УДК 519.21 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2019/3.7

Усар І.Я., к. ф.-м. н.
Макушенко І.А., к. ф.-м. н.
Протопоп Ю.О.

Швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи з повторними викликами і чергою

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03680, м. Київ, пр-т. Глушкова 4д,
e-mail: usar69@ukr.net

I.Ya. Usar, Ph.D.
I.A. Makushenko, Ph.D.
Iu.O. Protopop

The convergense rate of stationary distribution of retrial queueing system with queue

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: usar69@ukr.net

У статті розглядається марковська модель системи з повторними викликами з одним обслуговуючим приладом, одним місцем в черзі та нескінченною орбітою зі змінною інтенсивністю вхідного потоку, керована пороговою стратегією. Для такої моделі знайдено умови існування та формули для ергодичного розподілу кількості вимог у випадку скінченної та нескінченної черги повторних вимог. Отримано швидкість збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної системи з одним обслуговуючим приладом та одним місцем в черзі.
Ключові слова: стохастична система, повторні виклики, порогова стратегія, стаціонарний режим, швидкість збіжності.

This paper describes a steady state behavior of the retrial system in the case of one server, one place in the queue and an infinity orbit. We research Markov`s models of retrial systems and variable rate of input flow controlled by threshold strategy. We defined stationary regime existence conditions and investigated probability characteristics of process for two-dimension Markov process with continuous time which we took as a main model of the specified system. In stationary regime for probability characteristics of the service process were found explicit formulas. Research methods which we used are based on the initial process approximation by the process with bounded state space. Results of the research allow us to evaluate convergence rates of stationary distribution of finite systems with repeated calls to stationary distribution of infinite systems. Method of probability flow equating is used for obtain explicit expressions for stationary system probabilities through the closed path which are defined in a special way. We considered model for one service devices and one place in the queue, which are controlled by threshold strategies.
Key Words: queue, repeated calls, threshold strategies, stationary regime, convergense rate.

Статтю представив д. т. н., проф. Заславський В.А.

Теорія систем з повторними викликами є одним із важливих розділів теорії масового обслуговування. Такі системи розглянуті в монографіях [1], [2]. Математичні моделі систем з повторними викликами мають широке застосування в практиці (див. [3], [4]).

У даній роботі розглядаються системи обслуговування з повторними викликами типу $[M/M/1/1+1]$ та $[M/M/1/1+1]^{(N)}$. Стандартну систему такого типу можна описати таким чином. Система складається з одного обслуговуючого приладу. Вхідний потік пуассонівський з інтенсивністю λ_j, яка залежить від j - кількості джерел повторних викликів. Вимога, яка надійшла в систему і знайшла прилад вільним, негайно надходить на обслуговування, а обслужившись, залишає систему. Час обслуговування вимоги має показниковий розподіл з параметром μ. Якщо ж прилад зайнятий, то ця вимога стає повторною і надходить на так звану орбіту. Кожна вимога, яка знаходиться на орбіті намагається потрапити на обслуговування через випадковий час, розподілений за показниковим законом з параметром ν, і якщо в момент звернення обслуговуючий прилад вільний, то ця вимога надходить на обслуговування. В іншому випадку вона повертається на орбіту і процес повторюється. Таким чином, на відміну від традиційних систем (див. [1],[2]) маємо ситуацію, коли інтенсивність вхідного потоку залежить від кількості вимог в системі.

Процес керування роботою системи визначається на основі порогової стратегії, яка реалізує наступний алгоритм управління процесом обслуговування: вважаємо $\lambda_j = \lambda_1$, якщо $j = 0,1,...,H$, і $\lambda_j = \lambda_2$, якщо $j = H+1,...$. H представляє собою поріг, при переході через який стрибком змінюється інтенсивність вхідного потоку. Змінний характер інтенсивності вхідного потоку в моделях такого типу дозволяє розв'язувати для них оптимізаційні задачі.

Процес обслуговування будемо моделювати двовимірним процесом Маркова $Q(t) = (Q_1(t), Q_2(t))$ з неперервним часом у фазовому просторі $S = \{0,1,2\} \times \{0,1,...\}$, де $Q_1(t)$ – кількість зайнятих приладів у момент часу t, $Q_2(t)$ – кількість джерел повторних викликів.

З'ясуємо умови існування стаціонарного режиму для процесу $Q(t), t \ge 0$.

Лема 1. Нехай $\lambda = \overline{\lim_{j\to\infty}} \lambda_j < \infty$. Тоді при $\lambda/\mu < 1$ ланцюг $Q(t)$ ергодичний і його граничний розподіл співпадає з єдиним стаціонарним.

Доведення леми базується на застосуванні теореми Твіді ([1], стор.97).

Для побудови розрахункових алгоритмів і явних формул розглядається скінченна модель $[M/M/1/1+1]^{(N)}$, для якої стаціонарний розподіл $\pi_{ij}^{(N)} = \lim_{t\to\infty} P(Q_1(t) = i, Q_2(t) = j)$ завжди існує.

При виконанні умови леми 1 і $N \to \infty$ стаціонарні ймовірності $\pi_{ij}^{(N)}$ наближають відповідні стаціонарні ймовірності π_{ij} для системи $[M/M/1/1+1]$.

Відмітимо (див. [1]), що завжди виконується нерівність $\pi_{ij} \le \pi_{ij}^{(N)}$.

В роботі оцінюється швидкість збіжності стаціонарного розподілу $\pi_{ij}^{(N)}$ системи $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ до відповідного розподілу π_{ij} системи $[M/M/1/1+1]$ з повторними викликами.

Позначимо

$$A_i(j) = \begin{cases} \prod_{k=i}^{j-1} \dfrac{(1+\rho_k)\mu + \lambda_{k+1} + (k+1)\nu}{\rho_k[(\lambda_k + k\nu)^2 + k\nu\mu]}, & i < j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

де $\rho_k = \dfrac{\lambda_k}{\mu}$ - завантаження системи первинними викликами, коли орбіта $Q_2(t) = k$.

Теорема 1. Якщо $\lambda_j > 0,\ j = 0,1,...,N$, то для будь-якого N стаціонарні ймовірності для системи $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ мають вигляд

$$\pi_{0j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j} A_j(N)}{j!},$$

$$\pi_{1j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j}(\lambda_j + j\nu)A_j(N)}{j!\mu},$$

$$\pi_{2j}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{N!\nu^{N-j}(\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!\mu},$$

$$j = 0,...,N-1,$$

$$\pi_{1N}^{(N)} = \frac{\pi_{0N}^{(N)}(N\nu + \lambda_N)}{\mu},$$

$$\pi_{2N}^{(N)} = \pi_{0N}^{(N)} \frac{(\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu}{\mu^2},$$

де

$$\pi_{0N}^{(N)} = \left\{1 + \frac{1}{\mu}(\lambda_N + N\nu) + N!\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}(\mu + \lambda_j + j\nu)A_j(N)}{j!\mu} + \right.$$
$$\left. + N!\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\nu^{N-j}(\mu + \lambda_{j+1} + (j+1)\nu)A_{j+1}(N)}{\lambda_j j!\mu} + \frac{1}{\mu^2}\left((\lambda_N + N\nu)^2 + N\nu\mu\right)\right\}^{-1}.$$

Розглянемо тепер систему $[M/M/1/1+1]$. Для того, щоб знайти представлення для стаціонарного розподілу при виконанні умов леми 1, необхідно в формулах теореми 1 перейти до границі при $N \to \infty$.

Введемо позначення

$$R_j \equiv \lim_{N\to\infty} \pi_{0N}^{(N)} N!\nu^N A_j(N).$$

Неважко показати, що

$$R_j = \left\{\sum_{i=0}^{j} \frac{(\mu + \lambda_i + i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\mu + \lambda_i + i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(\mu + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu} + \sum_{i=j}^{\infty} \frac{\mu + \lambda_{i+1} + (i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}\right\}^{-1}.$$

Використовуючи представлення для $\pi_{0N}^{(N)}$ з теореми 1, маємо

$$\lim_{N\to\infty}\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)=\left\{\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(N)}{i!\nu^i\mu A_j(N)}+\right.$$

$$\left.+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(N)}\right\}^{-1}.$$

Коли $i,j<N$

$$\frac{A_i(N)}{A_j(N)}=\begin{cases}A_i(j) & \text{якщо } i<j,\\ A_i(i)=1 & \text{якщо } i=j,\\ A_j^{-1}(i) & \text{якщо } i>j.\end{cases}$$

Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(N)}{i!\nu^i\mu A_j(N)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)},$$

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(N)}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(N)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}.$$

Маємо

Теорема 2. Якщо для $[M/M/1/1+1]$ - системи виконується умова леми 1, то для неї існують стаціонарні ймовірності

$$\pi_{0j}=\frac{R_j}{j!\nu^j},\qquad \pi_{1j}=\frac{(\lambda_j+j\nu)R_j}{j!\nu^j\mu},$$

$$\pi_{2j}=\frac{(\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)R_j}{\lambda_j j!\nu^j\mu}\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu\mu]}{(1+\rho_j)\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu},$$

де

$$R_j=\left\{\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}\right\}^{-1}.$$

Тепер розглянемо швидкість збіжності стаціонарного розподілу системи $[M/M/1/1+1]^{(N)}$ до відповідного розподілу системи $[M/M/1/1+1]$ при умові, що він існує.

Тоді маємо

$$\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|=\frac{1}{j!\nu^j}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|,$$

$$\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|=\frac{\lambda_j+j\nu}{j!\nu^j\mu}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|,$$

$$\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|=\frac{\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{\lambda_j j!\nu^j\mu}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_{j+1}(N)\right|.$$

З цих рівностей видно, що нам потрібно оцінити швидкість збіжності $\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)$ до R_j. Позначимо

$$B_j=\sum_{i=0}^{j}\frac{(\mu+\lambda_i+i\nu)A_i(j)}{i!\nu^i\mu}+\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu)A_{i+1}(j)}{\lambda_i i!\nu^i\mu},$$

$$\Theta_j=B_j+\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)}+\sum_{i=j}^{\infty}\frac{\mu+\lambda_{i+1}+(i+1)\nu}{\lambda_i i!\nu^i\mu A_j(i+1)}.$$

Скористаємось наступною лемою

Лема 2. Нехай $\overline{\lim_{N\to\infty}}\lambda_N/\mu<1$. Тоді

$$\lim_{N\to\infty}\left|R_j-\pi_{0N}^{(N)}N!\nu^N A_j(N)\right|(N-2)!\nu^N A_j(N)=\frac{\nu^2}{2\Theta_j^2}.$$

Введемо деякі позначення. Нехай N_0 вибрано так, що $\sup_{j>N_0}\lambda=q_0<1$, а $1<\gamma_0<1/q_0$. Покладемо

$$I(\nu)=\inf\left\{i>0:\frac{[(\mu^2+(2\mu+1)i\nu)+(i\nu)^2](\mu+(i+1)\nu)}{\nu^4 i^4}\le\gamma_0\right\},$$

$$D_j(N)=B_j+\sum_{i=j+1}^{N}\frac{\mu+\lambda_i+i\nu}{i!\nu^i\mu A_j(i)}\left(1+\frac{i\nu}{\lambda_{i-1}}\right).$$

Теорема 3. Нехай в системі з повторними викликами типу $[M/M/1/1+1]$ виконуються умови леми 1. Тоді для будь-якого j

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|=\frac{1}{j!\nu^{j-2}\mu^2\Theta_j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|=\frac{\lambda_j+j\nu}{j!\nu^{j-2}\mu^2\Theta_j^2},$$

$$\lim_{N\to\infty}(N-2)!\nu^N A_{j+1}(N)\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|=\frac{\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}{\lambda_j j!\nu^{j-2}\mu^2\Theta_j^2}$$

і для кожного фіксованого j та всіх $N\ge\max\{N_0,I(\nu),j\}+1$ справедливі оцінки

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{0j}-\pi_{0j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{R_j}{j!\nu^j D_j(N_0)}\frac{(\mu+N\nu)^2+N\nu}{N^2\mu^2}\left[1+\frac{2\mu+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right],$$

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{1j}-\pi_{1j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{R_j(\lambda_j+j\nu)}{j!\nu^j\mu D_j(N_0)}\frac{(\mu+N\nu)^2+N\nu}{N^2\mu^2}\times$$

$$\times\left[1+\frac{2\mu+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right],$$

$$(N-2)!\nu^N A_j(N)\left|\pi_{2j}-\pi_{2j}^{(N)}\right|\le$$

$$\le\frac{(\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu)}{\lambda_j j!\nu^j\mu}\cdot\frac{\rho_j[(\lambda_j+j\nu)^2+j\nu\mu]}{(1+\rho_j)\mu+\lambda_{j+1}+(j+1)\nu}\times$$

$$\times\frac{R_j}{D_j(N_0)}\frac{(\mu+N\nu)^2+N\nu}{N^2\mu^2}\left[1+\frac{2\mu+\nu(N+1)}{\nu N}\frac{1}{1-\gamma_0 q_0}\right].$$

Розглянемо приклад системи $[M/M/1/1+1]^{(20)}$. Нехай $\lambda_j=1{,}1,\ \mu=1,\ \nu=0{,}1$. Програма, написана на основі отриманих формул, дає наступні значення стаціонарного розподілу

$\pi_{0j}(20)=$

0.00734806, 0.0177823, 0.0264239, 0.0310369, 0.031622, 0.0292629, 0.0252561, 0.0206734, 0.0162316, 0.0123223, 0.00909825,0.00656287, 0.00464089, 0.00322603, 0.00220929, 0.00149327, 0.000997633, 0.000659625, 0.000432092, 0.000280672, 0.00018093.

$\pi_{1j}(20)=$

0.00808286, 0.0213388, 0.034351, 0.0434516, 0.047433, 0.0468206, 0.0429354, 0.0372121, 0.0308401, 0.0246446, 0.0191063, 0.0144383, 0.010674, 0.00774247, 0.00552322, 0.00388249, 0.00269361, 0.00184695, 0.00125307, 0.000842016, 0.00056087.

$\pi_{2j}(20)=$

0.00355646, 0.01105, 0.020315, 0.0287473, 0.0345834, 0.0371954, 0.0368362, 0.0342339, 0.0302457, 0.0256405, 0.0210012, 0.0167072, 0.0129628, 0.00984138, 0.00733058, 0.00536908, 0.0038738, 0.00275753, 0.00193919, 0.00134874, 0.00105029.

У статті отримано нові результати для класу систем з повторними викликами і чергою, з керованою інтенсивністю вхідного потоку, які розвивають теорію стохастичних систем з повторними викликами. Розглянуто модель з одним обслуговуючим приладом і одним місцем в черзі та знайдено оцінку швидкості збіжності стаціонарного розподілу скінченної системи з повторними викликами до стаціонарного розподілу нескінченної системи, що може бути використано при побудові алгоритмів розрахунку стаціонарного розподілу.

Список використаних джерел

1. *Falin G.I.* Retrial Queues / G.I. Falin, J.G.C. Templeton. – London Chapman & Hall, 1997. – 331 p.
2. *Artalejo J.R.* Retrial Queueing Systems. A Computational Approach / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral. – Springer-Verlag, 2008. – 318 p.
3. *Artalejo J.R.* Steady state solution of a single server queue with linear repeated request / J.R. Artalejo, A. Gomes-Corral // J. Applaid Probability. – 1997. – Vol.34. – P. 223-233.
4. *Anisimov V.V.* Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals / V.V. Anisimov, J.R. Artalejo // Queuing Systems. – 2001. – Vol.39. – P. 157-182.

References

1. FALIN, G.I., TEMPLETON, J.G.C. (1997) *Retrial Queues*. London Chapman & Hall.
2. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A. (2008) *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer-Verlag.
3. ARTALEJO, J.R., GOMES-CORRAL, A (1997) *Steady state solution of a single server queue with linear repeated request.* J. Applaid Probability. Vol.34, pp. 223-233.
4. ANISIMOV, V.V., ARTALEJO, J.R., (2001) *Analysis of Markov multiserver retrial queues with negative arrivals.* Queuing Systems. Vol.39, pp. 157-182.

Надійшла до редколегії 07.07.2019