

УДК 539.3

Савельєва К. В.¹, к. ф.-м. н., доц.,
Дашко О.Г.¹, к. ф.-м. н.,
Симчук Я.В.², к. ф.-м. н., доц.

K. V. Savelieva¹, Ph. D.(Phys.-Math.),
Sr. Sci. Researcher
O. G. Dashko¹, Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher
Y. V. Simchuk², Ph. D. (Phys.-Math.), Sci. Researcher

Плоскі хвилі в нанокompозитних матеріалах

Plane waves in nano-composite materials

¹ Інститут механіки ім.С.П.Тимошенка НАН
України, 03057 м. Київ, вул. П.Нестерова, 3,
e-mail: katerina1971s@gmail.com

¹S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of
Ukraine, 03057, Kyiv, P.Nesterov str., 3
e-mail: katerina1971s@gmail.com

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, пр-т
Перемоги, 37,
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

²National Technical University of Ukraine
“I.Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Peremohy pr., 37
e-mail: yar_simchuk@ukr.net

Проаналізовано методи теоретичного дослідження взаємодії плоских гармонічних хвиль у нанокompозитних матеріалах, нелінійні властивості яких моделюються пружним потенціалом Мурнагана. Наведені результати використання двох методів. Метода повільно змінних амплітуд, шляхом побудови укорочених, еволюційних рівнянь та співвідношень Менлі-Рова, при дослідженні генерації третьої гармоніки поздовжньої хвилі. Та метода збурень, при дослідженні перемикання хвильового процесу між вертикально та горизонтально поляризованими поперечними хвилями одночасно з перепомпванням енергії між різними типами поперечних хвиль і трансформації їх в треті гармоніки. Проведене чисельне дослідження задачі на основі отриманих теоретичних результатів для різних типів нанокompозитних матеріалів. Побудовано відповідні графіки, ілюструючи хвильову картину, отриману при розв'язанні задач. Прокоментовано результати чисельного аналізу для цих матеріалів.

Ключові слова: кубічна нелінійність, пружна плоска хвиля, нанокompозитні матеріали, метод повільно змінних амплітуд, метод збурень.

The propagation of plane waves in a hyper-elastic medium is theoretically investigated. Two methods of research were used: the method of slowly variable amplitudes and the method of perturbations (successive approximations). The results obtained by these methods are analyzed. The wave interaction in nanocomposite materials is studied. A theoretical study of the cubically nonlinear elastic interaction of plane harmonic waves is carried out for a material whose nonlinear properties are described by the Murnaghan elastic potential. The solution for self-generation of the longitudinal wave is obtained by the method of slowly varying amplitudes. The interaction of transverse horizontally and vertically polarized harmonic waves are studied using the perturbing method. The pumping of energy between different harmonics of a longitudinal wave and various types of transverse waves is described analytically. The results of numerical analysis for various types of nanocomposite materials are presented.

Key Words: cubic nonlinearity, elastic plane wave, nanocomposite materials, method of slowly varying amplitudes, perturbation method.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Теоретичне дослідження взаємодії плоских гармонічних хвиль проводилося для нанокompозитних матеріалів, нелінійні властивості яких моделюються пружним потенціалом Мурнагана, представлення якого дозволяє врахувати нелінійності, до четвертого

порядку включно, відносно компонентів градієнта деформації [1,6,7]. Таке представлення, як відомо [7,10,11], дозволяє досліджувати квадратично і кубічно нелінійні хвильові ефекти в гіперпружних матеріалах [6,8,9,10].

Вектор переміщень

$$\vec{u} = \{u_1(x_1, t); u_2(x_1, t); u_3(x_1, t)\}$$

залежить від однієї просторової змінної x_1 та часу t . Нелінійні хвильові рівняння відносно компонент вектора переміщення для поздовжніх (L),

$$\begin{aligned} \rho u_{1,t} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = \\ N_1 u_{1,11} u_{1,1} + N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{3,11} u_{3,1}) + \\ + N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2 + N_4 (u_{2,11} u_{2,1} u_{1,1} + u_{3,11} u_{3,1} u_{1,1})^2; \end{aligned} \quad (1)$$

горизонтально (TH) та вертикально (TV) поляризованих поперечних хвиль мають вигляд:

$$\begin{aligned} \rho u_{2,t} - \mu u_{2,11} = N_2 (u_{2,11} u_{2,1} + u_{1,11} u_{2,1}) + \\ + N_4 u_{2,11} (u_{2,1})^2 + N_5 u_{2,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{2,11} (u_{3,1})^2; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho u_{3,t} - \mu u_{3,11} = N_2 (u_{3,11} u_{2,1} + u_{1,11} u_{3,1}) + \\ + N_4 u_{3,11} (u_{3,1})^2 + N_5 u_{3,11} (u_{1,1})^2 + N_6 u_{3,11} (u_{2,1})^2. \end{aligned} \quad (3)$$

У рівняннях (1)-(3) використані стандартні позначення [1-3]: ρ – стала густина; λ, μ – пружні сталі другого порядку (сталі Ламе); A, B, C – пружні сталі третього порядку (сталі Мурнагана);

$$N_1 = 3(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C);$$

$$N_2 = \lambda + 2\mu + \frac{1}{2}A + B;$$

$$N_3 = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + 6(A + 3B + C);$$

$$N_4 = \frac{1}{2}[2(\lambda + 2\mu) + 5A + 14B + 4C];$$

$$N_6 = 3A + 10B + 4C.$$

Дослідження поширення хвиль здійснювалося двома методами.

Метод повільно змінних амплітуд

Цей метод був використаний окремо для дослідження взаємодії кубічних, виключно поздовжніх (за рівнянням(1)) та виключно поперечних хвиль однієї, горизонтальної (за рівнянням (2)), або вертикальної (за рівнянням (3)) поляризації.

Відповідні рівняння для таких досліджень мають вигляд:

$$\rho u_{1,t} - (\lambda + 2\mu)u_{1,11} = N_3 u_{1,11} (u_{1,1})^2$$

для поздовжньої хвилі, при умові відсутності поперечних переміщень, та

$$\begin{aligned} \rho u_{2,t} - \mu u_{2,xx} = N_4 u_{2,xx} (u_{2,x})^2; \\ \rho u_{3,t} - \mu u_{3,xx} = N_4 u_{3,xx} (u_{3,x})^2 \end{aligned}$$

для поперечних хвиль (при цьому поздовжні переміщення та взаємодія між поперечними хвилями різної поляризації не враховується). За цим методом проаналізований механізм самогенерації відповідних хвиль. Метод передбачає, в кожному зазначеному випадку, послідовну побудову вкороченого рівняння, еволюційних, при умові виконання умови частотного синхронізму, рівнянь та співвідношень Менлі-Рова. Графічний аналіз останніх дає можливість стверджувати, що, при одночасному збудженні потужної хвилі накачки (P - хвилі) та слабкої сигнальної хвилі відповідної поляризації (S -хвилі), відбувається міжхвильове перепомповування енергії і, в результаті, перемикання кубічно нелінійної поздовжньої хвилі, або, відповідно, поперечної хвилі з основної (ω) на потрійну (3ω) частоту.

Метод збурень

Метод використовувався для дослідження одночасного поширення двох поперечних хвиль різної поляризації. Розв'язки було отримано з точністю до третього наближення у вигляді

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = u_2^0 \cos(kx - \omega t) - \\ - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_2^0 \left((u_2^0)^2 N_4 + (u_3^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) = u_3^0 \cos(kx - \omega t) - \\ - \frac{k^3}{6\mu\rho} u_3^0 \left((u_3^0)^2 N_4 + (u_2^0)^2 N_6 \right) x \sin 3(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації, відбувається перепомповування енергії з потужної хвилі в слабку [3], що ілюструється рис. 1.

Загальні висновки

Крім суто аналітичних досліджень поширення хвиль зазначеними двома методами, були проведені відповідні чисельні дослідження,

результати яких можуть бути частково продемонстровані наведеним на Рис. 1 графіком.

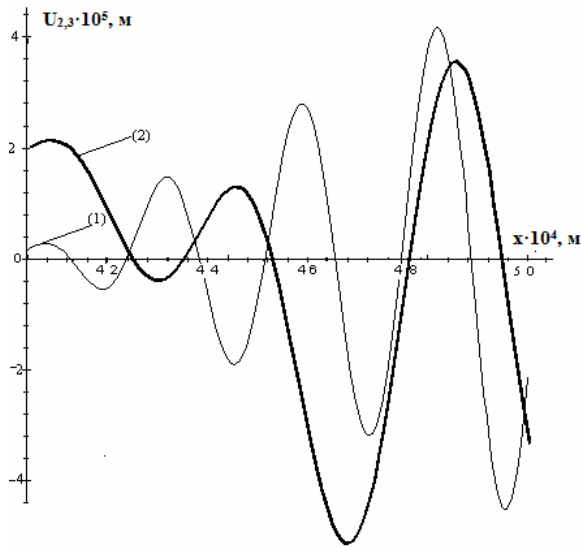


Рис. 1 Перепомпування енергії між вертикальними хвилями різної поляризації

Для обчислень було використано значення ефективних сталих для чотирьох типів нанокompозитних матеріалів, відповідних до моделі Зпапо, з роботи [10]. Складовими зазначених нанокompозитів є: матриця, представлена в двох варіантах (N1 - суміш смоли Епон-828 і полістиролу, з м'якою характеристикою нелінійності; N2 - суміш смоли Епон-828 і скла-пирекс, з жорсткою характеристикою нелінійності), і наповнювач - вуглецеві нанотрубки двох різних типів (N1 - звивисті вуглецеві нанотрубки; N2- хіральні вуглецеві нанотрубки). Характеристики та властивості матеріалів та їх складових представлені і детально описані в роботі [10]. Розрізняються використані при дослідженні матеріали також об'ємним вмістом наповнювача.

Дослідження проводилося для п'яти варіантів концентрації наповнювача в чотирьох видах нанокompозитів. Хвильові параметри $\omega = 1.0$ МГц, $u_2^0 = u_0 = 1 \cdot 10^{-7}$ м, $k \approx 0,5 \cdot 10^6$ 1/м обиралися однаковими для всіх розглянутих варіантів матеріалу. Обґрунтування вибору значень цих величин викладено в роботі [3].

Було побудовано графіки змінення профілю хвилі в залежності від просторової координати x : горизонтально поляризованої поперечної хвилі, згідно формулі (4); та для вертикально поляризованої поперечної хвилі, згідно (5).

Основним явищем, виявленим за допомогою обох методів, є перемикання хвильового процесу з основної на потрібну частоту кубічно

нелінійних хвиль. При цьому було встановлено, що відбувається спотворення профілів останніх.

Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки. За умови різної початкової інтенсивності хвиль різної поляризації, відбувається перепомповування енергії з потужної хвилі в слабку [3].

Були побудовані графіки зміни профілю хвилі в залежності від просторової координати x : горизонтально поляризованої поперечної хвилі, згідно формулі (4); та вертикально поляризованої поперечної хвилі, згідно (5). Амплітуда горизонтально поляризованої хвилі, що була задана початково малою в порівнянні з амплітудою вертикально поляризованої хвилі, при поширенні збільшувалася, зменшуючи при цьому амплітуду вертикально поляризованої хвилі. Це свідчить про перепомпування енергії з більш потужної вертикальної поперечної хвилі до початково слабкої горизонтальної.

Відповідні графіки для різних матеріалів було побудовано для дослідження одночасного поширення двох поперечних хвиль різної поляризації. При цьому було встановлено, що відбувається спотворення профілів цих хвиль. Внаслідок нелінійної хвильової взаємодії, хвилі поступово трансформуються в свої треті гармоніки.

Таким чином, обидва зазначені методи застосовні для дослідження кубічно нелінійних гіперпружних хвиль. Використання того чи іншого метода залежить від початкової постановки задачі. Результати обох методів узгоджені між собою і свідчать про перемикання хвильового процесу з одинарної на потрібну частоту, і навпаки, в процесі поширення хвиль у кубічно нелінійних нанокompозитних матеріалах.

Список використаних джерел

1. Руцицький Я. Я. Хвилі в матеріалах з мікроструктурою. / Я. Я. Руцицький, С. І. Цурпал. – Київ: Інст.механіки ім. С. П. Тимошенка, 1998. – 377 с.
2. Achenbach J. D. Wave Propagation in Elastic Solids. / J. D. Achenbach – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1973. – 425 p.
3. Cattani C. Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure. / C. Cattani, J. J. Rushchitsky – Singapore-London: World Scientific, 2007. – 466 p.
4. Kratzer A. Transcendente Funktionen. / A. Kratzer, W. Franz – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960. – 466 S.
5. Olver F.W.J. Asymptotics and Special Functions. / F.W.J. Olver – New York: Academic Press, 1974. – 528 p.
6. Rushchitsky J. J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. / J. J. Rushchitsky – Heidelberg: Springer, 2014. – 454 p.
7. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 5. – P. 701–712.
8. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – Vol. 41, № 6. – P. 831–840.
9. Rushchitsky J. J. Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution / J. J. Rushchitsky // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 7. – P. 825–833.
10. Гузь А.Н. Введение в механику нанокомпозитов / А. Н. Гузь, Я. Я. Руцицький, И.А. Гузь – Киев: Академперіодика, 2010. – 398 с.
11. Rushchitsky J.J. On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites / Rushchitsky J. J. // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 1. – P.73–93.

References

1. RUSHCHITSKY, J. J. & TSURPAL, S.I. (1998) *Hvili v Materialah z Mikrostrukturoyu*. K.: Inst. Mehaniki im.S. P.Timoshenka.
2. ACHENBACH, J. D. (1973) *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
3. CATTANI, C. & RUSHCHITSKY, J. J. (2007) *Wavelet and Wave Analysis as Applied to Materials with Micro or Nanostructure*. Singapore-London: World Scientific.
4. KRATZER, A. & FRANZ, W. (1960) *Transcendente Funktionen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.
5. OLVER, F. W. J. (1974) *Asymptotics and Special Functions*. New York: Academic Press.
6. RUSHCHITSKY, J. J. (2014) *Nonlinear Elastic Waves in Materials*. Heidelberg: Springer.
7. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) *Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Plane strain state*. Int. Appl. Mech. 41 (5). p. 701–712.
8. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) *Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – derivation of wave equations. Axisymmetrical and other states*. Int. Appl. Mech. 41 (6). p. 831–840.
9. RUSHCHITSKY, J. J. (2005) *Quadratically nonlinear cylindrical hyperelastic waves – primary analysis of evolution* Int. Appl. Mech. 41 (7). p. 825–833.
10. GUZ, A.N. & RUSHCHITSKY, J. J. & GUZ, I.A. (2010) *Introduction to mechanics of nanocomposites*. Kiev: Akadempriodika
11. RUSHCHITSKY, J. J. (2009) *On the Self-Switching Hypersonic Waves in Cubic Nonlinear Hyperelastic Nanocomposites* Int. Appl. Mech. 45 (1). p. 73–93.

Надійшла до редколегії 31.05.2019