}, P_1 - P^* = Q_1 Z_{12}, P_1 - P^* = Q_2 Z_{13}, \quad (3)$$

де $Z_{01} = Z_{OA}$, $Z_{12} = Z_{AB}$, $Z_{13} = Z_{AC}$, P_1 - тиск в перерізі А (Рис.2), $Q_0 = Q_1 + Q_2$ - загальна об'ємна витрата течії.

З (3) легко отримати умову рівномірного постачання рідини (тобто $Q_1 = Q_2$) крізь несиметричне розгалуження ($L_1 \neq L_2, d_1 \neq d_2$) у вигляді:

$$Z_{12} = Z_{13} \Rightarrow L_1 / L_2 = (d_1 / d_2)^4. \quad (4)$$

Будемо вважати, що трубопровід є самоподібним, так що $L_1 / L_0 = b$, $L_2 / L_0 = b\zeta$, $b, \zeta = const$, а також що виконується (2), так що $d_1 = d_0 \Xi^{-1}$, $d_2 = d_0 \xi \Xi^{-1}$, $\Xi = \sqrt[4]{1 + \xi^4}$. Тоді з (4) маємо

$$\zeta = \xi^4, L_2 < L_1. \quad (5)$$

Залежність (2) була отримана як розв'язок задачі оптимізації [10]

$$\dot{W} = Q^2 Z \rightarrow \min, V = const, \quad (6)$$

де \dot{W} - швидкість дисипації, V , Z , Q - загальний об'єм, гідравлічний опір та витрата рідини в системі.

Застосуємо (6) до системи з трьох трубок, і, з урахуванням (3)-(5), отримаємо

$$\dot{W}^\circ = \dot{W}^\circ(b, \zeta, \xi, \gamma) \equiv 1 + \frac{b\zeta\xi^4}{\zeta + \xi^4}, \quad (7)$$

$$V^\circ = V^\circ(b, \zeta, \xi, \gamma) \equiv 1 + b\xi^{-2}(1 + \zeta\xi^2),$$

де $\dot{W}^\circ \equiv \dot{W} / \dot{W}^*$, $V^\circ \equiv V / V^*$ - безрозмірні швидкість дисипації і об'єм, $\dot{W}^* = Q_0^2 k L_0 / d_0^4$, $V^* = \pi d_0^2 L_0 / 4$.

Тоді задача (6) у застосування до (7) зводиться до наступної системи рівнянь та умов:

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x_j \partial x_k} \gg 0, \quad (8)$$

де $x_j = \{b, \zeta, \xi, \gamma\}$, остання умова відповідає додатній визаченості відповідної матриці похідних,

$$\tilde{W} \equiv 1 + \frac{\zeta \xi^6 (V^\circ - 1)}{(\zeta + \xi^4)(1 + \zeta \xi^2)}.$$

2.2. Випадок кількох генерацій розгалужень.

Узагальнений випадок асиметричного бінарного дерева наведений на Рис.3а. Для відповідної нумерації (Рис.3б) вузлів та сторін

самоподібного дерева з $d_{2n+1}/d_n = \Xi^{-1}$,
 $d_{2n+2}/d_n = \xi \Xi^{-1}$, $L_{2n+1}/L_n = b_n$, $L_{2n+2}/L_n = b_n \zeta$
(3) набуде вигляд:

$$\begin{aligned} P_{[n/2]} - P_{n+1} &= Q_{n+1} Z_{n+1}, P_{n+1} - P_{2n+2} = Q_{2n+1} Z_{2n+2}, \\ P_{n+1} - P_{2n+3} &= Q_{2n+2} Z_{2n+3}, Q_{n+1} = Q_{2n+1} + Q_{2n+2}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $n=0, \dots, N$, $N=2^k-1$, k - число генерацій,
 $P_l = P^*$ якщо $l=2^{k-1}, \dots, 2^k-1$ (Рис.3а).

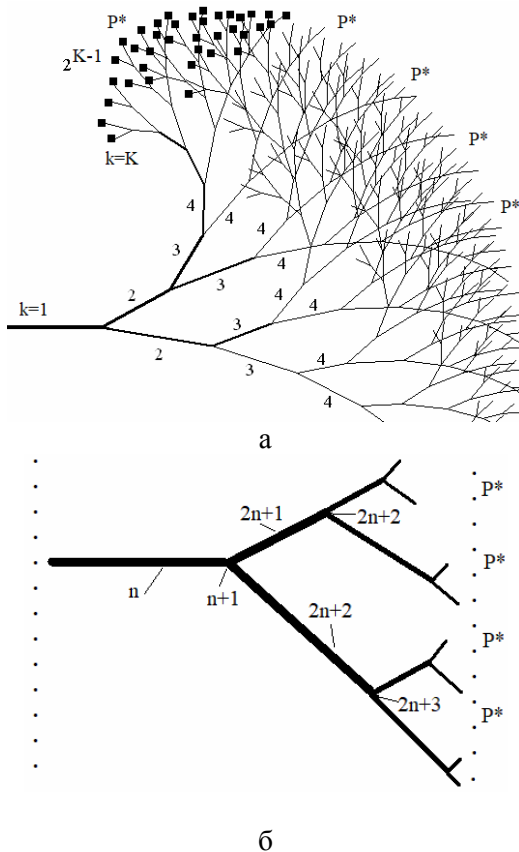


Рис.3. Схема бінарного дерева з нумерацією вузлів та гілок

Розв'язок лінійної системи рівнянь (9) дає значення всіх тисків у вузлах дерева та витрат рідини крізь відповідні трубки. Для витрат крізь 2^{k-1} трубок останньої генерації (позначені квадратами на Рис.3а) використаємо умови рівномірного постачання рідини

$$Q_{2^{k-1}} = Q_{2^{k-1}+1}, \dots, Q_{2^k-1} = Q_0 / (2^k - 2^{k-1}).$$

За наявності останніх умов можливі два типу розв'язки системи (9):

1) Асиметричне бінарне дерево є самоподібним у сенсі рівномірного постачання рідини крізь трубки будь-якої генерації, тобто $Q_{1,2} = Q_0 / 2$,

$Q_{3,4,5,6} = Q_0 / 4$ і т.д., якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_{2^k-1} \equiv b$, $\zeta = \xi^4$;

2) Дерево не є самоподібним і рівномірне постачання рідини має місце тільки крізь трубки останньої генерації, якщо $b_1 \neq b_2 \neq \dots \neq b_{2^k-1}$, $\zeta \neq \xi^4$.

В першому випадку коефіцієнти b, ζ , необхідні для рівномірного постачання рідини, легко визначаються, а з умов оптимальності (7)-(8) можна знайти єдиний оптимальний набір значень b_{opt}, ζ_{opt} . В другому випадку існує безліч наборів $\{b_j\}_{j=1}^{2^k-1}$, які залежать від параметрів V^0, ξ, γ, ζ . Розв'язок задачі (6) не зможе виділити єдиний оптимальний набір, але двохпараметрична оптимізація надає можливість побудувати фронти Парето і вибрати потрібні розв'язки за допомогою додаткового критерію.

Наприклад, при $k=3$ для витрат руху рідини по трубках $n=4-7$ з (9) маємо:

$$\begin{aligned} Q_4 &= \tilde{Z}_2 \tilde{Z}_4 Q_0, & Q_5 &= \tilde{Z}_2 \tilde{Z}_5 Q_0, & Q_6 &= \tilde{Z}_3 \tilde{Z}_6 Q_0, \\ Q_7 &= \tilde{Z}_3 \tilde{Z}_7 Q_0, & \tilde{Z}_2 &= \frac{Z_3 + Z_6 \tilde{Z}_6}{Z_2 + Z_3 + Z_4 \tilde{Z}_4 + Z_6 \tilde{Z}_6}, \\ \tilde{Z}_4 &= \frac{Z_5}{Z_4 + Z_5}, & \tilde{Z}_5 &= \frac{Z_4}{Z_4 + Z_5}, & \tilde{Z}_6 &= \frac{Z_7}{Z_6 + Z_7}, \\ \tilde{Z}_7 &= \frac{Z_6}{Z_6 + Z_7}, & \tilde{Z}_3 &= \frac{Z_2 + Z_4 \tilde{Z}_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4 \tilde{Z}_4 + Z_6 \tilde{Z}_6}. \end{aligned}$$

Звідси умова $Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7$ еквівалентна рівнянням $\tilde{Z}_2 \tilde{Z}_4 = \tilde{Z}_2 \tilde{Z}_5 = \tilde{Z}_3 \tilde{Z}_6 = \tilde{Z}_3 \tilde{Z}_7$, простішим розв'язком яких є $Z_2 = Z_3, Z_4 = Z_5 = Z_6 = Z_7$, звідки $L_2 / L_3 = (d_2 / d_3)^4$ або $\zeta = \xi^4$, і такі ж самі відношення між діаметрами і довжинами у трубок 3-ї генерації, при чому значення ξ можуть бути різними у різних генерації, але однакові для всіх трубок однієї генерації (перший випадок).

Після визначення геометрії системи можемо обчислити \tilde{W} та розв'язати задачу оптимізації (8). Остаточні вирази не наведені в силу їх громіздкості. Чисельні розрахунки проводилися в широкому діапазоні значень параметрів $\xi \in [0;1]$, $\gamma \in [1;5]$.

3. Результати чисельних розрахунків

Результати розрахунків $\tilde{W}(\zeta, \xi, \gamma)$ для різних значень параметрів наведені на Рис.4а для $k=4$. Вздовж горизонтальної осі $\xi \in [0.1;1]$ на кожному

з діапазонів $\gamma = 1.5 - 4.5$. При постійному $V^\circ = 2$ безрозмірна функція \tilde{W} досягає мінімуму при $\gamma = 3$ в широкому діапазоні коефіцієнтів асиметрії $\xi = 0.3 - 0.6$, а також при $\gamma = 2 - 3.5$ і $\xi = 0.1$. Останній випадок відповідає відгалуженням малих судин, коли головний потік іде крізь трубку з більшим діаметром і тому загальна дисипація менша при $b = const$. Таким чином, випадок $\gamma = 3$ є унікальним з точки зору оптимізації не тільки однієї трубки (2), але й біфуркації в цілому.

Аналогічні висновки можемо зробити з аналізу фронтів Парето $W(V)$ (Рис.4б). Для кожного фіксованого значення V найменші значення W досягаються при $\gamma = 3$ для майже симетричних розгалужень з $\xi = 0.4 - 0.6$ та $\xi = 0.5 - 1$, що дає можливість використати для будови бінарного дерева значення кутів розгалужень, близьких до оптимальних (1).

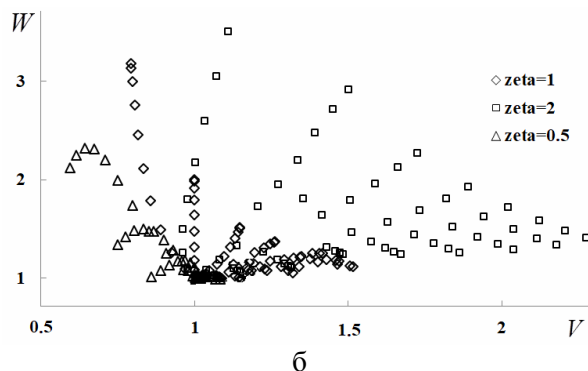
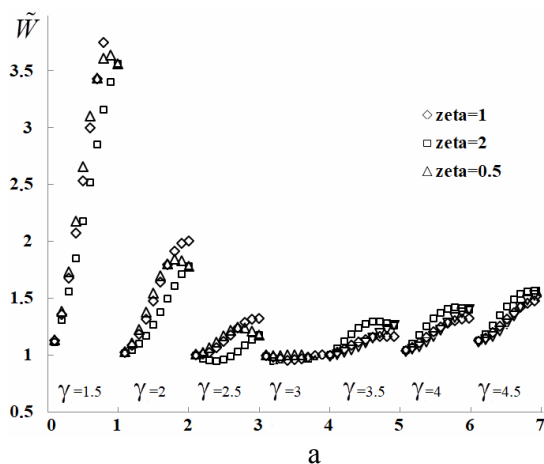


Рис.4. Залежності $\tilde{W}(\zeta, \xi, \gamma)$ (а) і $W(V)$ (б)

7. Висновки

В роботі запропонована нова модель асиметричного бінарного дерева трубок, яке забезпечує рівномірне постачання в'язкої рідини або газу до розподіленої системи споживачів, які займають деякий об'єм простору. На відміну від найпростішої моделі фрактального дерева (Рис.1), така модель забезпечує менші витрати енергії за рахунок близьких до оптимальних кутів розгалуження трубок. Запропонований підхід дозволяє оптимізувати також довжини трубок в кожній генерації і будувати провідні системи, які при тому ж самому загальному об'ємі забезпечують меншу дисипацію енергії. Подібні транспортні системи є перспективними для використання в паливних елементах та інших системах, що вимагають високої однорідності постачання і розподілення маси по об'єму заданої форми та розмірів.

Список використаних джерел

1. Gheorghiu S. Is the Lung an Optimal Gas Exchanger? / S. Gheorghiu, S. Kjelstrup, M.-O. Coppens. In: *Fractals in Biology and Medicine*, eds. G. Losa, D. Merlini, Th.F. Nonnenmacher. – 2005. – P. 31–42.
2. Балабанов В. О. Математичне моделювання артеріальних систем як бінарних дерев, які заповнюють об'єм простору / В.О. Балабанов, Н.М. Кізілова // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. - 2015. - Спецвипуск. - С.27-32.
3. Балабанов В.А. Новый алгоритм построения оптимальных транспортных систем, заполняющих заданную область / В.А. Балабанов, Н.Н. Кизилова. // *Механика*.

References

1. GHEORGHIU, S., KJELSTRUP, S., COPPENS, M.-O. (2005) Is the Lung an Optimal Gas Exchanger? In: *Fractals in Biology and Medicine*, eds. G. Losa, D. Merlini, Th.F. Nonnenmacher. p. 31–42.
2. BALABANOV, V.A., KIZILOVA, N.M. (2015) Mathematical modeling of arterial systems as the volume filling binary trees. *Visnyk of T. Shevchenko Kyiv National Univ., ser. Physics and mathematics sciences*. Special Issue. p. 27–32.
3. BALABANOV, V.A., KIZILOVA, N.M. (2016) A new algorithm of building of the optimal transport systems filling a given area. In: *Mechanics. Research and Innovations*. Vol.3. Gomel Univ. Press. p.18–26.
4. BALABANOV, V.A., KIZILOVA, N.M. (2017)

- Исследования и инновации. Вып. 9. Гомель. - 2016. – С.18-26.
4. Балабанов В.О. Математичне моделювання стаціонарної та хвильової провідності артеріальних систем як бінарних дерев / В.О. Балабанов, Н.М. Кізілова // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2017. – №3. – С.19-23.
 5. Балабанов В.А. Математическое моделирование и 3D визуализация бинарных деревьев с минимумом самопересечений / В.А. Балабанов, Н.Н. Кизилова // Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». - 2017. - т.34. - С.5-17.
 6. Kjelstrup S. Non-Equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems / S. Kjelstrup, D. Bedeaux. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2nd ed. - 2008. – 198 p.
 7. Kjelstrup S. Nature inspired energy- and material-efficient design of a polymer electrolyte membrane fuel cell / S. Kjelstrup, M.-O. Coppens, J. G. Pharoah // Energy Fuels. – 2010. – v. 24. – P. 5097–5108.
 8. Tüber K. Investigation of fractal flow-fields in portable proton exchange membrane and direct methanol fuel cells / K.Tüber, A. Oedegaard, M. Hermann // J. Power Sources. – 2004. – v. 131. – P. 175-181.
 9. Arvay A. Nature inspired flow field designs for proton exchange membrane fuel cell / A. Arvay, J. French, J.C. Wang, X.H. Peng, A.M. Kannan. // Int. J. Hydrogen Energy. – 2013. – v.38. – P. 3717–3726.
 10. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии / Р. Розен. – Москва: Мир, 1968. – 212 с.
 11. Kizilova N.N. Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics / N.N. Kizilova. // Lecture Notes in Computer Science. – 2004. - Vol.3044. – P.476-485.
 12. Trogadas P. A lung-inspired approach to scalable and robust fuel cell design / P.Trogadas, J.I.S. Cho, T.P. Neville, J. Marquis, B. Wu, D.J.L. Brett, M.-O. Coppens. // Energy Environ. Sci. - 2018. – v. 11. – P. 136-143.
 - Mathematical modeling of steady and wave conductivity of arterial systems as binary trees. *Visnyk of T. Shevchenko Kyiv National Univ., ser. Physics and mathematics sciences*. N3. p. 19–23.
 5. BALABANOV, V.A., KIZILOVA, N.M. (2017) Mathematical modeling and 3D visualization of binary trees with minimum self cross-sections. *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National Univ., ser. Mathematical modeling. Inform.technologies. Automated control systems*. 34. p. 5–17.
 6. KJELSTRUP, S., BEDEAUX, D. (2008) *Non-equilibrium Thermodynamics of Heterogeneous Systems*. N.-Y.: World Sci. Pub.
 7. KJELSTRUP, S., COPPENS, M.-O., J. PHAROAH, G., PFEIFER, P. (2010) Nature inspired energy- and material-efficient design of a polymer electrolyte membrane fuel cell. *Energy Fuels*. 24. p. 5097–5108.
 8. TÜBER, K, OEDEGAARD, A, HERMANN, M, HEBLING, C. (2004) Investigation of fractal flow-fields in portable proton exchange membrane and direct methanol fuel cells. *J. Power Sources*. 131. p. 175–181.
 9. Arvay, A, French, J, Wang, J.C., et al. (2013) Nature inspired flow field designs for proton exchange membrane fuel cell. *Int. J. Hydrogen Energy*. 38. p. 3717–3726.
 10. ROZEN, R. (1968) *Printsyp Optimalnosti v Biologii*. Moskva: Mir.
 11. KIZILOVA, N.N. (2004) Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics. *Lecture Notes Computer Sci*. 3044. p. 476–485.
 12. TROGADAS, P., CHO, J.I.S., NEVILLE, T.P., et al. (2018) A lung-inspired approach to scalable and robust fuel cell design. *Energy Environ. Sci*. 11. p. 136–143.

Надійшла до редколегії 27.08.18