УДК 539.3

Кривий О.Ф.[1], д. ф.-м. н., проф.
Морозов Ю.О.[2], к. ф.-м. н., доц.

# Кругове теплоактивне міжфазне включення в кусково-однорідному трансверсального-ізотропному просторі

[1] Національний університет «Одеська морська академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net
[2] Одеський національний політехнічний університет, 65044, м. Одеса, пр-т. Шевченка, 1,
e-mail: morozovyu@gmail.com

O. F. Kryvyi[1], Dr. Sci., Prof.
Yu. O. Morozov[2], Ph. D., Assoc. Prof.

# Circular thermoactive interphase inclusion in a piecewise homogeneous transversal-isotropic space

[1] National University - Odesa Maritime Academy, 65029, Odessa, Didrikhson str., 8
e-mail: krivoy-odessa@ukr.net,
[2] Odesa National Polytechnic University, 65044, Odesa, Boulevard of Shevchenko, 1
e-mail: morozovyu@gmail.com

*Побудовано точний розв'язок задачі стаціонарної термопружності для міжфазного кругового абсолютно жорсткого включення, що знаходиться в умовах повного зчеплення або гладкого контакту з трансверсально-ізотропними півпросторами. За допомогою побудованого розривного розв'язку, методом сингулярних інтегральних співвідношень (СІС) задача зведена до систем двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Побудовано точний розв'язок зазначених СІР. В результаті отримано залежності стрибків напружень та переміщень від температури, рівнодіючої навантаження, головних моментів і термомеханічних характеристик трансверсально-ізотропних матеріалів. Показано, що напруження в околі включення при гладкому контакті мають кореневу особливість, а при повному зчепленні – кореневу особливість, яка підсилена осциляцією.*

*Ключові слова: теплопровідність, кусково-однорідний трансверсально-ізотропний простір, міжфазний дефект, двовимірні сингулярні інтегральні рівняння.*

*An exact solution of the stationary thermoelasticity problem about interfacial circular absolutely rigid inclusion, which is under conditions of complete adhesion and under conditions of smooth contact with transversely homogeneous spaces, is constructed. The task with the help of the constructed discontinuous solution, by the method of singular integral relations, is reduced to a system of singular integral equations (SIE). An exact solution has been built for the specified systems of two-dimensional singular integral equations. As a result, dependences jumps of stresses and displacement on temperature, equivalent load, main moments and thermomechanical characteristics of transversally isotropic materials. The influence of the type of contact interaction on the behavior of the solutions is established. In particular, it has been shown that the stresses in the neighborhood of the inclusion with a smooth contact have a root singularity, and with complete coupling, the root singularity, which is amplified by oscillation. The behavior of the generalized intensity coefficient (GCIN) was studied for the combination of various transversely isotropic materials at different power and temperature loads.*

*Key Words: thermal conductivity, inhomogeneous orthotropic space, interphase defect, two-dimensional singular integral equations.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

## 1. Вступ

В роботах [1-5] задачі про невісесиметричні міжфазні дефекти типу тріщини або абсолютно жорстких включень, при різних видах контактної взаємодії (повне зчеплення, гладкий контакт, змішані умови) з різними трансверсально-ізотропним півпросторами, методом СІС [6] зведені до систем двовимірних СІР. Запропоновано метод побудови точних розв’язків зазначених систем СІР для кругових дефектів, що дозволило визначити особливості полів напружень та переміщень в околі тріщини та включень при довільному навантаженні.

У даній роботі розглянуто невісесиметричні задачі стаціонарної термопружності для складеного трансверсально-ізотропного простору, що містить теплоактивне кругове включення, яке знаходиться в умовах повного зчеплення або в умовах гладкого контакту з середовищем.

**2. Постановка задачі та її розв'язання**

**1.** Нехай у площині $z=0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає кругову область $\Omega:\{\sqrt{x^2+y^2}\le a\}$. На включенні задано тепловий потік $q_0$, та прикладене довільне навантаження, дія якого зводиться до рівнодійної сили $\mathbf{P}=(P_1,P_2,P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M}=(M_1,M_2,M_3)$. Позначимо стрибки і суми термопружних характеристик простору при переході через площину $z=0$ так

$$\chi_k^{\pm}=\left\langle\zeta_k\right\rangle^{\pm}=\zeta_k^{+}\pm\zeta_k^{-},k=\overline{1,8};\{\zeta_k^{\pm}\}^8=\{\upsilon_k\}^8\Big|_{z=\pm0},$$

$$\mathbf{v}=\{\upsilon_k\left(x,y,z\right)\}_{k=\overline{1,8}}=\{\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},u,v,w,T,q_z\}.$$

Розташування граней включення після деформації описують функції: $\zeta_6^{\pm}=\zeta_6^0+\vartheta_0^{\pm}$, $\zeta_k^{\pm}=\zeta_k^0,\ k=4,5,\ \zeta_4^0=\delta_1-\varphi_z y,\ \ \zeta_5^0=\delta_2+\varphi_z x$, $\zeta_6^0=\delta_3+\varphi_y x+\varphi_x y$, $\vartheta_0^{\pm}$ задають форму включень при $z=\pm0$, $\delta_k$, $\varphi_z$, $\varphi_z$, $\varphi_z$ - поступальні та кутові переміщення включень, для визначення яких використовують умови силової і моментної рівноваги.

Грані включення знаходяться в умовах повного зчеплення з півпросторами (Задача А), відомими в цьому випадку будуть стрибки та суми переміщень $\chi_4^{\pm}=(1\pm1)\zeta_4^0,\ \chi_5^{\pm}=(1\pm1)\zeta_5^0$,

$$\chi_6^{\pm}=\vartheta^{\pm}+(1\pm1)\zeta_6^0,\ \vartheta^{\pm}=\vartheta_0^{+}\pm\vartheta_0^{-},(x,y)\in\Omega. \quad (1)$$

Розглянуто також випадок, коли включення знаходиться в умовах гладкого контакту (задача В), у цьому випадку стрибки та суми дотичних напружень дорівнюють нулю, а суми нормальних зміщень визначаються за формулою (1)

Враховуючи умови з'єднання півпросторів поза включенням: $\chi_k^{-}=0,k=\overline{1,7}$, $\lambda_3^{+}\partial_2\zeta_7(x,y,+0)=\lambda_3^{-}\partial_2\zeta_7(x,y,-0)$, та результати робіт [2-5], поставлені задачі можна звести відносно невідомих $\chi_1^{-}$, $\chi_7^{-}$, $\tau=\chi_3^{-}+i\chi_2^{-}$, $u=\chi_4^{-}+i\chi_5^{-}$, до наступних систем двовимірних СІР.

Задача А:

$$q_{31}\overline{\mathrm{K}}_0[\chi_1^{-}]-\frac{q_{32}}{2}\mathrm{K}[\tau]-\frac{\overset{+}{q}_{32}}{2}\mathrm{D}\,\mathrm{K}[\vartheta\overline{\tau}]=\Phi_1,$$

$$q_{31}\mathrm{K}_0[\chi_1^{-}]-\frac{q_{32}}{2}\mathrm{K}[\overline{\tau}]-\frac{\overset{+}{q}_{32}}{2}\overline{\mathrm{D}}\,\mathrm{K}[\overline{\vartheta}\tau]=\Phi_2,$$

$$q_{41}\mathrm{K}[\chi_1^{-}]+\frac{q_{42}}{2}(\mathrm{K}_0[\tau]+\overline{\mathrm{K}}_0[\overline{\tau}])=\Phi,$$

$$q_{65}\,\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\,\mathrm{K}[\chi_7^{-}]=-\chi_8^{+}. \quad (2)$$

Задача В:

$$q_{21}\,\mathrm{D}\mathrm{K}\left[\chi_1^{-}\right]+\frac{\overset{-}{q}_{23}}{2}\overline{\mathrm{D}}^2\,\mathrm{K}\left[u^{-}\right]+\frac{\overset{+}{q}_{23}}{2}\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}\left[\overline{u}^{-}\right]=\Phi_4,$$

$$q_{21}\,\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}\left[\chi_1^{-}\right]+\frac{\overset{-}{q}_{23}}{2}\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}\left[\overline{u}^{-}\right]+\frac{\overset{+}{q}_{23}}{2}\overline{\mathrm{D}}^2\,\mathrm{K}\left[u^{-}\right]=\Phi_5,$$

$$q_{41}\mathrm{K}[\chi_1^{-}]+\frac{q_{43}}{2}[\overline{\mathrm{D}}\,\mathrm{K}[u^{-}]+\mathrm{D}\,\mathrm{K}[\overline{u}^{-}]]=\Phi_6,$$

$$q_{65}\,\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\,\mathrm{K}[\chi_7^{-}]=-\chi_8^{+}(x,y). \quad (3)$$

Тут введені позначення

$$\Phi_1=u^{+}+q_{34}\,\mathrm{D}\,\mathrm{K}[\chi_6^{-}]-q_{35}\overline{\mathrm{K}}_0[\chi_7^{-}]$$

$$\Phi_3=\chi_6^{+}-q_{44}\chi_6^{-}-q_{45}\mathrm{K}[\chi_7^{-}],\ \Phi_2=\overline{\Phi}_1$$

$$\Phi_4=-q_{24}\,\mathrm{D}\chi_6^{-}-q_{25}\,\mathrm{D}\,\mathrm{K}\left[\chi_7^{-}\right],\ \Phi_5=\overline{\Phi}_4$$

$$\Phi_6=\chi_6^{+}-q_{44}\chi_6^{-}-q_{45}\mathrm{K}[\chi_7^{-}],\ \mathrm{D}=\partial_1+i\partial_2,$$

$$\mathrm{K}[\chi_j^{-}]=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{\chi_j^{-}(\xi,\zeta)}{r_0}d\xi d\zeta,$$

$$\mathrm{K}_0[\chi_j^{-}]=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{\chi_j^{-}(\xi,\zeta)}{\vartheta}d\xi d\zeta,$$

$$\vartheta=(x-\xi)+i(y-\zeta),\ \ r_0^2=\vartheta\overline{\vartheta}.$$

Перейдемо до термопружних характеристик простору у циліндричних координатах $(\rho,\varphi,z)$, та позначимо скачки і суми при переході через площу $z=0$ так: $\{\tilde{v}_k^{\pm}(\rho,\varphi)\}^8=\{\langle\sigma_z\rangle^{\pm},\langle\tau_{z\varphi}\rangle^{\pm},\langle\tau_{z\rho}\rangle^{\pm},\langle u_\rho\rangle^{\pm},\langle u_\varphi\rangle^{\pm},\langle w\rangle^{\pm},\langle T\rangle^{\pm}\langle q\rangle^{\pm}\}$. Введемо комбінації напружень $\tilde{\tau}^{\pm}=\tilde{v}_3^{\pm}+i\tilde{v}_2^{\pm}$ та переміщень $\tilde{u}^{\pm}=\tilde{v}_4^{\pm}+i\tilde{v}_5^{\pm}$ і перейдемо до нових невідомих функції: $v_1^{-}=\chi_1^{-}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, $v_2^{\pm}=e^{-i\varphi}\tau^{\pm}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, $v_5^{-}=\chi_7^{-}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, $v_3=e^{-i\varphi}u^{-}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$. Останні розшукуємо у вигляді

$$v_j^{\pm}\left(\rho,\varphi\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{V}_n^{j,\pm}\left(\rho\right)e^{in\varphi},\ \ j=2,3,5, \quad (4)$$

$$\mathrm{V}_n^{j,-}\left(\rho\right)=\Phi_n\left[v_j^{-}\right]\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v_j^{-}\left(\rho,\varphi\right)e^{-in\varphi}d\varphi,$$

$$\mathrm{V}_{-n}^{j,-}\left(\rho\right)=\overline{\mathrm{V}}_n^{j,-}\left(\rho\right),\ \ \overline{\mathrm{V}}_{-n}^{j,-}\left(\rho\right)=\Phi_n\left[\overline{v_j^{-}}\right].$$

Перехід в системах (3), (4) до полярної системи координат, та подальше застосування скінченного перетворення Фур'є, дозволяє, використавши підхід робіт [1-5], системи (2), (3) звести до систем інтегральних рівнянь з ядрами Вебера-Сонина.

Одержані розв'язки цих систем у явному вигляді. Задача А:

$$\left\langle \sigma_z \right\rangle^- = \frac{(-1)}{\pi\rho^2}\partial_\rho \int_\rho^a \frac{t\eta_{10}^-(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} - \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i\varphi}}{\pi}\partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{11}^-(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right],$$

$$\left\langle \tau_{z\rho} \right\rangle^- + i\left\langle \tau_{z\varphi} \right\rangle^- = -\frac{1}{\pi\rho^2}\partial_\rho \int_\rho^a \frac{\eta_{20}^-(t)+\eta_{30}^-(t)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}dt -$$

$$-\partial_\rho \mathrm{Re}\frac{e^{i\varphi}}{\rho^2}\int_\rho^a \frac{(\eta_{21}^-(t)+\eta_{31}^-(t))t}{\pi\sqrt{t^2-\rho^2}}dt.$$

Задача В:

$$\langle \sigma_z \rangle^- = \frac{m_0 + m_1(\varphi)\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} + \frac{s_{11}}{\rho}(L[F_0^-])'_\rho - \tilde{s}_{11}v_5^-,$$

$$\langle u_\rho \rangle^- = \frac{2s_{21}}{\pi\rho}\{L[F_n^-(\rho)] - f_*\sqrt{a^2-\rho^2}\} +$$

$$+\sqrt{a^2-\rho^2}\{q_0\,\mathrm{Re}(be^{i\varphi})[m_2(5a^2(a^2-\rho^2)-3\rho^2)-$$

$$-m_3a^2] - m_4\,\mathrm{Re}(\varphi_{xy}e^{-i\varphi})\},$$

## 3. Числові результати та їх аналіз

Числовий аналіз проведено при $P_3 = 1$ для комбінації матеріалів Cadmium (матеріал $m1$), Magnesium (матеріал $m2$), $Al_2O_3$ (матеріал $m3$), Zn (матеріал $m4$), для включення, що знаходиться в умовах гладкого контакту. На рис. 1-2 представлено залежність (УКІН) від полярного кута $\varphi$, при різних значенях теплового потоку $q_0$ і результуючих моментів $M_1$, $M_2$. Величини моментів на рис. 1 і 2 відрізняються на порядок, тобто $M_1 = M_2 = 20 \cdot P_3$ для першого рисунку і $M_1 = M_2 = 200 \cdot P_3$ для другого. На рисунках 3, 4 подано залежність УІКН від $\varphi$ при різних значеннях ρ і $M_1 = M_2 = P_3/2$. З рисунків видно, що значення теплового потоку і моментів на включенні істотно впливають на значення УКІН. Значення УКІН також залежать від полярного кута, що показує вплив на УКІН анізотропії термопружних властивостей матеріалів. На розподіл напружень біля включення істотно впливають величини термопружних постійних півпросторів, зокрема, значення коефіцієнта $\zeta_z = c_{33}^+/c_{33}^-$, який характеризує відмінність пружних властивостей півпросторів у напрямку осі Z. Так, для комбінації матеріалів m1-m2, значення $\zeta_z = 0.7483$, для комбінації m3-m4, значення $\zeta_z = 8.2981$, таким чином, пружні властивості півпросторів у напрямку осі Z для

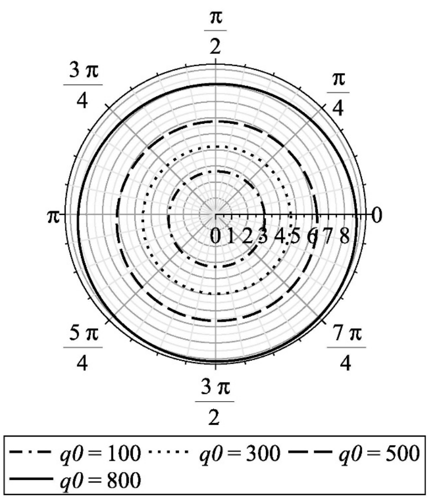


Рис. 1. m1-m2,ρ=1

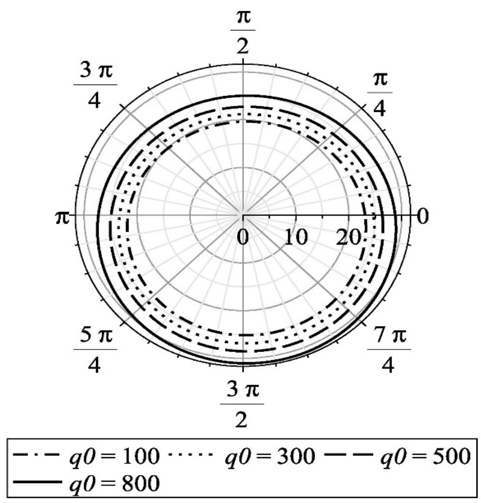


Рис. 2. m3-m4,ρ=1

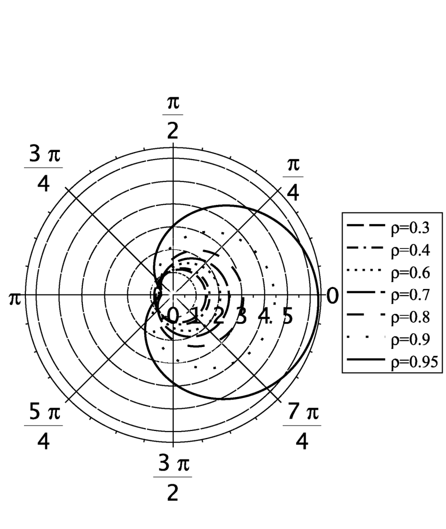

Рис. 3. m1-m2,*q0*=70

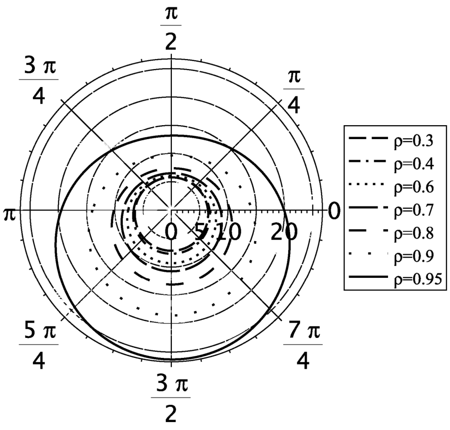


Рис. 4. m3-m4, *q0*=70

другої комбінації m3-m4 відрізняються набагато більше, ніж для першої m1-m2. Це зумовлює якісні і кількісні зміни розподілів нормальних напружень в околі включення, що підтверджується, наприклад, порівнянням графіків на рисунках 3 та 4.

**3. Висновки**

Наявність температурного навантаження на включенні зумовлює появу додаткового доданку в розв'язках задачі. При цьому характер поведінки і асимптотика розв'язку залишається незмінною. Точний розв'язок дозволив дослідити особливості поля нормальних напружень в околі включення, зокрема, наявність температурного навантаження істотно змінює характер поведінки УКІН. Запропонована методика дозволяє отримати розв'язки задач для інших типів контактної взаємодії включення із середовищем при різних навантаженнях.

**Список використаних джерел**

1. *Ефимов В.В.* Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде / В.В. Ефимов, А.Ф. Кривой, Г.Я. Попов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
2. *Кривий О.Ф.* Міжфазні кругові включення в кусково-однорідному трансверсально – ізотропному просторі / О.Ф. Кривий // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. 173–183.
3. *Kryvyy O.F.* Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects / O. F. Kryvyy // Journal of Mathematical Sciences. – 2011. – **176**, 4. – Pp. 515- 531.
4. *Kryvyy O.F* (2012) Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space / O. F. Kryvyy // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **184**, 1. – Pp. 101-119.
5. *Kryvyi O.F* Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space / O. F. Kryvyi // Materials Science. – 2014.– **50**, 2. – Pp. 245-253.
6. *Kryvyy O.* The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium / O. Kryvyy // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – 191. – P. 387 – 398.

**References**

1. EFIMOV, V.V., KRIVOI, A.F., POPOV, G. (2010) Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium. *Mechanics of solids*. 33 (2). p.35-49, Springer ISSN: 0025-6544
2. KRYVYI, O.F. (2010) Mizhfazns krugovs vklyuchennya v kuskovo-odnoridnomu transversalno-izotropnomu prostori. *Prikl. probleii meh. i mat.* 8. p. 173–183.
3. KRYVYY, O.F. (2011) Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects. *Journal of Mathematical Sciences*. 176 (4). p. 515- 531.
4. KRYVYY, O.F (2012) Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space. *Journal of Mathematical Sciences*. 184(1). p. 101-119.
5. KRYVYI, O.F (2014) Delaminated Interface Inclusion in a Piecewise Homogeneous Transversely Isotropic Space. *Materials Science*. 50 (2). p. 245-253.
6. KRYVYY, O. (2009) The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium. *Operator Theory: Advances and Applications.* 191. p. 387 – 398.

Надійшла до редколегії 29.06.19