

## МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ПОВІДОМЛЕННЯ 2. ТЕМПЕРАТУРНІ ДЕФОРМАЦІЇ

Rudakov K., Jakovlev A.  
The National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine ([mmi@kpi.ua](mailto:mmi@kpi.ua))

### MODELLING OF THE LARGE STRAINS. THE MESSAGE 2. THE TEMPERATURE STRAINS

У Повідомленні 1 розглянуто, як ідею мультиплікативного розкладу Лі градієнта пружно-пластичних деформацій Коші-Гріна можна застосувати для узагальненого розкладу на випадок одночасної наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

В даному Повідомленні наведено рішення проблеми відокремлення температурних деформацій від інших, вперше розв'язаної у статтях Р. Стояновича зі співавторами для випадку термопружності. На числовому прикладі показана збіжність такого відокремлення до випадку нескінченно малих деформацій.

З метою отримання фізичних рівнянь стану використано другий закон термодинаміки. Визначені параметри функціоналу, що описує питому вільну енергію деформованої системи.

Також описана схема врахування температурної залежності коефіцієнта температурного подовження, створена на основі геометричної інтерпретації цієї залежності.

Фактично в одному місці зібрані всі відомості про визначення температурних деформацій при моделюванні великих деформацій і при одночасній наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

Ключові слова: великі деформації, мультиплікативний розклад, температурні деформації, коефіцієнт температурного подовження.

#### Вступ

Моделювання значних деформацій матеріалу, які одночасно містять деформації різного типу (температурні, пружні, пластичні, повзучості), є складною проблемою. Такий комплекс деформацій може виникати, зокрема, в околу вершини в'язкої тріщини в аварійних режимах роботи енергетичного агрегату з невиявленою заздалегідь тріщиною.

У Повідомленні 1 [1] розглянуто, яким чином ідею мультиплікативного розкладу Лі [2] градієнта пружно-пластичних деформацій Коші-Гріна можна застосувати для узагальненого розкладу на випадок одночасної наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичних та повзучості. Отримані вирази (52) і (61), в яких виявляється адитивність швидкостей просторових градієнтів вказаних чотирьох типів деформацій. Ці та інші отримані вирази дозволяють виписати фізичні рівняння для моделювання процесу деформування, що розглядається.

**Мета** Повідомлення 2 – навести теоретичні основи визначення температурних деформацій, відокремлення їх від повних деформацій, а також визначення напружень при моделюванні процесу деформування з великими деформаціями різного типу: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

Буде застосовуватися тільки декартова система координат. Матеріал – ізотропний метал.

#### Визначення та відокремлення температурних деформацій

У Повідомленні 1 [1] зазначено, що задача про температурний стан завжди передує задачі про напружено-деформований стан, навіть тоді, коли ці дві задачі (ітеративне) розглядаються як зв'язані. Крім того, в земних умовах ніщо не може завадити реалізації температурних деформацій; вони реалізуються практично миттєво (за декілька циклів коливань атомів); в ізотропному матеріалі описуються рівнянням  $\varepsilon_{ij}^{\theta} = \delta_{ij} \bar{\alpha}_{\theta} (\theta - \theta_0)$ . Тому для задачі про напружено-деформований стан матрицю температурного градієнта  $[X^{\theta}]$  з компонентами ([1], рівняння (4)):

$$(X_{mj})^{\theta} = \partial((r^m)^{(0)} + (u^m)^{\theta}) / \partial a^j = \delta_{mj} + \partial(u^m)^{\theta} / \partial a^j = \delta_{mj} (1 + \bar{\alpha}_{\theta} (\theta - \theta_0)) = \delta_{mj} \mathcal{A}(\theta) \quad (1)$$

можна завжди вважати відомою. Позначена [1, 3 ... 5] функція температури

$$\mathcal{A}(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_{\theta} (\theta - \theta_0). \quad (2)$$

У матричному вигляді (1) запишеться як

$$[X^\theta] = \mathcal{G}(\theta)[I]. \quad (3)$$

З формул (19) і (20) з [1] відповідно:

$$[X^{\text{epc}}] = [X^e][X^p][X^c] = [X][X^\theta]^{-1}; \quad (4)$$

$$J^{\text{epc}} = \det(X_{mk})^e \det(X_{kj})^p \det(X_{jn})^c = J / J^\theta, \quad (5)$$

де позначено

$$J^\theta = \det(X_{nj})^\theta = \mathcal{G}^3(\theta). \quad (6)$$

З (3) маємо, що для ізотропних матеріалів

$$[X^\theta]^{-1} = [I] / \mathcal{G}(\theta), \quad (7)$$

тому з (4)

$$[X^{\text{epc}}] = [X] / \mathcal{G}(\theta). \quad (8)$$

Маємо [1] вирази для окремих типів деформацій (міра Гріна-Лагранжа):

$$[\epsilon^\theta] = 0.5(\mathcal{G}^2(\theta) - 1)[I]; \quad (9)$$

$$[\epsilon^c] = 0.5([X^c]^\top[X^c] - [I]) = 0.5([C^c] - [I]); \quad [\epsilon^p] = 0.5([X^p]^\top[X^p] - [I]) = 0.5([C^p] - [I]); \quad (10)$$

$$[\epsilon^e] = 0.5([X^e]^\top[X^e] - [I]) = 0.5([C^e] - [I]); \quad (11)$$

також введемо вираз для комбінованих деформацій:

$$[\epsilon^{\text{epc}}] = 0.5([X^{\text{epc}}]^\top[X^{\text{epc}}] - [I]) = 0.5([C^{\text{epc}}] - [I]). \quad (12)$$

Підставимо вираз (8) у (12), спочатку отримаємо, що

$$[\epsilon^{\text{epc}}] = 0.5([C] / \mathcal{G}^2(\theta) - [I]). \quad (13)$$

Якщо до правої частини (13) додати вираз  $0.5([I] - [I]) / \mathcal{G}^2(\theta)$  з нульовим значенням, то після приведення подібних отримаємо, що

$$[\epsilon^{\text{epc}}] = (0.5([C] - [I]) - 0.5(\mathcal{G}^2(\theta) - 1)[I]) / \mathcal{G}^2(\theta) = ([\epsilon] - [\epsilon^\theta]) / \mathcal{G}^2(\theta). \quad (14)$$

Цей простий вираз дозволяє відокремити температурну деформацію від всіх інших при будь-яких (великих або малих) рівнях деформацій.

### Другий закон термодинаміки

Другий закон термодинаміки (У. Томсон, він же лорд Кельвін, 1851 р.) для відносно повільних процесів у системі часто записують у вигляді нерівності Клаузіуса-Дюгема [6]:

$$\sigma^{\text{mn}} d_{\text{mn}} - \bar{\rho}(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \frac{q_{\text{m}}}{\theta} \nabla_{\text{m}} \theta \geq 0, \quad (15)$$

де  $\bar{\rho}$  – питома густина середовища;  $\sigma^{\text{mn}}$  – компоненти симетричного тензора напружень Ейлера-Коші;  $\theta$  – температура (абсолютна);  $s$  – питома ентропія;  $q_{\text{m}}$  – компоненти теплового потоку у систему ззовні; величина

$$\psi = e - \theta s \quad (16)$$

є питомою вільною енергією системи (Гельмгольца), а  $e$  – питомою внутрішньою енергією системи.

Компоненти  $\nabla_{\text{m}} \theta$  градієнта температури завжди мають інший знак, ніж  $q_{\text{m}}$ , оскільки тепла енергія розповсюджується від "гарячих" зон матеріалу к "холодним". Якщо задачі теплопровідності та деформування не є зв'язаними, то у (15) приймається, що всі  $q_{\text{m}} = 0$ .

Компоненти  $d_{\text{mn}}$  у (15) є частиною виразу для швидкості деформацій Гріна-Лагранжа  $\dot{\epsilon}_{ij} = d \epsilon_{ij} / dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{d \epsilon_{ij}}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{d(X_{mi} X_{mj} - \delta_{ij})}{dt} = \frac{1}{2} \left( X_{mi} \frac{dX_{mj}}{dt} + \frac{dX_{mi}}{dt} X_{mj} \right) = \frac{1}{2} \left( X_{mi} \frac{d(\nabla_j u^m)}{dt} + \frac{d(\nabla_i u^m)}{dt} X_{mj} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( X_{mi} \frac{\partial \dot{u}^m}{\partial a^j} + \frac{\partial \dot{u}^n}{\partial a^i} X_{nj} \right) = \frac{1}{2} \left( X_{mi} \frac{\partial \dot{u}^m}{\partial r^n} \frac{\partial r^n}{\partial a^j} + \frac{\partial \dot{u}^n}{\partial r^m} \frac{\partial r^m}{\partial a^i} X_{nj} \right) = \frac{1}{2} \left( X_{mi} \frac{\partial \dot{u}^m}{\partial r^n} X_{nj} + \frac{\partial \dot{u}^n}{\partial r^m} X_{mi} X_{nj} \right) = \\ &= X_{mi} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}^m}{\partial r^n} + \frac{\partial \dot{u}^n}{\partial r^m} \right) X_{nj} = X_{mi} d_{\text{mn}} X_{nj}; \quad [\dot{\epsilon}] = [X]^\top [d] [X]. \end{aligned} \quad (17)$$

Використовувалася властивість симетрії тензора  $d_{\text{mn}}$ , а також змінювалися так звані "німі" індекси в другій складовій виразу. Отже, симетричний "тензор швидкості деформації" має компоненти

$$d_{\text{mn}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}^m}{\partial r^n} + \frac{\partial \dot{u}^n}{\partial r^m} \right). \quad (18)$$

До речі, перетворення типу  $[\bullet] = [X]^T [\circ] [X]$ , де матриці  $[\bullet]$  та  $[\circ]$  містять коваріантні компоненти тензорів, називають "pull-backs"-перетвореннями.

Згідно з аксіомою локального стану системи, термостатичний стан системи повністю визначається набором з  $(n+1)$  параметрів  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$ , тобто всі термостатичні величини залежать від них [6]:  $\psi = \psi(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ ,  $e = e(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ , ...,  $\zeta = \zeta(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ . Якщо прийняти, що  $\chi_0 = \theta$  та застосувати питому вільну енергією системи  $\psi = \psi(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n)$ , то з (16) повний диференціал від потенціалу  $\psi = \psi(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n)$ :

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \chi_1} d\chi_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \chi_n} d\chi_n = -s d\theta + \eta_1 d\chi_1 + \dots + \eta_n d\chi_n = -s d\theta + \sum_{k=1}^n \eta_k d\chi_k, \quad (19)$$

де враховано, що згідно з (16)  $\partial \psi / \partial \theta = -s$ , а також позначені похідні  $\eta_k = \partial \psi(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n) / \partial \chi_k$ , які називають рівняннями стану [6], причому вони є пов'язаними між собою (не є незалежними), оскільки належать повному диференціалу (19), а також вони залежать від тих же параметрів, що й  $\psi$ , тобто  $\eta_k = \eta_k(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n)$ . З (19) одержимо дисипацію питомої вільної енергії системи:

$$\dot{\psi} = -s\dot{\theta} + \bar{\omega}, \quad (20)$$

де позначено отриману системою питому потужність  $\bar{\omega} = \sum_{k=1}^n \eta_k \dot{\chi}_k$ . Підставимо (20) у ліву частину (15), отримаємо другий закон термодинаміки (для відносно повільних процесів у системі), записаний в іншому вигляді нерівності Клаузіуса-Дюгема:

$$(\sigma^{mn} d_{mn} - \bar{\rho} \bar{\omega}) - \frac{q_m}{\theta} \nabla_m \theta \geq 0. \quad (21)$$

Узагальнюючи вираз (21), його ліву частину представляють як суму добутків одних фізичних параметрів зі швидкостями інших (ці добутки називають дисипативними функціями  $\Phi_\alpha$  [6]), тобто як

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^m \Phi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^m y_\alpha z_\alpha \geq 0. \quad (22)$$

Дійсно, у (21), як  $y_\alpha$  виступають компоненти тензора напружень  $\sigma^{mn}$ , величини  $\bar{\rho} \eta_k$  та  $1/\theta$ , а як  $z_\alpha$  – компоненти тензора деформації швидкості  $d_{mn}$ , величини  $d\chi_k / dt$  та  $q_m \nabla_m \theta$ .

Повертаючись до нерівності Клаузіуса-Дюгема (21), маємо:

$$\Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \bar{\rho} \bar{\omega}; \quad \Phi_2 = -\frac{q_m}{\theta} \nabla_m \theta; \quad \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi \geq 0, \quad (23)$$

де  $\Phi_1$  називають власною об'ємною дисипацією;  $\Phi_2$  – об'ємною тепловою дисипацією.

Перший вираз (23) з урахуванням (20)

$$\Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \bar{\rho}(\dot{\psi} + s\dot{\theta}). \quad (24)$$

Виконання нерівності Клаузіуса-Дюгема  $\Phi \geq 0$  дає лише гарантію допустимості процесів, що моделюються [6]. Записаних рівнянь для визначення всіх параметрів недостатньо. Необхідно конкретизувати дисипативні функції  $\Phi_\alpha$ . Додатково відзначимо, що потрібно виконувати ще один принцип – принцип незалежності від системи відліку. Щодо дисипативної функції  $\Phi_\alpha$  (а варіантів функції  $\Phi_\alpha$  можна сформулювати безліч), то, згідно з методом локального стану, її властивості обмежують таким набором: безперервна, опукла, невід'ємна, квазіоднорідна, дорівнює нулю при  $z_\alpha = 0$ . Така функція описує так званий нормальний механізм дисипації [6].

Вираз  $\sum_{\alpha=1}^m y_\alpha z_\alpha$  з (22) можна трактувати як скалярний добуток двох векторів  $\vec{Y}$  та  $\vec{Z}$  з компонентами  $y_\alpha$

та  $z_\alpha$  відповідно, причому вектор  $\vec{Z}$  є координатним та вказує на деяку точку поверхні  $\Phi$ , а вектор  $\vec{Y}$  є вектором цього же простору. У цьому просторі формулюється аксіома про ортогональність: будь-який вектор  $\vec{Y}$ , що відповідає точці поверхні  $\Phi$ , на яку вказує вектор  $\vec{Z}$ , є ортогональним до цієї поверхні та направлений назовні від поверхні. Опуклість гарантує виконання умови  $\Phi \geq 0$ , а ортогональність є наслідком квазіоднорідності дисипативної функції  $\Phi$ . Якщо дисипативна функція  $\Phi$  є квадратичною нормою  $\vec{Z}$ , то такий випадок називають додатковим законом термодинаміки необоротних процесів Онзагера. Якщо одна дисипативна функція  $\Phi_\alpha$  практично не залежить від параметрів іншої функції  $\Phi_\beta$ , та навпаки, то такі дисипативні функції вважаються не зв'язаними [6].

**Визначення напружень**

Будемо вважати, що [6]:

- $\epsilon$  така вихідна конфігурація, що в будь-який наступний момент часу компоненти  $\epsilon_{ij}$  тензора деформацій Гріна-Лагранжа, а також температура  $\theta$ , створюють замкнену систему термодинамічних змінних;
- термодинамічні властивості можна описати питомою вільною енергією;
- вихідні напруження відсутні, а вихідна температура дорівнює  $\theta_0$ .

При наявності чотирьох типів деформацій (температурних, пружних, пластичності та повзучості) питому вільну енергію системи  $\psi$ , наслідуючи ідеї статей [3, 4, 7], можна записати у вигляді:

$$\psi = \psi^e(\theta, \epsilon_{ij}^e) + \psi^{pc}(\theta, \xi_{ij}, \zeta, \varsigma) + \psi^\theta(\theta), \quad (25)$$

тобто прийняти, що параметрами  $\chi_k$ ,  $k = 1, \dots, 20$  питомої вільної енергії  $\psi$  є, зокрема, 9 компонент  $\epsilon_{ij}^e$  тензора пружних деформацій, які фігурують в матриці  $[\epsilon^e]$ , а зміст інших 11 параметрів  $\xi_{ij}, \zeta, \varsigma$  виявимо в Повідомленні 4. Тоді, позначаючи зверху точкою часові похідні, маємо для (24), що

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} \dot{\epsilon}_{mn}^e + \frac{\partial \psi^{pc}}{\partial \xi_{mn}} \dot{\xi}_{mn} + \frac{\partial \psi^{pc}}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial \psi^{pc}}{\partial \varsigma} \dot{\varsigma} + \left( \frac{\partial \psi^e}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi^{pc}}{\partial \theta} + \frac{d\psi^\theta}{d\theta} \right) \dot{\theta}. \quad (26)$$

Оскільки тензор деформацій  $\epsilon_{mn}^e$  є симетричним, то, без зменшення загальності, тензор з компонентами  $p^{mn} = \partial \psi^e / \partial \epsilon_{mn}^e$  можна теж вважати симетричним тензором. Фізичний зміст цього тензора відомий: це тензор напружень.

**Визначення напружень при відсутності необоротних деформацій**

Для подальшого використання (26) потрібно мати вираз  $\dot{\epsilon}_{mn}^e$ . Випадок присутності всіх чотирьох типів деформацій, як складний, розглянемо у Повідомленні 4, а тут візьмемо спрощений, коли відсутні необоротні деформації, тобто при  $[\epsilon^p] = [\epsilon^c] = [0]$  і, згідно з (10), матриці  $[X^p] = [X^c] = [I]$ , а формула (14) перетворюється на  $[\epsilon^e] = ([\epsilon] - [\epsilon^\theta]) / \mathcal{G}^2(\theta)$ . У цей вираз спочатку підставимо формулу (9), яка в індексній формі запису має вигляд:  $\epsilon_{mn}^\theta = 0.5(\mathcal{G}^2(\theta) - 1)\delta_{mn}$ . Отримаємо, що  $\delta_{mn} + 2\epsilon_{mn}^e = (\delta_{mn} + 2\epsilon_{mn}) / \mathcal{G}^2(\theta)$ . Звідсіля часова похідна

$$\dot{\epsilon}_{mn}^e = (\dot{\epsilon}_{mn} - \beta(\theta) \cdot (\delta_{mn} + 2\epsilon_{mn}) \dot{\theta}) / \mathcal{G}^2(\theta), \quad (27)$$

де позначена функція температури

$$\beta(\theta) = \frac{1}{\mathcal{G}(\theta)} \frac{d\mathcal{G}(\theta)}{d\theta}. \quad (28)$$

Нагадаємо, що вираз для  $\mathcal{G}(\theta)$  дано формулою (2):  $\mathcal{G}(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0)$ .

Для (27) врахуємо, що  $\dot{\epsilon}_{mn} = X_{im} d_{ij} X_{jn}$ , де, згідно з (18), симетричний тензор деформації швидкості  $d_{ij} = (\partial \dot{u}^i / \partial r^j + \partial \dot{u}^j / \partial r^i) / 2$ . Тоді

$$\dot{\epsilon}_{mn}^e = (X_{im} d_{ij} X_{jn} - \beta(\theta) \cdot (\delta_{mn} + 2\epsilon_{mn}) \dot{\theta}) / \mathcal{G}^2. \quad (29)$$

Підставимо (29) у вираз (26), який при відсутності необоротних деформацій змінюється на

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn} - \left( \frac{\beta(\theta)}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} (\delta_{mn} + 2\epsilon_{mn}) - \frac{\partial \psi^e}{\partial \theta} - \frac{d\psi^\theta}{d\theta} \right) \dot{\theta}. \quad (30)$$

Тепер отримана питома потужність  $\bar{\omega} = \sum_{k=1}^n \eta_k \dot{\chi}_k$  та ентропія  $s$  для виразу  $\dot{\psi} = \bar{\omega} - s\dot{\theta}$  [6], записуються як

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn}; \quad s = \frac{\beta(\theta)}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} (\delta_{mn} + 2\epsilon_{mn}) - \frac{\partial \psi^e}{\partial \theta} - \frac{d\psi^\theta}{d\theta}. \quad (31)$$

Далі потрібно задовольнити нерівність Клаузіуса-Дюгема (23) [3 ... 6]. Для неї за дисипативну функцію  $\Phi_1$  отримали вираз

$$\Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \bar{\rho} \frac{1}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn} = \left( \sigma^{mn} - \bar{\rho} \frac{1}{\mathcal{G}^2} X_{mi} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} X_{nj} \right) d_{mn}, \quad (32)$$

який для оборотних (тобто термопружних) процесів дорівнює нулю при будь-яких значеннях  $d_{mn}$ , оскільки для них ентропія  $s$  (див. другий вираз у (31)) дорівнює нулю. Тому з (32) маємо право записати, що компоненти тензора напружень Ейлера-Коші

$$\sigma^{mn} = \bar{\rho} \frac{1}{g^2} X_{mi} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} X_{nj} \quad (33)$$

Відповідно до співвідношень між компонентами тензора напружень Ейлера-Коші  $\sigma^{mn}$  та другого тензора Піола-Кірхгофа  $(\sigma^{ij})_0$  [6], з (33) маємо, що  $J\sigma^{mn} = X_{mi}(\sigma^{ij})_0 X_{nj} = J\bar{\rho} \frac{1}{g^2} X_{mi} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} X_{nj}$ ; а також, після звільнення від однакових градієнтів та врахування, що  $J\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$ :

$$\bar{\rho}_0 \frac{1}{g^2} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} = (\sigma^{ij})_0 \quad (34)$$

Наслідуючи ідею статей [3, 4], можна ввести такі величини:

$$\bar{\rho}^\theta = \bar{\rho}_0 / J^\theta = J^e \bar{\rho}; \quad (\sigma^{ij})_0^e = \bar{\rho}^\theta \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{ij}^e}, \quad (35)$$

тоді з (34) та (35)

$$(\sigma^{mn})_0 = \mathcal{G}(\theta)(\sigma^{mn})_0^e \quad (36)$$

Вважається, що початкові значення приведених густин  $\bar{\rho}_0^\theta = \bar{\rho}_0^e = \bar{\rho}_0$ , оскільки  $J_0^\theta = J_0^e \equiv 1$ .

Згідно з (5) при відсутності необоротних деформацій  $J = J^e J^\theta$ , причому величина  $J^\theta$  відповідає (6).

Компоненти  $(\sigma^{ij})_0^e$  є компонентами приведенного "пружного" другого тензора напружень Піола-Кірхгофа.

Щодо виразу для  $\psi^\theta(\theta)$ , то його можна обрати у вигляді квадратичного функціонала від  $(\theta - \theta_0)$ , а саме, як  $\psi^\theta(\theta) = -0.5A \cdot (\theta - \theta_0)^2$ , де  $A$  визначається на основі експериментальних результатів [3 ... 5], а також з використанням формули (31), у яку потрібно підставити необхідні похідні  $\partial \psi^e / \partial \epsilon_{mn}^e$ ,  $\partial \psi^e / \partial \theta$  та  $d\psi^\theta / d\theta$  від прийнятих виразів  $\psi^e$  та  $\psi^\theta$ . Докладні відомості про це є у статті [5].

### Фізичні рівняння для ізотропних металів при відсутності необоротних деформацій

Для ізотропних металів звичайно припускають, що  $\psi^e$  є квадратичним функціоналом від пружних деформацій, тобто

$$\bar{\rho}^\theta \psi^e = 0.5\lambda (3 \epsilon_v^e)^2 + G \epsilon_{mn}^e \epsilon_{mn}^e, \quad (37)$$

де  $\lambda = \mu E / [(1-2\mu)(1+\mu)] = 2G\mu / (1-2\mu)$  та  $G = E / [2(1+\mu)]$  є параметрами Ламе, значення яких залежать від температури ( $E = E(\theta)$  – модуль Юнга;  $\mu = \mu(\theta)$  – коефіцієнт Пуассона);  $\epsilon_v^e = (\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e) / 3$  є середньою пружною деформацією. З (35) та (37) отримаємо закон Гука, який діє в проміжній конфігурації:

$$(\sigma^{mn})_0^e = \lambda \delta^{mn} (3 \epsilon_v^e) + 2G \delta^{mnij} \epsilon_{ij}^e = E^{mnij} \epsilon_{ij}^e, \quad (38)$$

причому в (38) позначено (декартова система координат)

$$E^{mnij} = \lambda \underline{\delta}^{mnij} + 2G \underline{\underline{\delta}}^{mnij}; \quad \underline{\delta}^{mnij} = \delta^{mn} \delta^{ij}; \quad \underline{\underline{\delta}}^{mnij} = (\delta^{mi} \delta^{nj} + \delta^{mj} \delta^{ni}) / 2. \quad (39)$$

Формула (36) дозволяє отримати  $(\sigma^{mn})_0$ :

$$(\sigma^{mn})_0 = \mathcal{G}(\theta) E^{mnij} \epsilon_{ij}^e \quad (40)$$

Якщо в (40) підставити формулу (14) з урахуванням (9) при відсутності необоротних деформацій, а також (39), то буде отримано вираз  $(\sigma^{mn})_0$  через повні деформації  $\epsilon_{ij}$  та функцію  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} (\sigma^{mn})_0 &= \mathcal{G} E^{mnij} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^\theta) / \mathcal{G}^2 = E^{mnij} (\epsilon_{ij} - 0.5(\mathcal{G}^2 - 1)\delta_{ij}) / \mathcal{G} = \\ &= E^{mnij} \epsilon_{ij} - 0.5(\mathcal{G} - 1 / \mathcal{G})(\lambda \underline{\delta}^{mnij} + 2G \underline{\underline{\delta}}^{mnij}) \delta_{ij} = E^{mnij} \epsilon_{ij} - 0.5(\mathcal{G} - 1 / \mathcal{G}) 3k \delta^{mn}, \end{aligned} \quad (41)$$

де позначено модуль об'ємного стискування  $3k = E(\theta) / (1 - 2\mu(\theta)) = 3k(\theta)$ .

При зменшенні значень температурних деформацій функція  $0.5(\mathcal{G} - 1 / \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{G} - 1)$ , тому температурна складова рівняння (41) наближується до відомого рівняння Дюгамеля-Неймана [6], причому майже лінійно. Наприклад, при  $\bar{\alpha}_\theta = 0.00001$  та  $\theta - \theta_0 = 10000$  маємо погрішність у 4.8%; при  $\theta - \theta_0 = 100$  у 0.05%; при  $\theta - \theta_0 = 10$  у 0.005%, а при  $\theta - \theta_0 = 1$  вже у 0.0005%.

**Про врахування температурної залежності коефіцієнта температурного подовження**

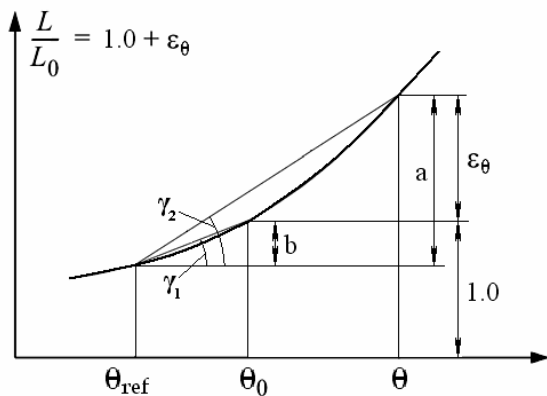
Вираз (9) для обчислення  $[\epsilon^\theta]$ , а саме  $[\epsilon^\theta] = 0.5(\mathcal{D}^2(\theta) - 1)[I]$ , при відсутності залежності  $\alpha_\theta$  від температури, з точністю до  $(\alpha_\theta(\theta - \theta_0))^2 / 2$  співпадає з формулою Дюгамеля-Неймана [6]:

$$\epsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \alpha_\theta (\theta - \theta_0). \quad (42)$$

Якщо температурні деформації є малими, то величиною другого порядку малості  $(\alpha_\theta(\theta - \theta_0))^2 / 2$  можна знехтувати й користуватися формулою (42) замість формули (9).

Для багатьох матеріалів виявилося, що в різних температурних діапазонах значення коефіцієнта температурного подовження  $\alpha_\theta$  є різними. Щоб не змінювати звичний запис формули для обчислень  $\epsilon_{ij}^\theta$ , замість  $\alpha_\theta$  вводять  $\bar{\alpha}_\theta(\theta)$ . На жаль, в літературі можна знайти декілька варіантів обчислення  $\bar{\alpha}_\theta(\theta)$ , не всі з яких є вірними або повністю поясненими.

Температуру визначають як загальну для будь-якої кількості систем (тіл) змінну стану, яка характеризує взаємну енергетичну рівновагу цих систем. З погляду фізики, температура відображає кінетичну енергію атомів. Повна механічна енергія атомів представлена, фактично, тільки кінетичною енергією. Це постулат статистична теорія Л. Больцмана (L. Boltzmann, 1844-1906 pp.), визнана у всьому світі. Оскільки частота коливань атомів практично незмінна, то температуру пов'язують прямою залежністю з амплітудою коливань атомів. Але чим більше ця амплітуда, тим більше середня (рівноважна) відстань між атомами. На макрорівні це реалізується в зміні розмірів тіла – в температурній деформації. Оскільки атоми мають дуже високу частоту коливань і досить малу масу, то інерційність атомів украй мала, а пам'ять атомів якщо і є, то надзвичайно коротка з погляду макропроцесів. Для реалізації температурної деформації не потрібні ніякі інші механізми, як, наприклад, утворення, розмноження й рух дислокацій, міграція атомів в атомних структурах і інші подібні процеси, які зазвичай розтягнуті у часі. Тому, з погляду механіки суцільних середовищ, температурну деформацію можна вважати миттєвою, тобто такою, що має миттєво зникаючу пам'ять.

**До отримання формули для  $\bar{\alpha}_\theta(\theta)$** 

температурного подовження  $\alpha_\theta$  від температури, докладно описаний у розділі 3.1.6. книги [8] з Help програмного комплексу Femap 10.2., яка для багатьох не є доступною.

Розглянемо одновимірну ситуацію (див. рисунок). Спочатку, згідно з рисунком, визначимося, що температурна деформація  $\epsilon_\theta = a - b$ .

Якщо прийняти, що

$$\text{tg}(\gamma_1) = \alpha_\theta(\theta_0); \quad \text{tg}(\gamma_2) = \alpha_\theta(\theta), \quad (43)$$

то величини, позначені на рисунку

$$a = \text{tg}(\gamma_2) \cdot (\theta - \theta_{\text{ref}}) = \alpha_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_{\text{ref}}); \quad b = \text{tg}(\gamma_1) \cdot (\theta_0 - \theta_{\text{ref}}) = \alpha_\theta(\theta_0) \cdot (\theta_0 - \theta_{\text{ref}}). \quad (44)$$

Тоді компоненти тензора температурних деформацій

$$\epsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} [\alpha_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_{\text{ref}}) - \alpha_\theta(\theta_0) \cdot (\theta_0 - \theta_{\text{ref}})], \quad (45)$$

де  $\theta_{\text{ref}}$  – температура випробування матеріалу, або

$$\epsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \bar{\alpha}_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_0), \quad (46)$$

де позначено

$$\bar{\alpha}_\theta(\theta) = [\alpha_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_{\text{ref}}) - \alpha_\theta(\theta_0) \cdot (\theta_0 - \theta_{\text{ref}})] / (\theta - \theta_0). \quad (47)$$

Важливо: застосування формули (47) при  $\theta \approx \theta_0$  може викликати небажано велику погрішність обчислення  $\bar{\alpha}_\theta(\theta)$ , тому при обчисленнях малих термічних деформацій доцільно користуватися формулою (45), а формулу (46) використовувати лише для теоретичних викладок.

Поточні значення  $\alpha_\theta(\theta)$  обчислюються як

$$\alpha_\theta(\theta) = \alpha_\theta(\theta_{\text{ref}}) \cdot F(\theta), \quad (48)$$

де  $F(\theta)$  є відповідною функцією масштабу, причому  $F(\theta_{\text{ref}}) \equiv 1$ . Якщо в тілі є декілька матеріалів, буде потрібно декілька таких функцій.

Якщо величина  $\theta_{\text{ref}} = \theta_0$ , то з (47)  $\bar{\alpha}_\theta = \alpha_\theta(\theta)$ , а деформації

$$\varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} \alpha_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_0) = \delta_{ij} \alpha_\theta(\theta_{\text{ref}}) \cdot F(\theta) \cdot (\theta - \theta_0). \quad (49)$$

Якщо  $\theta_{\text{ref}} = 0$ , то з (45)

$$\varepsilon_{ij}^\theta = \delta_{ij} [\alpha_\theta(\theta) \cdot \theta - \alpha_\theta(\theta_0) \cdot \theta_0] = \delta_{ij} \alpha_\theta(\theta_{\text{ref}}) \cdot [F(\theta) \cdot \theta - F(\theta_0) \cdot \theta_0]. \quad (50)$$

Уведений у такий спосіб (див. формули (43) ... (47)) коефіцієнт  $\bar{\alpha}_\theta(\theta)$  називають "січним для температурного діапазону значенням  $\alpha_\theta - \text{SCTE}$ " [8].

Якщо температурні деформації – значні, то використовується формула (9), для якої вираз (2) з урахуванням (47) прийме вигляд

$$\mathcal{A}(\theta) = 1 + \alpha_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_{\text{ref}}) - \alpha_\theta(\theta_0) \cdot (\theta_0 - \theta_{\text{ref}}), \quad (51)$$

де  $\alpha_\theta(\theta)$  визначається формулою (48). Якщо величина  $\theta_{\text{ref}} = \theta_0$ , то з (51)

$$\mathcal{A}(\theta) = 1 + \alpha_\theta(\theta) \cdot (\theta - \theta_0). \quad (52)$$

Важливо: формули (45), (47), (49) ... (52) є вірними за умови, що табличні значення  $\alpha_\theta(\theta)$  відповідають формулам (43).

### Приклад

Розглянемо температурну та пружну деформацію елементарного об'єму матеріалу (див. таблицю). У випадку 1 матриця  $[X]$  має компоненти великих деформацій, а  $[X^\theta]$  відповідає досить великому температурному градієнту (біля  $1000^\circ$ ). У випадках 2 та 3 градієнти зменшені на один та два порядки відповідно (для наближення до малих). Всі матриці симетричні (Sym), тобто жорсткі повороти елемента матеріалу відсутні. Для визначення компонент  $[\varepsilon]$  використовували рівняння Коші (малі деформації), для  $[\varepsilon^\theta]$  – формулу (42), а для  $[\varepsilon^e]$  – принцип суперпозиції, тобто  $[\varepsilon^e] = [\varepsilon] - [\varepsilon^\theta]$ . Матриця  $[\delta \in]$  містить компоненти відносних погрішностей обчислення повних деформацій, коли вони вважаються малими.

Як свідчать дані таблиці, відносні погрішності обчислення повних деформацій досягали декількох десятків відсотків для дійсно великих деформацій, і одиниць відсотків (неочікуване великі відсотки!) – при наближенні до малих деформацій. Лише при подальшому зменшенні деформацій відносні погрішності будуть наближуватися до нульових значень.

### Висновки

З наведених результатів випливає, що:

- у випадку наявності значних деформацій та/або поворотів елемента матеріалу тіла, температурні деформації можна простою залежністю точно відокремити від інших типів деформацій (пружних, пластичності, повзучості тощо);
- температурні деформації не заважають у застосуванні класичного закону Гука для отримання компонентів другого тензора приведених "пружних" напружень Піола-Кірхгофа, які пов'язані з компонентами другого тензора Піола-Кірхгофа у простий спосіб: шляхом масштабування останніх на єдину величину  $1/\mathcal{A}(\theta)$  відповідно до виразу (36);
- коректні вирази для врахування температурної залежності коефіцієнта температурного подовження можна створити на основі геометричної інтерпретації цієї залежності, тобто без введення суперечливих з фізичної точки зору інтегралів по температурі, які, фактично, вводять властивість пам'яті для опису процесів, які насправді реалізуються практично миттєво.

Температурні та пружні деформації елементарного об'єму матеріалу

	Випадок 1	Випадок 2	Випадок 3
[X]	$\begin{bmatrix} 1.3 & 0.4 & 0.5 \\ & 1.2 & -0.2 \\ \text{Sym} & & 1.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.03 & 0.04 & 0.05 \\ & 1.02 & -0.02 \\ \text{Sym} & & 1.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.003 & 0.004 & 0.005 \\ & 1.002 & -0.002 \\ \text{Sym} & & 1.001 \end{bmatrix}$
[X <sup>θ</sup> ]	$\begin{bmatrix} 1.01 & 0 & 0 \\ & 1.01 & 0 \\ \text{Sym} & & 1.01 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.001 & 0 & 0 \\ & 1.001 & 0 \\ \text{Sym} & & 1.001 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.0001 & 0 & 0 \\ & 1.0001 & 0 \\ \text{Sym} & & 1.0001 \end{bmatrix}$
[X <sup>ε</sup> ]	$\begin{bmatrix} 1.28713 & 0.39604 & 0.49505 \\ & 1.18812 & -0.19802 \\ \text{Sym} & & 1.08911 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.02897 & 0.039960 & 0.049950 \\ & 1.018981 & -0.01998 \\ \text{Sym} & & 1.008991 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00290 & 3.9996e-3 & 4.9995e-3 \\ & 1.00190 & -1.9998e-3 \\ \text{Sym} & & 1.00090 \end{bmatrix}$
[ε]	$\begin{bmatrix} 5.5 & 4.5 & 5.6 \\ & 3.2 & -1.3 \\ \text{Sym} & & 2.5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}$	$\begin{bmatrix} 3.25 & 4.05 & 5.06 \\ & 2.12 & -1.93 \\ \text{Sym} & & 1.15 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 3.025 & 4.005 & 5.006 \\ & 2.012 & -1.993 \\ \text{Sym} & & 1.015 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$
[ε <sup>θ</sup> ]	$\begin{bmatrix} 1.005 & 0 & 0 \\ & 1.005 & 0 \\ \text{Sym} & & 1.005 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 1.0005 & 0 & 0 \\ & 1.0005 & 0 \\ \text{Sym} & & 1.0005 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 1.00005 & 0 & 0 \\ & 1.00005 & 0 \\ \text{Sym} & & 1.00005 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$
[ε <sup>ε</sup> ]	$\begin{bmatrix} 5.2931 & 4.4113 & 5.4897 \\ & 3.0384 & -1.2744 \\ \text{Sym} & & 2.3522 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}$	$\begin{bmatrix} 3.14366 & 4.04191 & 5.04989 \\ & 1.9116 & -1.9262 \\ \text{Sym} & & 1.01048 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 2.9244 & 4.0042 & 5.0050 \\ & 1.9116 & -1.9926 \\ \text{Sym} & & 0.91481 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$
[ε]	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 2 & -2 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 2 & -2 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ & 2 & -2 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$
[ε <sup>θ</sup> ]	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$
[ε <sup>ε</sup> ]	$\begin{bmatrix} 2.9 & 4 & 5 \\ & 1.9 & -2 \\ \text{Sym} & & 0.9 \end{bmatrix} \cdot 10^{-1}$	$\begin{bmatrix} 2.9 & 4 & 5 \\ & 1.9 & -2 \\ \text{Sym} & & 0.9 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 2.9 & 4 & 5 \\ & 1.9 & -2 \\ \text{Sym} & & 0.9 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$
[δ ε]	$\begin{bmatrix} 45.5 & 11.1 & 10.7 \\ & 37.5 & -53.8 \\ \text{Sym} & & 60.0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 7.69 & 1.23 & 1.19 \\ & 5.66 & -3.63 \\ \text{Sym} & & 13.04 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$	$\begin{bmatrix} 0.826 & 0.125 & 0.120 \\ & 0.596 & -0.351 \\ \text{Sym} & & 1.478 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$

**Аннотация.** В Сообщении 1 было рассмотрено, каким образом идею мультипликативного разложения Ли градиента упруго-пластичных деформаций Коши-Грина можно применить для обобщенного разложения на случай одновременного присутствия четырех типов деформаций: температурных, упругих, пластичных и ползучести.

В данном Сообщении приведено решение проблемы отделения температурных деформаций от других, впервые решенной в статьях Р. Стояновича с соавторами для случая термоупругости. На численном примере показана сходимость такого отделения к случаю бесконечно малых деформаций.

С целью получения физических уравнений состояния использован второй закон термодинамики. Определены параметры функционала, описывающего удельную свободную энергию деформируемой системы.

Также описана схема учета температурной зависимости коэффициента температурного удлинения, созданная на основе геометрической интерпретации этой зависимости.

Фактически в одном месте собраны все сведения об определении температурных деформаций при моделировании больших деформаций и при одновременном наличии четырех типов деформаций: температурных, упругих, пластичности и ползучести.

**Ключевые слова:** большие деформации, мультипликативное разложение, температурные деформации, коэффициент температурного удлинения.



**Abstract.** In the notice 1 it has been considered, whether how the idea of Lee's multiplicative breaking-up of a gradient of elastic and plastic strains of Cauchy-Green can be used in the generalized breaking-up in case of simultaneous presence of four types of strains: temperature, elastic, plastic and creeping.

In the given notice there have been shown the solutions of a problem of extract of temperature strains from the others, for the first time solved in R. Stojanović's papers with co-authors for a thermo elasticity case. On a numerical example the convergence of such separation to a case of infinitesimal strains is displayed.

For the purpose of creation of the physical equations of a condition the second law of thermodynamics is used. Parametres of a functional which describes specific free energy of deformable system are defined.

Also the circuit of the account of temperature dependence of the factor of the temperature elongation, created on the basis of geometrical interpretation of this dependence is described.

Actually in one place all data on definition of temperature deformations are collected at modelling of the large deformations and at simultaneous presence of four types of deformations: thermal, elastic, plasticity and creep.

**Keywords:** large strains, multiplicate decomposition, temperature strains, factor of the temperature elongation.

1. Рудаков К.М., Добронравов О.А. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 1. Мультиплікативний розклад при наявності чотирьох типів деформацій // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2012. – № 64. – С.7-12.
2. Lee E.H. Elastic-plastic deformations at finite strains // J. Appl. Mech. (ASME), 1969. – 36. – P. 1-6.
3. Stojanović R., Djurić S., Vujošević L. On finite thermal Deformations // Arch. Mech. Stosow, 1964. – 16. – P. 103-108.
4. Vujošević L., Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theor. Appl. Mech. Enging, 2002. – 28-29. – P. 379-399.
5. Lubarda V.A. Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics // Appl. Mech. Rev., 2004. – 57. – N2. – P. 95-108.
6. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с фр. В.В. Федуллова. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.
7. Montáns F.J., Bathe K-J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin // Int. J. Num. Meth. Enging, 2005. – 63. – P. 159-196.
8. NX Nastran 7.1. Advanced Nonlinear Theory and Modeling Guide. 2010 Siemens Product Lifecycle Management Software Inc. (електронна версія).

#### REFERENCES

1. Rudakov K.M., Dobronravov O.A. Modeljvannja velykyh deformacij. Povidomlennja 1. Multyplikatyvnyj rozklad pry najavnosti chotyroh typiv deformacij [Modelling of the large strains. The message 1. Multiplicate decomposition in the presence of four types of strains] Journal of Mechanical Engineering of NTUU «KPI», 2012. no 64. pp. 7-12.
2. Lee E.H. Elastic-plastic deformations at finite strains. J. Appl. Mech. (ASME), 1969. 36. pp. 1-6.
3. Stojanović R., Djurić S., Vujošević L. On finite thermal Deformations. Arch. Mech. Stosow, 1964. 16. pp. 103-108.
4. Vujošević L., Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient. Theor. Appl. Mech. Enging, 2002. 28-29. pp. 379-399.
5. Lubarda V.A. Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. Appl. Mech. Rev., 2004. 57. no 2. pp. 95-108.
6. Germain P. Kurs mehaniki sploshnyh sred. Obwaja teorija [Course of mechanics of continuous environments. General theory] Moskow: Vyssh. shk., 1983. 399 p.
7. Montáns F.J., Bathe K-J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin. Int. J. Num. Meth. Enging, 2005. 63. pp. 159-196.
8. NX Nastran 7.1. Advanced Nonlinear Theory and Modeling Guide. 2010 Siemens Product Lifecycle Management Software Inc. (elektronna versija).