

УДК 535.42

## МЕТОД ПРОЕКТУВАННЯ ФАЗОВИХ ДИФРАКЦІЙНИХ ГРАТОК

*Коваль С. Т., Колобродов В. Г., Кучугура І. О.*

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
м. Київ, Україна*

*Запропоновано аналітичний метод проектування фазових дифракційних ґраток на прикладі ґратки із заданим коефіцієнтом пропускання. Задачам формування зображень із заданим розподілом інтенсивності присвячено багато робіт, але в них не досліджується вплив глибини фазової модуляції на розподіл інтенсивності.*

*У статті показано, що змінюючи глибину фазової модуляції, можна керувати розподілом вхідної енергії в заданій площині спостереження, а також дифракційною ефективністю ґратки.*

**Ключові слова:** *дифракційна ґратка, дифракційна ефективність, глибина фазової модуляції.*

### **Вступ**

Для вирішення багатьох задач науки і техніки необхідно сфокусувати випромінювання в складну область простору, тобто сформувати заданий розподіл інтенсивності вздовж певної кривої, чи в заданій області простору. Дифракційна ґратка – це оптичний прилад, який є періодичною структурою з великою кількістю регулярно розташованих елементів, на яких відбувається дифракція світла. Підбираючи профіль ґратки, можна сконцентрувати енергію в спектрі того чи іншого порядку. Задачі формування зображень із заданим розподілом інтенсивності знайшли своє відображення в багатьох роботах, зокрема [1-2], проте в них немає дослідження впливу глибини фазової модуляції на розподіл інтенсивності. Аналітичними методами можна розраховувати характеристики дифракційних ґраток, не користуючись комп'ютерними програмами, які вимагають проведення складних інженерних розрахунків. У даній статті розглядається проектування фазових дифракційних ґраток на прикладі заданого комплексного коефіцієнту пропускання.

### **Постановка задачі**

Метою даної статті є розробка метода проектування фазових дифракційних ґраток із заданим коефіцієнтом пропускання, який дасть можливість визначити оптичні характеристики таких ґраток.

Нехай на ґратку нормально падає монохроматична хвиля з довжиною  $\lambda$ . З ґраткою зв'яжемо прямокутну систему координат  $xu$ , а з площиною спостереження –  $x_0y_0$  (рис. 1). Причому площина спостереження паралельна площині ґратки і знаходиться на відстані  $z$  від неї.

З урахуванням наближення Фраунгофера амплітуда поля в точці  $P_0$  визначається рівнянням [3]

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y)\right] dx dy, \quad (1)$$

де  $V(x, y)$  – амплітуда поля за ґраткою.

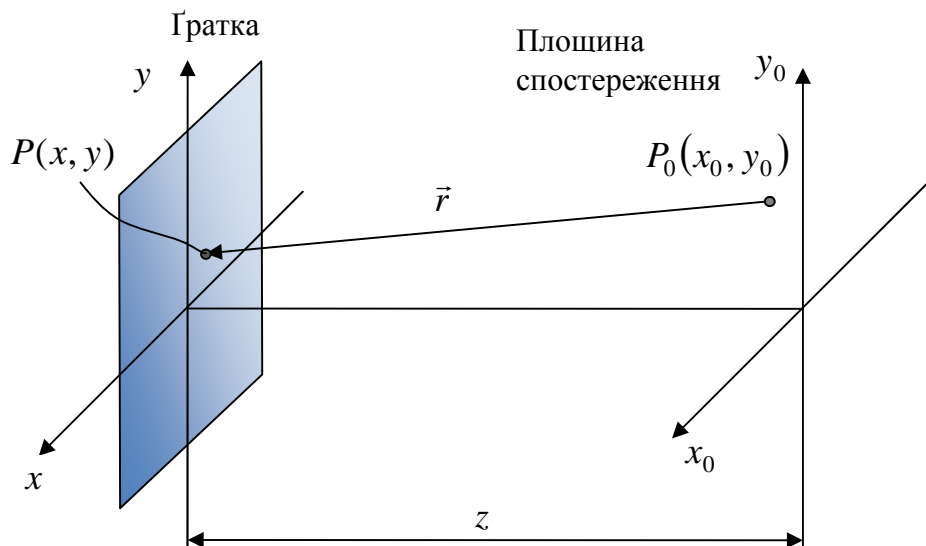


Рис. 1. Схема дифракції Фраунгофера

Розподіл інтенсивності у площині спостереження  $I(x_0, y_0)$  отримується піднесенням до квадрату виразу (1):

$$I(x_0, y_0) = |V(x_0, y_0)|^2. \quad (2)$$

### Метод проектування фазової дифракційної ґратки

Нехай необхідно розрахувати синусоїдальну фазову ґратку, яка має комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \exp\left[j \frac{m}{2} \sin(2\pi\nu_0 x)\right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (3)$$

де  $m$  – глибина фазової модуляції;  $\nu_0$  – просторова частота ґратки;  $a \times b$  – розмір ґратки.

Функція  $\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$  має вигляд:

$$\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{a}{2}; |y| > \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Якщо падаюча хвиля має одиничну амплітуду  $V_0 = 1$ , то амплітуда поля безпосередньо за ґраткою

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = t(x, y). \quad (4)$$

Підставивши вираз (4) в (1), отримуємо амплітуду поля в точці  $P_0$  для просторових частот:

$$V(v_x, v_y) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy, \quad (5)$$

де  $v_x = \frac{x_0}{\lambda f}$  і  $v_y = \frac{y_0}{\lambda f}$  – просторові частоти.

Провівши математичні перетворення, отримуємо

$$V(v_x, v_y) = \frac{1}{j\lambda z} ab \cdot \text{sinc}(bv_y) \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{m}{2}\right) \text{sinc}[a(v_x - kv_0)], \quad (6)$$

де  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / \pi x$  – sinc – функція;  $J_k(a)$  – функція Бесселя  $k$ -го порядку.

Розподіл інтенсивності  $I(x_0, y_0)$  отримуємо піднесенням до квадрату виразу (6), перейшовши від просторових частот  $v_x, v_y$  до координат  $x_0, y_0$ :

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(b \frac{y_0}{\lambda z}\right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \text{sinc}\left[a\left(\frac{x_0}{\lambda z} - kv_0\right)\right]\right)^2. \quad (7)$$

### Дослідження інтенсивності, сформованої заданою фазовою ґраткою

Аналіз виразу (7) показує, що синусоїдальна зміна фазового коефіцієнта пропускання ґратки обумовлює перерозподіл енергії від центрального дифракційного максимуму до додаткових бокових максимумів, причому параметр  $k$  визначає цей перерозподіл.

Нехай дифракційна картина утворюється у фокальній площині лінзи з фокусною відстанню  $f_0 = 50$  мм. Тоді у співвідношенні (7)  $z = f_0$ .

Проаналізуємо розподіл поля вздовж осі  $x_0$ . Складовими дифракційної картини Фраунгофера є набір доданків  $\left[ J_k\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \text{sinc}\left(a \frac{x_0}{\lambda z}\right) \right]^2$ , розташованих на

відстані  $v_0$  один від одного. Висота кожного з них буде пропорційна  $J_k^2\left(\frac{m}{2}\right)$  відповідного порядку. За таких обставин найбільш інформативними є 0 та  $\pm 1$  головні максимуми.

Знайдемо дифракційну ефективність (ДЕ) ґратки, під якою розуміють відношення інтенсивності світла  $I_k$   $k$ -го порядку до загальної інтенсивності світла  $I_0$ , що падає на ґратку [3], тобто  $\eta_k = \frac{I_k}{I_0}$ . ДЕ фазової ґратки  $\eta_k$  дорівнює

$$\eta_k = J_k^2\left(\frac{m}{2}\right), \quad (8)$$

тобто ДЕ повністю залежить від параметра  $m$ .

Побудуємо графік функції (8) для значень  $k = \{0;1\}$  (рис.2).

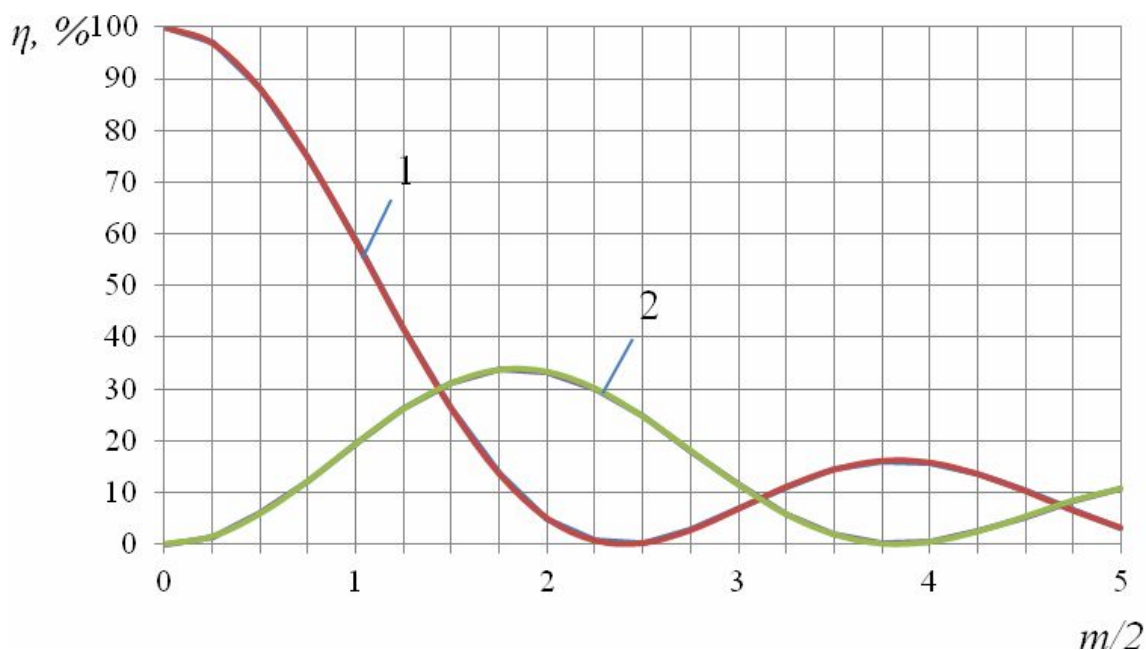


Рис. 2. Дифракційна ефективність в нульовому і першому порядках:  
1 –  $k = 0$ , 2 –  $k = 1$

Виходячи із графіків на рис. 2, ДЕ в першому порядку не може перевищити  $\eta_k = 33,8\%$ .

Аналіз графіків на рис. 2 показує, що підбираючи значення параметру  $m$ , можна направляти необхідну кількість енергії, у відповідні порядки дифракції. Наприклад, при підстановці  $m = 4,8$  в (7) енергія зосередиться у 1, та -1 порядку дифракції, а нульова складова зникне. Результат чисельного моделювання розподілу інтенсивності вздовж осі  $x_0$  представлений на рис. 3. Графік побудований при таких початкових умовах:  $f_0 = 50$  мм,  $a = 10$  мм,  $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-3}$  мм,  $\nu_0 = 1000$  мм<sup>-1</sup>.

З огляду на властивість sinc-функції  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \cdot \text{sinc}\left(\frac{x_0}{a}\right) = \delta(x_0)$ , виявляється, що  $\text{sinc}[a(\nu_x - k\nu_0)]$  прямує до  $\delta(\nu_x - k\nu_0)$  при  $a \gg 1/\nu_0$ , тобто у (7) набір sinc-функцій можна замінити набором дельта-функцій.

### Висновки

У статті подано метод проектування дифракційних ґраток із заданим коефіцієнтом пропускання, який дозволяє визначити оптичні характеристики цих ґраток, які дають змогу забезпечити заданий розподіл поля в площині спостереження.

Положення головних максимумів залежить від заданої просторової частоти ґратки. Підбираючи значення глибини фазової модуляції  $m$ , можна варіювати кількість енергії, яка потрапляє в  $-1$ ,  $0$  та  $1$  порядки дифракції.

Дифракційна ефективність фазової ґратки повністю залежить від глибини фазової модуляції і не залежить від відстані до площини спостереження.

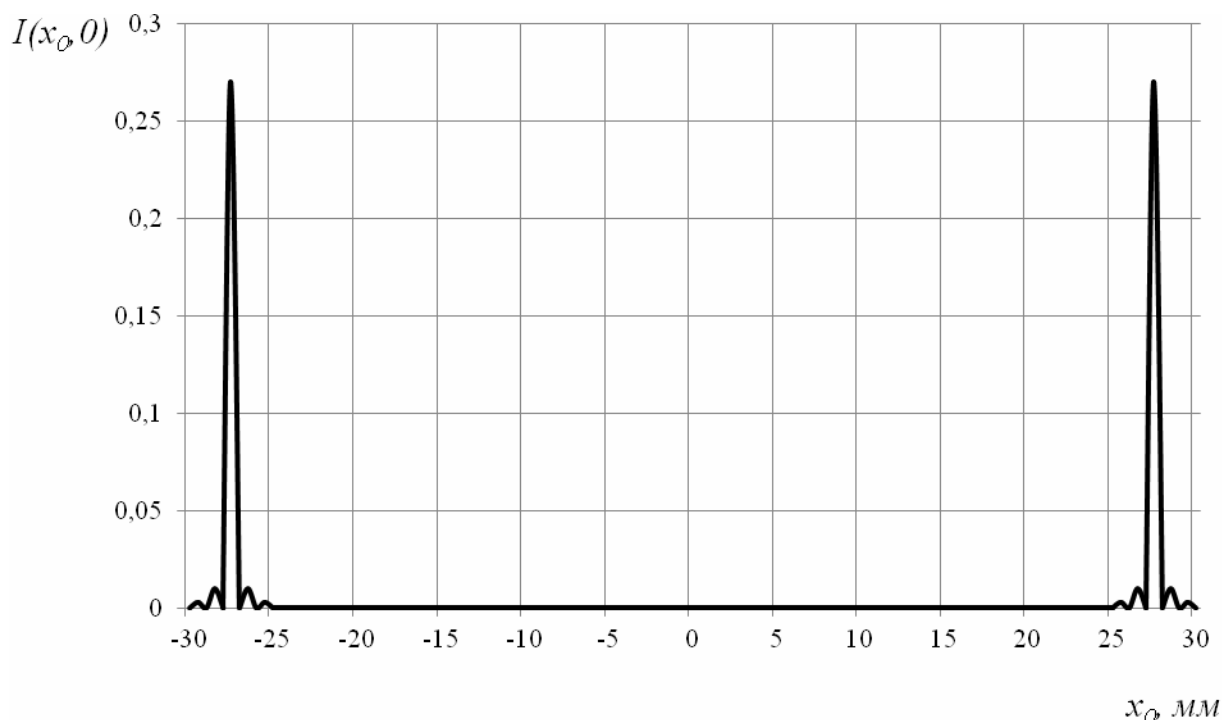


Рис. 3. Розподіл інтенсивності вздовж осі  $x_0$  в картині Фраунгофера при  $m = 4.8$

У подальшому необхідно вдосконалювати запропонований метод для знаходження конструктивних параметрів фазових ґраток, які б забезпечували високу дифракційну ефективність і якість зображення.

### Література

1. Березный А. Е. Фазовые дифракционные решетки с заданными параметрами. Об одной обратной задаче оптики / А. Е. Березный, С. В. Комаров, А. М. Прохоров, И. Н. Сисакян, В. А. Сойфер // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 287. – №. 3. – С. 623 - 627.
2. Досколович Л. Л. Фазовые дифракционные решетки с заданным распределением интенсивности по порядкам / Л. Л. Досколович, В. В. Котляр, В. А. Сойфер // Письма в ЖТФ. – 1991. – Т. 17. – № 21. – С. 54 - 57.
3. Колобродов В. Г. Дифракційна теорія оптичних систем / В. Г. Колобродов, Г. С. Тимчик. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 140 с.

Надійшла до редакції  
15 жовтня 2013 року

© Коваль С. Т., Колобродов В. Г., Кучугура І. О., 2013