

## ГЕОЛОГІЧНА ІНФОРМАТИКА

УДК 551.539.3:622.031

В. Шевчук, д-р геол.-мін. наук, проф.  
E-mail: svgeol@yandex.ua,

О. Іванік, д-р геол. наук, проф.  
E-mail: om.ivanik@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
ННІ "Інститут геології", вул. Васильківська 90, м. Київ, 03022, Україна,

М. Лавренюк, канд. фіз.-мат. наук, доц.  
E-mail: mykolalav@ukr.net

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Механіко-математичний факультет, просп. Ак. Глушкова 4е, м. Київ, 03127, Україна,

М. Савельєв  
E-mail: ms@slavutych.city  
Інститут проблем математичних машин і систем НАН України  
просп. Ак. Глушкова 42, Київ, 03187, Україна

### РОЗРОБКА АЛГОРИТМІВ ТА ПРОГРАМНИХ КОМПОНЕНТ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГІРСЬКОГО МАСИВУ ПРИ РОЗРОБЦІ ВУГІЛЬНИХ ПЛАСТІВ

*(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук, проф. Б.П. Масловим)*

*Дослідження напружено-деформованого стану техногенно зміненого масиву гірських порід при розробці пластових вугільних родовищ доцільно проводити методами механіки суцільного середовища, які базуються як на аналітичних та чисельних рішеннях, так і на даних натурних і лабораторних експериментів. Аналітичні рішення надають можливість проводити найменш "затратні" експерименти при широкому діапазоні головних факторів та параметрів середовища. У статті представлено алгоритм та програмну реалізацію моделювання напружено-деформованого стану пластового вугленосного масиву. Вихідною базовою моделлю прийнято модель однорідного пружного масиву. Побудову розрахункових схем виконано для умов плоского деформованого стану. Масив гірських порід, що вміщує пласт, моделюється як однорідний трансверсально-ізотропний породний масив. Визначено критерії правильності розв'язку, які встановлюються шляхом перевірки граничних умов. З метою розв'язку задачі про розподіл напружень в масиві, який моделюється лінійно-деформованим середовищем навколо виробки будь-якої форми поперечного перерізу, визначено відповідний вигляд відображальної функції одностороннього кола на контур виробки довільного перерізу. Виконано графічне моделювання алгоритму аналітичного розрахунку напружено-деформованого стану фрагменту геологічного масиву з виробкою довільної форми. Представлено програмну реалізацію розробленого алгоритму.*

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, вугільний пласт, алгоритм, моделювання, програмна реалізація.

Вступ та постановка проблеми. Проблема вивчення напруженого стану масивів порід неоднорідної будови із властивостями порід, що змінюються, як під впливом геологічних процесів, так і інженерних споруд, має велике практичне та наукове значення. Дослідження величин і розподілу природних напружень в породних комплексах однорідної і неоднорідної будови являє собою складну задачу, що обумовлено великою кількістю діючих природних геологічних і техногенних факторів і сил.

Різноманіття гірничо-геологічних умов та зростання глибин розробки родовищ корисних копалин призводять до необхідності поглибленого аналізу напружено-деформованого стану масивів гірських порід, у тому числі і навколо підземних виробок. Дослідження геомеханічних процесів при цьому має першочергове значення, зокрема, при їх кількісному прогнозуванні, обґрунтуванні надійності підземних споруд в певних гірничо-геологічних умовах, і окрім того, дозволяє вирішувати низку теоретичних питань, пов'язаних із формуванням та природою міцності гірських порід. Розробка родовищ корисних копалин викликає в породному масиві цілий комплекс різних механічних процесів: перерозподіл напружень і деформацій, прориви підземних вод, різноманітні газодинамічні явища тощо. Вивчення вказаних явищ є важливим завданням, так як саме вони визначають економічну доцільність і безпеку проведення робіт.

Вагомий внесок у теорію і практику геомеханічного забезпечення гірничих робіт при розробці пластових родовищ внесли такі вчені та спеціалісти як К.А. Ардашов, А.А. Борисів, Я.А. Біч, О.В. Ковальов, С.В. Комісаров, В.Г. Лабазін, А.М. Лінков, І.М. Петухов, А.Г. Протосеня, Н.М. Проскураков, В.Д. Слесарев, В.М. Шик та ін. Узагальнюючи сучасні методи дослідження напружено-деформованого стану (НДС) геоло-

гічного середовища, слід зазначити, що вони належать до таких головних груп:

- геолого-структурні;
- експериментальні (лабораторне моделювання);
- геодезичні;
- натурні вимірювання;
- теоретичні або розрахункові;
- геофізичні.

У той же час, механізм деформування, руйнування та осідання гірських порід при розробці вугільних родовищ має особливості, що потребують додаткових досліджень. Адаже отримання надійних прогнозних оцінок механічних станів масиву (включаючи компоненти тензорів напружень і деформацій та вектору переміщень) дозволяє своєчасно завадити небезпечним проявам гірничого тиску в підготовчих виробках, підвищити безпеку ведення гірничих робіт у межах шахт, мінімізувати витрати на експлуатацію гірничих виробок та загалом вирішити задачу оцінки стійкості гірського масиву [2, 6-8, 9, 12]. Вирішення даного завдання потребує подальшого ефективного використання методів механіки суцільних середовищ із відповідним відображенням процесів зрушення гірських порід та осадки відпрацьованої товщі та, відповідно, розробки спеціальних методик, що базуються на даних практики (маркшейдерські спостереження, спеціальні дослідження процесів деформацій, механічних характеристик масивів тощо).

Розробка алгоритму моделювання НДС фрагменту однорідного геологічного масиву з виробкою. В загальному вигляді алгоритми розрахунку НДС фрагменту однорідного геологічного масиву з виробкою діляться на дві категорії: алгоритми з використанням чисельних методів та алгоритми з аналітичним рішенням. Кожна група алгоритмів має власні переваги і недоліки.

Як правило, точний аналітичний розв'язок отримати неможливо, і він вимагає значної роботи з побудови достатньо адекватної математичної моделі. Водночас кінцеві обчислювальні витрати на отримання результату аналітичними методами фактично лінійні від набору вхідних даних. Ці дані зазвичай отримуються за результатами натурних експериментів (шахтних або лабораторних). Необхідно також відмітити, що при використанні аналітичних методів доводиться, як правило, приймати ряд гіпотез і припущень відносно властивостей досліджуваного середовища та протікання у ньому фізико-механічних процесів.

На противагу аналітичним, чисельні методи здатні дати прийнятне рішення при мінімумі витрат (у разі використання вже існуючих реалізацій базових алгоритмів), проте обчислювальні витрати в кращих випадках досягають поліноміального рівня від обсягу вхідних даних моделі. Серед цих методів найбільш широко відомими є метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних елементів, метод граничних інтегральних рівнянь та інші методи, які отримали велике розповсюдження в інженерному і науковому середовищі при використанні потужної обчислювальної техніки. При розрахунках НДС гірських масивів ефективним є метод граничних елементів, що використовується для розв'язку просторових задач теорії пружності. Він відрізняється від методу скінченних елементів тим, що дискретизація здійснюється не всередині області, в якій досліджується напружений стан, а тільки на її границі. Такою границею є поверхня досліджуваної виробки, яка представляється у вигляді мозаїки граничних елементів. Шляхом граничного переходу в формулах розв'язку задаються граничні інтегральні рівняння. Розв'язання задачі про розподіл напружень в досліджуваній області, в масиві навколо виробки (виробок), виконується на підставі умов (напружень, переміщень), що задаються на границі області – на поверхні виробки. Точність вирішення задач методом граничних елементів завжди вище, ніж іншими чисельними методами.

Ефективне застосування вказаних методів для вирішення важливих прикладних задач геомеханіки прямо залежить від розробки обчислювальних програм та їх успішної реалізації. Необхідно зауважити, що чисельні методи хоч і є найефективнішими практично для всіх класів задач, які розглядаються в гірничій геомеханіці, але і при їх використанні потрібно застосовувати різного роду спрощення, схематизації та припущення, зокрема, при вивченні механічних процесів у неоднорідних, багатозв'язаних, тріщинуватих, анізотропних масивах гірських порід. Ефективне застосування чисельних методів для вирішення важливих прикладних завдань залежить від розробки програмних середовищ (інтерфейсів), обчислювальних (програмних, системних) процедур та їх реалізації на різних системних платформах (LINUX, WINDOWS та ін.).

На сьогодні вирішення багатьох завдань моделювання механічних процесів в масивах гірських порід здійснюється переважно чисельними методами за допомогою сучасних програмних продуктів [1, 3, 5, 10 та ін.]. Ці програмні комплекси, разом із універсальністю, мають інтерфейс, який є зручним для користувача як при побудові моделей, так і при наочному аналізі отриманих результатів. Переважно у цих програмах для розрахунків параметрів напружено-деформованого стану застосовується метод скінченних елементів. Слід виокремити такі програмні розробки: Ansys – універсальний скінченноелементний програмний пакет, що дозволяє вирішувати задачі в областях: міцності та оцінки поведінки масивів гірських порід, Plaxis 2D (Plaxis 3D

Foundation, Plaxis 3D Tunnel) – програма для розв'язку задач механіки ґрунтів; FLAC 2D (FLAC 3D) – найбільш універсальна програма, яка широко використовується для гірничо-геомеханічних та геотехнічних досліджень, включає багато вбудованих геомеханічних моделей, також дозволяє створювати та інтегрувати користувачькі моделі, включає можливості моделювання різноманітних видів кріплення (стальних і канатних анкерів, бетону, залізобетону, арочних кріплень); процесів почергової виїмки порід; геологічних порушень; порового тиску вод; ABAQUS – один з найпотужніших пакетів для проведення всебічного скінченноелементного аналізу, є повністю універсальним та дозволяє вирішувати задачі як моделювання механізмів та конструкцій, так і масивів гірських порід у тривимірному моделюванні; UDEC – програма, що базується на методах механіки дискретного середовища. Дозволяє створювати моделі поведінки розбірних масивів; масивів, які мають блочну незв'язну структуру; незв'язних ґрунтів.

Слід зазначити, що наведені програмні комплекси мають певну універсальність, однак з певними проблемами застосовуються для конкретних умов, і не завжди можуть врахувати вагомі фактори виникнення процесів. Це вимагає застосування особливих підходів до моделювання НДС, що зумовлюються особливими умовами будови породного масиву та перебігу геомеханічних процесів.

Алгоритм розрахунку НДС з аналітичним рішенням. Базою для побудови розрахункових схем є прийнята гірничо-геомеханічна модель масиву гірських порід. Як приклад проаналізуємо НДС пластового вугленосного масиву при розробці потужних та середньої потужності пластів довгими очисними забоями. Вихідною базовою моделлю приймемо модель однорідного пружного масиву. Побудову розрахункових схем виконано для умов плоского деформованого стану. Масив гірських порід, що вміщує пласт, моделюється як однорідний трансверсально-ізотропний породний масив.

Оскільки, побудова об'ємних моделей досить трудомістка та машинний час розрахунків у таких моделях, найчастіше, дуже великий (а у більшості випадків доводиться "жертвувати" ступінню апроксимації та використовувати саме пружну модель), то практично основна частина досліджень проводиться на плоских моделях. У нашому випадку, при моделюванні відпрацювання вугільних пластів у плоскій постановці (плоский деформований стан) необхідно розглянути ряд характерних перетинів для різних дільничних виробок і міжлавових целіків та розв'язати задачу про визначення напружень навколо підземних виробок. Для цього використовується розв'язок плоскої задачі теорії пружності про напівскінченний важкий масив, обмежений землею поверхнею та ослаблений виробкою.

Загалом форма поперечного перерізу горизонтальних виробок встановлюється відповідно до фізико-механічних властивостей порід, величини і напрямку гірничого тиску, терміну служби й прийнятої конструкції кріплення. Якщо виробка не кріпиться, то їй надається форма поперечного перерізу, яка наближається до форми склепіння природної рівноваги.

Задача про розподіл напружень навколо круглого отвору є задачею теорії пружності. Згадана задача (відома як узагальнена задача Кірша) може бути розв'язана методом Колосова-Мухомелівілі за допомогою комплексних потенціалів  $\phi(z)$  та  $\psi(z)$ , регулярних в області  $S$ , що повністю визначають стан пружного середовища за граничних умов за допомогою відомих формул Колосова-Мухомелівілі. Добираючи відповідний вигляд відображальної функції одиничного кола на

контур виробки довільного перерізу, можна розв'язати задачу розподілу напружень в масиві, який моделюється лінійно-деформованим середовищем навколо виробки будь-якої форми поперечного перерізу.

У загальному вигляді алгоритм розрахунку НДС аналітичним методом відображений в роботі Н.С. Буличова [4]. Для визначення напружень навколо виробки використовується розв'язок плоскої задачі теорії пружності про напівнескінченний важкий масив (область S), обмежений земною поверхнею L та послаблений виробкою (контур L1).

Шукані компоненти повних напружень в області S можуть бути представлені у вигляді суми двох доданків:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)}; \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} + \tau_{xy}^{(1)},\end{aligned}\quad (1)$$

де  $\sigma_x^{(0)}, \sigma_y^{(0)}, \tau_{xy}^{(0)}$  – початкові напруження, які діяли в непорушеному масиві (до утворення виробки);  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}$  – додаткові («знімні») напруження, викликані утворенням виробки.

Компоненти повних та початкових напружень задовольняють системі диференціальних рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \gamma; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

та умові сумісності деформацій:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.\quad (3)$$

На відміну від повних напружень, компоненти додаткових напружень задовольняють однорідній системі диференціальних рівнянь рівноваги при тому ж рівнянні сумісності деформацій (3).

Граничні умови для повних напружень:

$$\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0 \text{ на } L;\quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= 0, \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= 0\end{aligned} \right\} \text{ на } L_1.\quad (5)$$

Умови (4) відображають відсутність нормальних і дотичних напружень на земній поверхні. Умови (5) означають, що контур перерізу виробки вільний від напружень;  $(n, x)$  та  $(n, y)$  – це кути між нормаллю до контуру кругового вирізу та осями  $x$  та  $y$ .

Граничні умови для початкових напружень:

$$\sigma_x^{(0)} = 0; \tau_{xy}^{(0)} = 0 \text{ на } L\quad (6)$$

В якості частинного розв'язку неоднорідної системи рівнянь (2) можна взяти початкове поле напружень:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= \gamma(x - H); \\ \sigma_y^{(0)} &= \lambda\gamma(x - H); \\ \tau_{xy}^{(0)} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Граничні умови для додаткових напружень на  $L$ :

$$\sigma_x^{(1)} \cos(n, x) + \tau_{xy}^{(1)} \cos(n, y) = -\gamma(x - H) \cos(n, x);\quad (8)$$

$$\tau_{xy}^{(1)} \cos(n, x) + \sigma_y^{(1)} \cos(n, y) = -\lambda\gamma(x - H) \cos(n, y) \text{ на } L_1.\quad (9)$$

Складові додаткових напружень перетворюються в нуль на нескінченності. У зв'язку з тим, що виробка перебуває на глибині  $H > x$ , величиною ординати  $X$ , порівняно зі значно більшою величиною  $H$ , можна знехтувати (зі строгого розв'язку задачі для півплощини з круговим отвором, отриманого Д. І. Шерманом, впли-

ває, що вплив вільної від напружень земної поверхні можна не враховувати вже при глибині  $H \geq 5r_0$ ). Тоді умови на  $L_1$  набувають вигляду:

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} &= \sigma_x^{(1)} \cos(n, x) + \tau_{xy}^{(1)} \cos(n, y) = \gamma H \cos(n, x); \\ q^{(1)} &= \tau_{xy}^{(1)} \cos(n, x) + \sigma_y^{(1)} \cos(n, y) = \lambda\gamma H \cos(n, y)\end{aligned}\quad (10)$$

Розв'язання поставленої задачі зводиться до розв'язання однорідної системи диференціальних рівнянь рівноваги за умови сумісності деформацій та граничних умов.

Сформульована вище задача (задача про розподіл напружень навколо круглого отвору) є задачею теорії пружності. Згадана задача (відома (відомо за загальною задачею Кірша) може бути розв'язана методом Колосова-Мухомелішвілі за допомогою комплексних потенціалів  $\phi(z)$  та  $\psi(z)$ , регулярних в області S, що повністю визначають стан пружного середовища з граничних умов за допомогою відомих формул Колосова-Мухомелішвілі.

Ця задача простіше розв'язується за допомогою функції напружень, запропонованої в 1861 р. датським астрономом Ері (Airy):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.\quad (11)$$

Функція напружень в даному випадку може бути прийнята у вигляді:

$$\phi = (Ar^2 + Br^4 + Cr^{-2} + D) \cos 2\theta.\quad (12)$$

Сталі інтегрування  $A, B, C$  и  $D$  визначаються з граничних умов.

Нехтуючи проміжковими перетвореннями, наведемо остаточні формули для напружень (тут стискаючі напруження прийняті за додатні):

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \gamma H \left[ \frac{1+\lambda}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{1-\lambda}{2} \left( 1 + 3 \frac{r_0^4}{r^4} - 4 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \sigma_\theta &= \gamma H \left[ \frac{1+\lambda}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{1-\lambda}{2} \left( 1 + 3 \frac{r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]; \\ \tau_{r\theta} &= -\gamma H \frac{1-\lambda}{2} \left( 1 - 3 \frac{r_0^4}{r^4} + 2 \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (13)$$

Для визначення потенційно небезпечних зон знаходимо за відомими формулами переходу всі компоненти напружень в декартовій системі координат

$$\sigma_r = \sigma_y \sin^2 \theta + \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta;$$

$$\sigma_\theta = \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta;$$

$$\tau_{y\theta} = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta.$$

За компонентами напружень в декартовій системі координат обчислюємо девіатори напружень

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \text{де } \sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

$$ij = 1, 2, 3.$$

За компонентами девіаторів напружень обчислюємо вираз для інтенсивності дотичних напружень

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}.$$

В кожній точці досліджуваного тіла порівнюємо одержаний вираз для інтенсивності дотичних напружень із величиною  $T_y$ , де  $T_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$ , а  $\sigma_y$  – величина межі текучості розглядуваного матеріалу. В тих точках, де  $T \geq T_y$ , згідно із критерієм пластичності Губера-Мізеса, можливий розвиток пластичних деформацій. Таким чином,

геометричне місце точок, де виконується умова  $T \geq T_y$ , визначає конфігурацію потенційної зони пластичності.

Напруження в характерних точках зручно характеризувати безрозмірними величинами відношення цих напружень до початкових напружень в розглянутих точках. Такі величини називаються *коефіцієнтами концентрації напружень*.

З віддаленням від виробки напруження наближаються до своїх початкових значень, які існували в масиві до проведеного виробки. А це значить, що прохідка виробки викликає перерозподіл напружень в масиві в певній обмеженій області, яка називається *зоною впливу виробки*.

Добираючи відповідний вигляд відображальної функції одиничного кола на контур виробки довільного перерізу, можна розв'язати задачу розподілу напружень в масиві, який моделюється лінійно-деформованим пружним середовищем навколо виробки будь-якої форми поперечного перерізу. Так, при

$$z = r \left( \zeta - \frac{1}{6} \zeta^{-3} \right) \quad (14)$$

ми отримуємо наближене конформне відображення контуру виробки квадратного перерізу з округленими кутами.

При існуючих формах поперечного перерізу гірничих виробок і тунелів різного призначення, з достатньою для практичних розрахунків точністю може бути використана відображальна функція вигляду:

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{n=0}^5 a_n \zeta^{1-n}. \quad (15)$$

Таким чином, алгоритм обчислення напружень в пружному середовищі в околі виробки довільного перерізу буде представлений у такий спосіб:

1. Вихідними даними є величини  $a_0, a_1, \dots, a_5$  - коефіцієнти відображальної функції, яка реалізує конформне відображення зовнішності одиничного кола на зовнішність контуру поперечного перерізу виробки;  $\lambda$  - коефіцієнт бокового тиску в непорушеному масиві.

2. Розрахунок напружень зводиться до виконання наступних операцій:

а) Визначаються величини:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_2}{a_0}; \quad q_2 = \frac{a_3}{a_0}; \quad q_3 = \frac{a_4}{a_0}; \quad q_4 = \frac{a_5}{a_0}; \\ h_1 &= q_1(1+q_3) + 2q_2q_4; \quad h_2 = q_2 + q_1q_4; \quad h_3 = q_3; \quad h_4 = q_4; \\ d_1 &= \frac{2(1-\lambda) - (1+\lambda)(h_1 + 2h_2q_4)}{1 - q_3 - 2q_4^2}; \quad d_2 = -(1+\lambda)h_2 + d_1q_4; \\ d_3 &= -(1+\lambda)q_3; \quad d_4 = -(1+\lambda)q_4; \\ A_1 &= d_1q_3 + 2d_2q_4; \quad A_2 = d_1q_4. \end{aligned} \quad (16)$$

б) При зміні криволінійних координат  $\rho$  та  $\theta$  в межах  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $1 \leq \rho \leq 5$  (значення  $\rho$  та  $\theta$  послідовно змінюються з певним кроком), обчислюють величини:

$$\begin{aligned} c'_0 &= (\rho - \rho^{-1}) \cos \theta + \sum_{n=1}^4 q_n (\rho^{-n} - \rho^n) \cos n\theta; \\ c'_1 &= 1 - \sum_{n=1}^4 nq_n \rho^{-n-1} \cos(n+1)\theta; \\ c'_2 &= \sum_{n=1}^4 n(n+1)q_n \rho^{-n} \cos n\theta; \\ c'_3 &= -1 + \sum_{n=1}^4 nq_n \rho^{n+1} \cos(n+1)\theta; \\ a'_1 &= 1 + \lambda - \sum_{n=1}^4 n\rho^{-n-1} d_n \cos(n+1)\theta; \\ a'_2 &= \sum_{n=1}^4 n(n+1)\rho^{-n} d_n \cos n\theta; \end{aligned}$$

$$d'_0 = -(\rho - \rho^{-1}) \sin \theta + \sum_{n=1}^4 q_n (\rho^{-n} - \rho^n) \sin n\theta;$$

$$d'_1 = \sum_{n=1}^4 nq_n \rho^{-n-1} \sin(n+1)\theta;$$

$$d'_2 = -\sum_{n=1}^4 n(n+1)q_n \rho^{-n} \sin n\theta; \quad d'_3 = \sum_{n=1}^4 nq_n \rho^{n+1} \sin(n+1)\theta;$$

$$b'_1 = \sum_{n=1}^4 n\rho^{-n-1} d_n \sin(n+1)\theta; \quad b'_2 = -\sum_{n=1}^4 n(n+1)\rho^{-n} d_n \sin n\theta;$$

$$\begin{aligned} a'_3 &= \sum_{n=1}^2 n\rho^{n+1} A_n \cos(n+1)\theta - (1+\lambda) - (1+\lambda) \sum_{n=1}^4 nh_n \rho^{n+1} \cos(n+1)\theta + \\ &+ 2\rho^2(1-\lambda) \cos 2\theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b'_3 &= \sum_{n=1}^2 n\rho^{n+1} A_n \sin(n+1)\theta - (1+\lambda) \sum_{n=1}^4 nh_n \rho^{n+1} \sin(n+1)\theta + \\ &+ 2\rho^2(1-\lambda) \sin 2\theta; \end{aligned}$$

$$A'_1 = a'_2 c'_1 - a'_1 c'_2 - b'_2 d'_1 + b'_1 d'_2; \quad B'_1 = a'_2 d'_1 - a'_1 d'_2 + b'_2 c'_1 - b'_1 c'_2;$$

$$C'_1 = c'_3 (c'_1 a'_1 - d'_1 b'_1) - d'_3 (c'_1 b'_1 + d'_1 a'_1) + a'_3 [(c'_1)^2 - (d'_1)^2] - 2c'_1 d'_1 b'_3;$$

$$D'_1 = c'_3 (c'_1 b'_1 + d'_1 a'_1) + d'_3 (c'_1 a'_1 - d'_1 b'_1) + b'_3 [(c'_1)^2 - (d'_1)^2] + 2c'_1 d'_1 a'_3;$$

$$A'' = c'_0 A'_1 - d'_0 B'_1 - C'_1; \quad B'' = c'_0 B'_1 + d'_0 A'_1 - D'_1.$$

в) Визначаються (при кожному значенні  $\rho$  і  $\theta$ ) напруження в пружній площині від одиничного навантаження за формулами:

$$\tilde{\sigma}_\rho = \frac{2\rho^2 [(c'_1)^2 + (d'_1)^2] (c'_1 a'_1 + d'_1 b'_1) - (c'_1 A''_1 + d'_1 B''_1)}{4\rho^2 [(c'_1)^2 + (d'_1)^2]^2};$$

$$\tilde{\sigma}_\theta = \frac{2\rho^2 [(c'_1)^2 + (d'_1)^2] (c'_1 a'_1 + d'_1 b'_1) + (c'_1 A''_1 + d'_1 B''_1)}{4\rho^2 [(c'_1)^2 + (d'_1)^2]^2};$$

$$\tilde{\tau}_{\rho\theta} = \frac{c'_1 B''_1 - d'_1 A''_1}{4\rho^2 [(c'_1)^2 + (d'_1)^2]^2}.$$

### Моделювання алгоритму розрахунку НДС на основі графічних нотацій.

В загальному вигляді графічна нотація - це спосіб представлення алгоритму (архітектури, поведінки, структури) комп'ютерної програми в графічній формі. Дана форма може бути зведена до графа і розглядатися з позиції теорії графів. Формально, граф-схема алгоритму (ГСА) - кінцевий зв'язний орієнтований граф  $G = \langle A, V \rangle$ , вершини якого

$a_i \in A, i = \overline{1, N}$  відповідають операторам, а дуги  $v_k = (a_i, a_j) \in V, k = \overline{1, M}, i, j = \overline{1, M}$  задають порядок

проходження вершин (операторів) алгоритму, де  $N = |A|$  - число вершин графа,  $M = |V|$  - число дуг.

У більш широкому сенсі вершинам графа відповідають не тільки операторні вершини, а й умовні, початкова та кінцева вершини і т.д.

За допомогою графічної нотації ДРАКОН [11] було проведено графічне моделювання алгоритму аналітичного розрахунку напружено-деформованого стану фрагменту однорідного геологічного масиву з виробкою довільної форми. Результати графічного моделювання представлені на рис. 1.

**Програмна реалізація.** Даний алгоритм був описаний мовою програмування Object Pascal.

Для суто математичних покрокових обчислень був створений клас TNDSCalculator, де зберігаються вихідні дані, такі як коефіцієнти відображальної функції, коефіцієнт бічного тиску в непорушеному середовищі тощо,

як результат виводяться ізолінії напружень навколо виробки (Рис.2):  
 На вкладці Picture будується конформне відображення зовнішності одиничного кола на зовнішність кон-

туру поперечного перерізу виробки. Фігура контура задається коефіцієнтами відображальної функції  $a_0, a_1, \dots, a_5$  (Рис. 3):

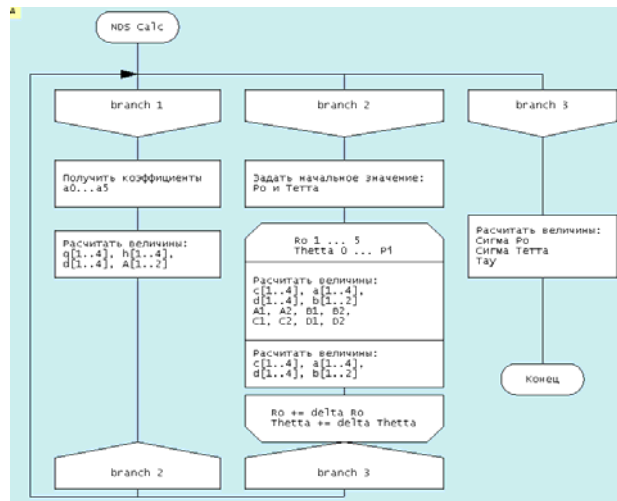


Рис. 1. Графічне моделювання алгоритму аналітичного розрахунку напружено-деформованого стану фрагменту однорідного геологічного масиву з виробкою довільної форми

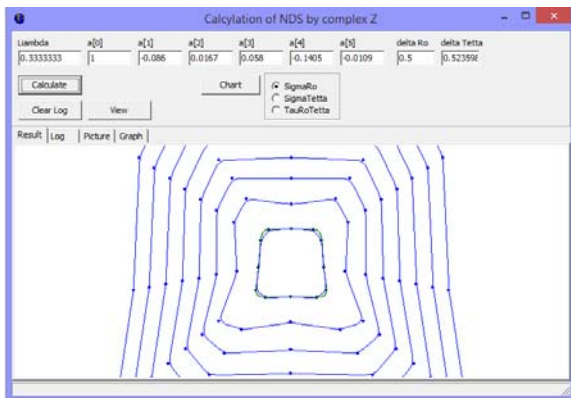


Рис. 2. Візуалізація ізоліній напружень

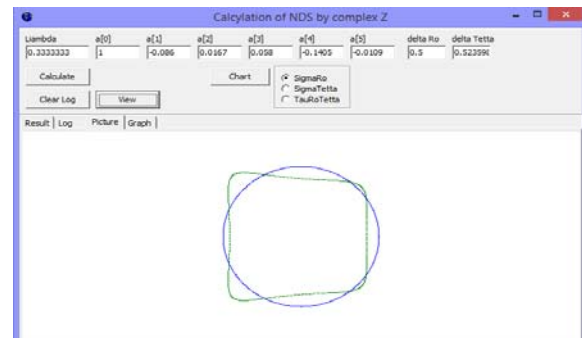


Рис. 3. Візуалізація фігури контуру поперечного перерізу виробки

На вкладці Graph будуються графіки залежності напружень  $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$  від радіуса  $r$  та кута  $\theta$  (Рис. 4).

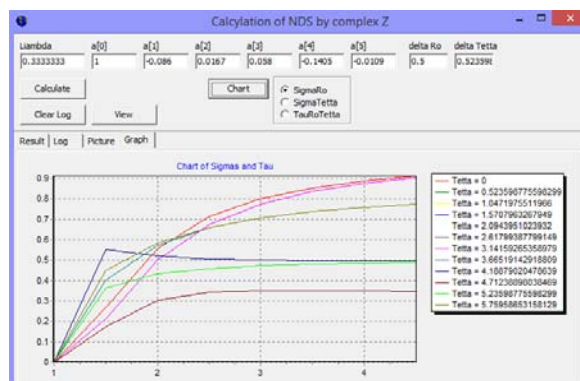


Рис. 4. Побудова графіку залежності напружень  $\sigma_\theta, \sigma_r, \tau_{r\theta}$  від радіуса  $r$  та кута  $\theta$

Верифікація програмної реалізації алгоритму. Для перевірки даної методики було взято розрахунок, наведений у публікації [4]. Додатково було змодельовано коефіцієнти комплексного полінома, що задає форму

виробки, із використанням пакету MathCAD. Результати даного моделювання представлені нижче:

1. Визначення коефіцієнтів комплексного полінома для трапецієподібного контура (Рис.5) (згідно підходу Бойма):

$$a_0 = -0.009, a_1 = 0.167, a_2 = 0.058, a_3 = -0.141, a_4 = -0.011, a_5 = 0, N = 15, \theta = 0, \frac{1}{N} \dots 2\pi,$$

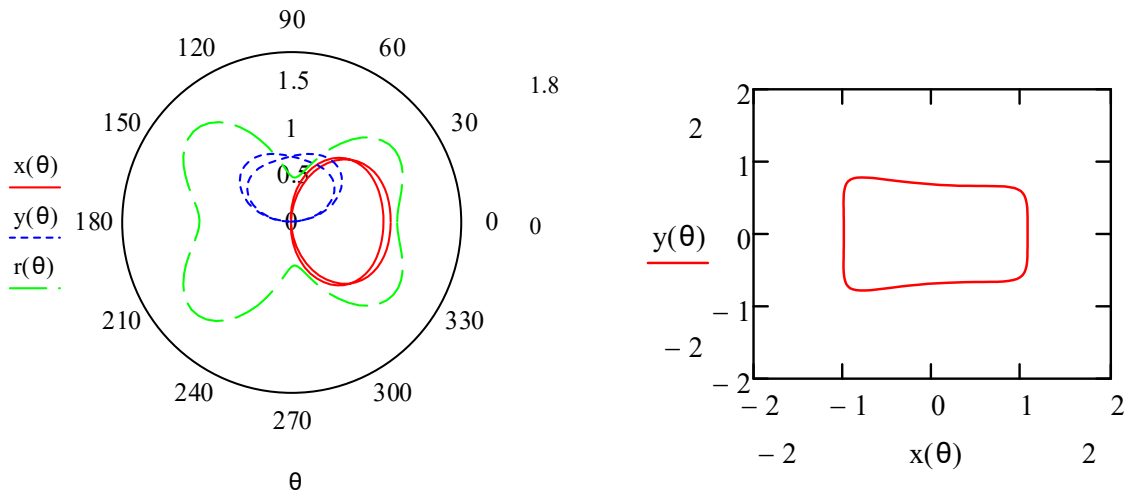


Рис. 5. Визначення параметрів напружень у межах трапецієподібного контура

$$x(\theta) = (1 + a_1) \cdot \cos(\theta) + a_2 \cdot \cos(2\theta) + a_3 \cdot \cos(3\theta) + a_4 \cdot \cos(4\theta) + a_5 \cdot \cos(5\theta) + a_0$$

$$y(\theta) = (1 - a_1) \cdot \sin(\theta) - a_2 \cdot \sin(2\theta) - a_3 \cdot \sin(3\theta) - a_4 \cdot \sin(4\theta) - a_5 \cdot \sin(5\theta)$$

$$r(\theta) = x(\theta) \cdot x(\theta) + y(\theta) \cdot y(\theta)$$

Визначення коефіцієнтів комплексного полінома для контура у формі склепіння (Рис. 6):

$$a_1 = 0.142, a_2 = 0.067, a_3 = -0.101, a_4 = 0.039, a_5 = 0.00, \theta = 0, \frac{1}{N} \dots 2\pi$$

$$a_1 := 0.14153 = 0.142$$

$$x(\theta) = (1 + a_1) \cdot \cos(\theta) + a_2 \cdot \cos(2\theta) + a_3 \cdot \cos(3\theta) + a_4 \cdot \cos(4\theta) + a_5 \cdot \cos(5\theta)$$

$$y(\theta) = (1 - a_1) \cdot \sin(\theta) - a_2 \cdot \sin(2\theta) - a_3 \cdot \sin(3\theta) - a_4 \cdot \sin(4\theta) - a_5 \cdot \sin(5\theta)$$

$$r(\theta) = x(\theta) \cdot x(\theta) + y(\theta) \cdot y(\theta)$$

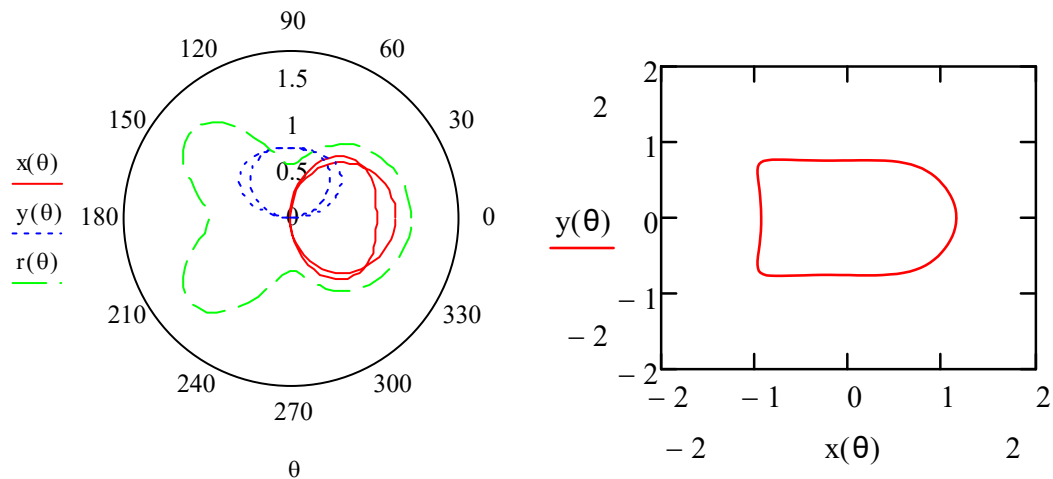


Рис. 6. Визначення параметрів напружень навколо контура у формі склепіння

Визначення коефіцієнтів комплексного полінома для контура у формі півкруга (Рис. 7):

$$a_1 = -0.313, a_2 = -0.156, a_3 = -0.051, a_4 = 1.95 \times 10^{-3}, a_5 = 0, N = 15,$$

$$x(\theta) = (1 + a_1) \cdot \cos(\theta) + a_2 \cdot \cos(2\theta) + a_3 \cdot \cos(3\theta) + a_4 \cdot \cos(4\theta) + a_5 \cdot \cos(5\theta)$$

$$y(\theta) = (1 - a_1) \cdot \sin(\theta) - a_2 \cdot \sin(2\theta) - a_3 \cdot \sin(3\theta) - a_4 \cdot \sin(4\theta) - a_5 \cdot \sin(5\theta)$$

$$r(\theta) = x(\theta) \cdot x(\theta) + y(\theta) \cdot y(\theta)$$

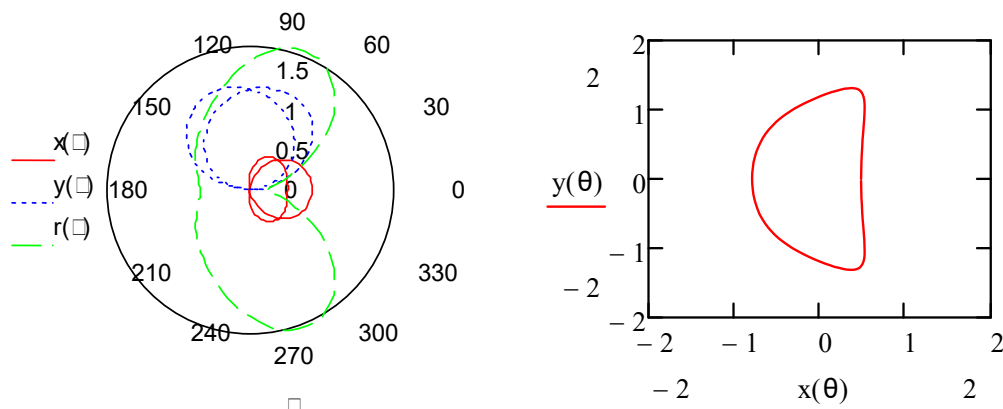


Рис. 7. Визначення параметрів напружень навколо контура у формі напівкруга

Розроблений програмний комплекс забезпечує результати розрахунку НДС навколо виробки довільної форми.

Висновки. Дослідження НДС техногенно зміненого масиву гірських порід при розробці пластових вугільних родовищ найбільш доцільно проводити методами механіки суцільного середовища, які базуються як на аналітичних та чисельних рішеннях, так і на даних натурних і лабораторних експериментів. Аналітичні рішення надають можливість проводити найменш "затратні" експерименти при широкому діапазоні як головних чинників, так і їх величин, однак їх точність залежить від повноти врахування факторів. При моделюванні відпрацювання вугільних пластів у плоскій постановці (плоский деформований стан) розглянуто характерні перетини для різних дільничних виробок. Розглянуто алгоритм розрахунку НДС аналітичним методом. Для визначення напружень навколо виробки використовується розв'язок плоскої задачі теорії пружності про напівнескінченний масив, обмежений земною поверхнею та послаблений виробкою. Визначено критерії правильності розв'язку, які встановлюються шляхом перевірки граничних умов. З метою розв'язку задачі про розподіл напружень в масиві, який моделюється лінійно-деформованим середовищем навколо виробки будь-якої форми поперечного перерізу, визначено відповідний вигляд відображальної функції одиничного кола на контур виробки довільного перерізу.

#### Список використаних джерел

1. Billuax D. FLAC and Numerical Modeling in Geomechanics / D. Billuax, X. Rachez – Lyon: Second international FLAC symposium, 29-31 October 2001.
2. Бокий Б.В. Технология, механизация и организация проведения горных выработок / Б.В. Бокий, Е.А. Зимица, В.В. Смирняков, О.В. Тимофеев. – М.: Недра, 1983. – 264 с.
3. Борисов А.А. Расчеты опорного давления при плавном опускании кровли / А.А. Борисов, Н.Н. Кайдалов, В.Г. Лабазин // Изв. ВУЗов. – Горный журнал, 1977. – №10. – С. 23-27.
4. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений / Н.С. Булычев. – М.: Недра, 1982. – 270 с.
5. Глушихин Ф. П. Моделирование в геомеханике / Ф. П. Глушихин, Г. Н. Кузнецов, М.Ф. Шклярский и др. // М.: Недра, 1991. – 240 с.
6. Господариков А.П. Алгоритм расчета слоистого массива для прогноза напряженного состояния кровли и угольного пласта в зоне очистных работ / А.П. Господариков, С.В. Васильев, М.А. Зацепин // Записки Горного института. – СПб. 2003. – Т.155 (1). – С.47-49.
7. Господариков А.П. Алгоритм численного решения нелинейных краевых задач геомеханики / А.П. Господариков // Известия Тульского государственного университета. Серия "Экология и безопасность жизнедеятельности". – 1999. – Вып. 5. – С. 128-134.

8. Господариков А.П. Математическое моделирование геомеханического состояния слоистого неоднородного массива при разработке пологих пластовых месторождений: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.15.11 / А. П. Господариков. – СПб, 1999. – 43 с.

9. Зильбершмидт В.Г. Исследование технологической трещиноватости массива междукамерного целика / В.Г. Зильбершмидт, С.А. Непримеров // Разработка калийных месторождений: межвузовский сб. науч. трудов. – Пермь, 1984. – С.68-70.

10. Каспарьян, Э.В. Геомеханика: метод. пособие / Э.В. Каспарьян, А.А. Козырев, М.А. Иофис, А.Б. Макаров. – М.: Высшая школа, 2006. – 503 с.

11. Паронджанов В.Д. Графический синтаксис языка ДРАКОН / В.Д. Паронджанов // Программирование. – 1995. – № 3. – С. 45-62.

12. Ставрогин А.Н. Механика деформирования и разрушения горных пород / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1992. – 224 с.

13. Шевчук В. Тектонофізичні основи структурного аналізу / В. Шевчук, І. Кузь, А. Юрчишин // Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2002. – 124 с.

#### References

1. Billuax, D., Rachez X. (2001). FLAC and Numerical Modeling in Geomechanics. Lyon: Second international FLAC symposium, 29-31 October.
2. Bokij, B.V., Zimina, E.A. et al. (1983). Technology, mechanization and organization of mining. M.: Nedra, 264 p. [in Russian].
3. Borisov, A.A., Kaidalov, N.N. et al. (1977). Calculation of bearing pressure for smooth roof-lowering. Izv. VUZov. – Gornyj zhurnal, 10, 23-27. [in Russian].
4. Bulychev, N.S. (1982). Mechanics of the underground facility. M.: Nedra, 270 p. [in Russian].
5. Glushihin, F. P., Kuznetcov, G.N. et al. (1991). Modeling in Mechanics. M.: Nedra, 240 p. [in Russian].
6. Gospodarikov, A.P., Vasilev, S.V. et al. (2003). Calculation algorithm of the tabular array for the prediction stress condition in handing layer and coal seam on the coal face work zone. Records of Mining Institute. SPb, 155 (1), 47-49. [in Russian].
7. Gospodarikov, A.P. (1999). Numerical algorithm of the nonlinear boundary equations in geomechanics. Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija "Jekologija i bezopasnost' zhiznedejatel'nosti", 5, 128-134. [in Russian].
8. Gospodarikov, A. P. (1999). Mathematical modeling of the geomechanical condition of bedded solid mass in the development of the stratified deposits: avtoref. diss. ... d-ra tehn. nauk: 05.15.11, SPb, 43 p. [in Russian].
9. Zil'bershmidt, V.G., Neprimerov S.A. (1984). Fracture characterization of the interchamber pillar system. Razrabotka kalijnyh mestorozhdenij: mezhvuzovskij sbornik nauchnyh trudov. Perm, 68-70. [in Russian].
10. Kaspar'jan, Je.V., Kozyrev, A.A. et al. (2003). Geomechanics: study guide. M.: Vyssh. shkola, 503 p. [in Russian].
11. Parondzhanov, V. D. (1995). Graphic syntax of the ssn DRAKON. Programming, 3, 45-62. [in Russian].
12. Stavrogin, A.N. (1992). Mechanics of rock deformation and destruction. M.: Nedra, 224 p. [in Russian].
13. Shevchuk, V. (2002). Tectonophysics basics of structural analysis. Lviv: LNU im. Ivana Franka, 124 p. [in Ukrainian].

Надійшла до редколегії 19.12.16

V. Shevchuk, DSc (Geology and Mineralogy), Prof.

E-mail: svgeol@yandex.ua,

O. Ivanik, DSc (Geology), Prof.

E-mail: om.ivanik@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Institute of Geology, 90 Vasylykivska Str., Kyiv 03022, Ukraine,

M. Lavrenyuk, Dcs (physics and mathematics)

E-mail: mykolalav@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Faculty of Mechanics and Mathematics, 4e Acad. Glushkov Bul., Kyiv, 03127, Ukraine,

M. Saveliev

E-mail: ms@slavutych.city

Institute of Mathematical Machines and Systems Problems of the Ukraine National Academy of Science

42 Acad. Glushkov Bul., Kyiv, 03187, Ukraine

## DEVELOPMENT OF ALGORITHMS AND SOFTWARE COMPONENTS FOR MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF ROCKS DURING COAL DEPOSITS EXPLORATION

*Studies of the stress-strain state of technologically modified rock mass with the exploration of coal deposits are carried out by the methods of continuum mechanics, based both on analytical solutions and data of field and laboratory experiments. Analytical solutions provide the ability to do the least costly experiments in a wide range of important factors and environmental parameters. The consideration is given to the algorithm and programme module for the simulation of the stress-strain state of coal-bearing strata. The model of homogeneous elastic solid massive is considered as a base model. Developing of basic schemes was carried out for conditions of plane strain. Rock massive with the layer is modeled as a homogeneous transversely isotropic body. Criteria solutions are established by checking of boundary conditions. In order to solve the task of the distribution of stresses in the rock massive, which is modeled as a linear deformable environment around the excavation of any cross-sectional shape, the appropriate type of the unit disk functions was determined. The graphical modeling of the analytical algorithm calculated the stress-strain state of the geological massif with the excavation of any shape was carried out. The software application of the developed algorithm is presented.*

**Keywords:** stress-strain state, coal layer, algorithm, simulation, software implementation.

В. Шевчук, д-р геол.-мин. наук, проф.

E-mail: svgeol@yandex.ua,

Е. Иваник, д-р геол. наук, доц.

E-mail: om.ivanik@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

УНІ "Інститут геології", ул. Васильківська, 90, г. Київ, 03022, Україна,

М. Лавренюк, канд. физ.-мат. наук, доц.

E-mail: mykolalav@ukr.net

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Механіко-математический факультет, просп. Академіка Глушкова, 4е, г. Київ, 03127, Україна,

М. Савельєв

E-mail: ms@slavutych.city

Інститут проблем математических машин и систем НАНУ

просп. Академіка Глушкова, 42, г. Київ, 03187, Україна

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММНЫХ КОМПОНЕНТ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГОРНОГО МАССИВА ПРИ РАЗРАБОТКЕ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ

*Исследования напряженно-деформированного состояния техногенно измененного массива горных пород при разработке пластовых угольных месторождений целесообразно проводить методами механики сплошных сред, базирующихся как на аналитических решениях, так и на данных натурных и лабораторных экспериментов. Аналитические решения предоставляют возможность осуществлять наименее "затратные" эксперименты в широком диапазоне главных факторов и параметров среды. В статье представлен алгоритм и программная реализация моделирования напряженно-деформированного состояния пластового угленосного массива. В качестве базовой модели принята модель однородного упругого массива. Построение расчетных схем выполнено для условий плоского деформированного состояния. Массив горных пород, вмещающий пласт, моделируется как однородный трансверсально-изотропный массив. Определены критерии правильности решения, установленные путем проверки граничных условий. С целью решения задачи о распределении напряжений в массиве, который моделируется как линейно-деформируемая среда вокруг выработки любой формы поперечного сечения, определен соответствующий вид отображающей функции единичного круга на контур выработки произвольного сечения. Выполнено графическое моделирование алгоритма аналитического расчета напряженно-деформированного состояния геологического массива с выработкой произвольной формы. Представлена программная реализация разработанного алгоритма.*

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, угольный пласт, алгоритм, моделирование, программная реализация.