

УДК 519.63:519.85:533:532.542

## Исследование свойств решения задачи Коши для системы уравнений стационарного течения газа в трубопроводе

В. С. Смирнова, А. Д. Тевяшев

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина*

Изучены общие свойства решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающей дозвуковые стационарные неизотермические течения газа в однониточном трубопроводе. Построена функция для локальной аппроксимации зависимости температуры от координаты вдоль оси трубопровода. Изучен случай изотермического течения газа, когда коэффициент сжимаемости является линейной функцией от давления, и в явном виде получена зависимость давления от координаты.

**Ключевые слова:** стационарное течение газа, трубопровод, задачи Коши, дифференциальные уравнения, температура, давление.

Досліджені загальні властивості розв'язку задачі Коші для системи диференціальних рівнянь, що описують дозвуковий стаціонарний неизотермічний рух газу в однонитковому трубопроводі. Побудована функція для локальної апроксимації залежності температури від координати вздовж вісі трубопроводу. Досліджено випадок ізотермічного руху газу, коли коефіцієнт стислості є лінійною функцією від тиску, та в явному виді отримана залежність тиску від координати.

**Ключові слова:** стаціонарний рух газу, трубопровід, задача Коші, диференціальні рівняння, температура, тиск.

The general properties of the solution of a problem of Koshi for the system of the differential equations describing subsonic stationary not isothermal flow of gas in the pipeline are devoted. Function for local approximation of dependence of temperature from co-ordinate along a pipeline axis is constructed. The case of an isothermal flow of gas when the compressibility factor is linear function from pressure is studied, and dependence of pressure on co-ordinate is in an explicit form received.

**Keywords:** steady flow of gas pipeline, Cauchy problem, Differential Equations, temperature, pressure.

### 1. Введение

Математическому моделированию стационарных неизотермических режимов транспорта природного газа по участку трубопровода посвящено большое количество работ [1-4]. Однако до настоящего времени еще не построен комплекс адекватных стандартизованных математических моделей стационарных неизотермических режимов транспорта природного газа, которые корректно учитывают все значимые физические эффекты.

В работах [5, 6] сформулирована математическая модель нестационарного неизотермического движения газа по участку трубопровода, построенная на основе базовых в газовой динамике фундаментальных законов сохранения массы, импульса и энергии с использованием общих положений термодинамики. Эта модель также описывает широкий класс стационарных режимов течения газа в недеформируемом трубопроводе.

Целью настоящей работы является аналитический и численный анализ модели стационарного неизотермического движения реального природного газа по участку трубопровода [6], с учетом общих свойств уравнений состояния.

## 2. Задача Коши

Стационарное течение газа в трубопроводе постоянного круглого сечения при постоянном удельном массовом расходе  $W$  описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций давления  $p(x)$  и абсолютной температуры  $T(x)$  [6] ( $x$  – координата вдоль оси трубопровода). Будем рассматривать дозвуковые режимы течения газа по горизонтальному участку однониточного газопровода для случая  $W > 0$ , предполагая, что течение газа происходит в положительном направлении оси  $x$ .

Для описания распределения давления и температуры вдоль трубопровода будем рассматривать задачу Коши: требуется найти непрерывные вместе с производными функции  $p(x)$  и  $T(x)$ , удовлетворяющие на интервале  $0 \leq x \leq L$  системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda z R T W^2}{2 D p}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dT}{dx} = \mu \frac{dp}{dx} - \frac{4k}{D W C_p} (T - T_n), \quad (2.2)$$

и начальным условиям

$$p(0) = p_0, \quad T(0) = T_0. \quad (2.3)$$

Здесь  $R$  – газовая постоянная;  $D$  – внутренний диаметр трубопровода;  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления (безразмерный параметр);  $C_p(p, T)$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $k$  – коэффициент теплопередачи;  $T_n$  – температура окружающей среды;  $\rho$  – плотность газа;  $z(p, T)$  – коэффициент сжимаемости в термическом уравнении состояния

$$p = z(p, T) R T \rho; \quad (2.4)$$

$$\mu(p, T) = \frac{1}{C_p} \left[ T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \right] = \frac{R T^2}{p C_p} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p \quad (2.5)$$

– коэффициент Джоуля-Томсона,  $V = 1/\rho$  – удельный объем

Предполагаем, что функции  $z(p, T) > 0$  и  $C_p(p, T) > 0$  заданы в области, которая соответствует реальным режимам транспорта природного газа. Считаем, что выполняется условие  $\left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p > 0$ , и неравенство  $\mu(p, T) > 0$ , которое следует из (2.5).

### 2.1 Общие свойства решения задачи Коши

Поскольку правая часть уравнения (2.1) отрицательна, то  $p(x)$  монотонно убывает от значения  $p_0$  при возрастании  $x$  на интервале  $0 \leq x \leq L$ . Поведение функции  $T(x)$  требует специального исследования. Предположим, что  $T(x)$  в точке  $0 \leq x_m \leq L$  имеет стационарное значение  $\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_m} = 0$ .

Используя (2.5), (2.1), (2.2) можно записать это условие в виде

$$\frac{\lambda W^3 R^2}{8k} \left[ \frac{z T^3}{p^2} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p \right]_{x_m} = [T_u - T(x_m)] \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) дает связь между величинами  $p$  и  $T$  в стационарной точке.

Вычислим вторую производную функции  $T(x)$  в точке  $x=x_m$ . Дифференцируя по  $x$  уравнение (2.2) и учитывая (2.5), (2.1), (14), (15), получаем:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} \Big|_{x_m} = - \frac{\lambda W R^2}{2D} \left( \frac{T^3}{C_p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{z}{p^2} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)_p \right) \frac{dp}{dx} \right) \Big|_{x_m}. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) позволяет исследовать тип стационарной точки, если известен коэффициент сжимаемости  $z(p, T)$ .

Согласно [2], при давлениях  $p/p_c \leq 2$  и температурах  $1.2 \leq T/T_c \leq 2$  ( $p_c$  и  $T_c$  – критические давление и температура газа соответственно) функцию  $z(p, T)$  можно аппроксимировать линейной зависимостью от давления

$$z(p, T) = 1 + f_1(T/T_c) p/p_c = 1 + A(T) p, \quad (2.8)$$

где  $f_1(T/T_c) < 0$  – безразмерная функция, имеющая положительную производную  $\frac{df_1}{dT} > 0$ ;  $A(T) \equiv f_1(T/T_c)/p_c$ . Подставив (2.8) в (2.7), получаем

$$\frac{d^2 T}{dx^2} \Big|_{x_m} = \frac{\lambda W R^2}{2D} \left( \frac{T^3}{C_p p^2} \frac{dA}{dT} \frac{dp}{dx} \right) \Big|_{x_m}. \quad (2.9)$$

Видно, что правая часть равенства (2.9) отрицательна, и в точке  $x_m$  функция  $T(x)$  должна иметь максимум. Отсюда вытекает, что на интервале  $[0, L]$  может существовать только один максимум. Стационарная точка  $x_m = 0$  (или  $x_m = L$ ) соответствует граничному максимуму. Если существует стационарная точка  $0 < x_m < L$ , то в этой точке  $T(x)$  имеет локальный максимум. В обсуждаемых случаях в точке  $x = 0$  должно выполняться условие  $\frac{dT}{dx} \geq 0$ , которое с помощью

(2.1)-(2.2) можно записать в виде

$$\frac{\lambda W^3 R T_0 z(p_0, T_0) \mu(p_0, T_0) C_p(p_0, T_0)}{8k p_0} \leq (T_u - T_0). \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) дает необходимое условие существования максимума в точке  $0 \leq x_m \leq L$  на зависимости  $T(x)$  и позволяет выяснить характер поведения  $T(x)$  после формулировки задачи Коши, без ее непосредственного решения.

Для примера было проведено численное моделирование стационарных режимов течения природного газа с критическими параметрами  $p_c = 4.6 \cdot 10^6$  Па,  $T_c = 190$  К (метан). Численное решение задачи Коши проводилось при начальных условиях  $p_0 = 8.3 \cdot 10^6$  Па,  $T_0 = 283$  К и следующих значениях параметров:  $D = 1.4013$  м,  $L = 112000$  м,  $\lambda = 0.01$ ,  $k = 1.63$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $R = 520$  Дж/(кг·К),  $W = 553.9$  кг/(м<sup>2</sup>·с). Для зависимостей  $z(p, T)$  и  $C_p(p, T)$  были использованы формулы, приведенные в [7], зависимость  $\mu(p, T)$  рассчитывалась по формуле (2.5). На рис. 1 представлены зависимости  $T(x)$ , полученные при различных значениях  $T_u$ .

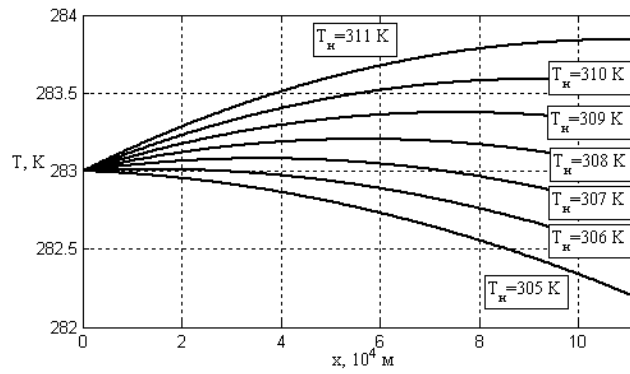


Рис. 1. Графіки залежностей температури від координати

## 2.2 Изотермические режимы

При теплообмене между транспортируемым газом и окружающей средой температура газа может иметь малые изменения по всей длине газопровода (квазиизотермическое течение) [3, 4]. При описании таких режимов допустимо предполагать, что процесс течения газа происходит изотермически.

При описании изотермических режимов полагаем  $T(x)=T_0$ , но будем учитывать зависимость коэффициента сжимаемости от давления согласно (2.8). Подставив (2.8) в (2.1), получаем уравнение относительно  $p$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\lambda RT_0 W^2 [1 + A(T_0)p]}{2Dp}. \quad (2.11)$$

Интегрируя (2.11) с учетом условий (2.3), получаем

$$p(x) - \frac{1}{A(T_0)} \ln[1 + A(T_0)p(x)] = p_0 - \frac{1}{A(T_0)} \ln[1 + A(T_0)p_0] - \frac{\lambda R W^2 T_0 A(T_0)}{2D} x. \quad (2.12)$$

Формула (2.12) описывает зависимость  $p(x)$  при изотермических режимах течения широкого класса газов. При известном  $W$  формула (2.12) позволяет найти давление на выходе трубопровода  $p(L)=p_L$ , где  $p_L$  определяется из соотношения

$$p_L - \frac{1}{A(T_0)} \ln[1 + A(T_0)p_L] = p_0 - \frac{1}{A(T_0)} \ln[1 + A(T_0)p_0] - \frac{\lambda R W^2 T_0 A(T_0)}{2D} L. \quad (2.13)$$

С другой стороны, формула (2.13) позволяет решить обратную задачу: по известным давлениям на входе  $p_0$  и выходе  $p_L$  трубопровода определить удельный массовый расход  $W$ . С помощью (2.13) получаем

$$W = \left( \frac{2D}{\lambda R T_0 A(T_0) L} \right)^{1/2} \left( p_0 - p_L + \frac{1}{A(T_0)} \ln \frac{1 + A(T_0)p_L}{1 + A(T_0)p_0} \right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

С помощью уравнения (2.11) и соотношения (26) получаем выражение для среднего на интервале  $[0, L]$  давления как функцию  $p_0$  и  $p_L$

$$\bar{p} = \frac{1}{A(T_0)} \left[ \frac{A^2(T_0)(p_0^2 - p_L^2)}{2 \left( A(T_0)(p_0 - p_L) + \ln \frac{1 + A(T_0)p_L}{1 + A(T_0)p_0} \right)} - 1 \right]. \quad (2.15)$$

Следует ожидать, что формулы (2.12)-(2.15), полученные в данной работе с учетом зависимости коэффициента сжимаемости от давления, имеют большую точность, чем известные в литературе формулы, полученные при предположении, что  $z = \text{const}$  по всей длине трубопровода [3, 4].

### 2.3 Аппроксимация зависимости $T(x)$

В этом разделе получим формулу, пригодную для локальной аппроксимации зависимости  $T(x)$ . Для этого рассмотрим две вспомогательные задачи, которые вытекают из (2.1)-(2.3) в двух частных предельных случаях. Пусть  $p_\mu(x)$  и  $T_\mu(x)$  – решение задачи (2.1)-(2.3) при  $k=0$ ,  $\mu \neq 0$  (отсутствует теплообмен с окружающей средой);  $p_k(x)$  и  $T_k(x)$  – решение задачи (2.1)-(2.3) при  $\mu=0$ ,  $k \neq 0$  (изменение температуры определяется только теплообменом). Отметим, что в этих задачах в уравнении (2.1) учитывается зависимость  $z(p, T)$ . Рассмотрим функцию  $T_+(x) = T_k(x) + T_\mu(x) - T_0$ , которая определяет некоторое распределение температуры, и сформулируем утверждение о локальном сравнении  $T(x)$  и  $T_+(x)$ .

**Лемма.** Пусть функции  $T(x)$  и  $T_+(x) = T_k(x) + T_\mu(x) - T_0$  определены на общем интервале  $[0, l]$ . Тогда:

- 1)  $T(0) = T_+(0) = T_0$ ;

- 2)  $\frac{dT_+(0)}{dx} = \frac{dT(0)}{dx}$ , т.е.  $T(x) - T_+(x)$  имеет стационарное значение при  $x = 0$ ;

- 3) для каждого набора параметров  $p_0$  и  $T_n$  всегда существует интервал значений  $T_0$ , при которых на некотором интервале  $(0, x_1]$ ,  $0 < x_1 < l$  выполняется неравенство  $T(x) > T_+(x)$ .

Доказательство. Справедливость 1) и 2) вытекает из (2.3) и (2.2). Разлагая разность  $T(x) - T_+(x)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = 0$  с использованием (2.1)-(2.3), ограничившись первым ненулевым членом, получаем

$$T(x) - T_+(x) = \frac{\lambda R W k}{D^2 p_0} \left( \frac{\partial}{\partial T} f_2(T, p) \right)_{T_0, p_0} \cdot x^2, \quad (2.16)$$

где  $f_2(T, p) = (T - T_n) T z \mu / C_p$ .

Знак правой части в (2.16) при  $x \neq 0$  определяется знаком стоящей в ней производной. Будем рассматривать правую часть (2.16) как функцию  $T_0$  при фиксированных значениях остальных параметров. Покажем, что для каждого набора параметров  $p_0$  и  $T_n$  всегда существует интервал значений  $T_0$ , при которых правая часть (2.16) положительна. Действительно, при  $T_0 = T_n$ , используя (30), получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} f_2(T, p) \right)_{T_n, p_0} = \frac{T_n z(T_n, p_0) \mu(T_n, p_0)}{C_p(T_n, p_0)} > 0,$$

следовательно, правая часть в (2.16) положительна. Поскольку производная в (2.16) является непрерывной функцией  $T_0$ , то она будет положительной и для значений  $T_0$  в некотором конечном интервале

$$T_n - \delta_1 \leq T_0 \leq T_n + \delta_2, \quad (2.17)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – положительные величины, зависящие от  $p_0$ ,  $T_n$  и свойств конкретного газа. Если выполнено условие (2.17), то из (2.16) вытекает, что существует некоторый интервал  $(0, x_1]$ , на котором выполняется неравенство

$$T(x) > T_+(x). \quad (2.18)$$

Неравенство (2.18) можно использовать для оценок  $T(x)$ .

Если правая часть (2.16) мала по сравнению с  $T_+(x)$ , то функцию  $T_+(x)$  можно использовать в качестве приближенной формулы для описания  $T(x)$  на некотором интервале  $[0, x_2]$ . Величина  $x_2$  будет зависеть от задаваемой погрешности приближенного описания.

Отметим, что нахождение функции  $T_+(x)$  сводится к определению функций  $T_k(x)$  и  $T_\mu(x)$  путем решения двух более простых задач, чем задача (2.1)-(2.3).

### 3. Выводы

Для описания распределения давления и температуры вдоль однониточного трубопровода при дозвуковом стационарном неизотермическом течении реального газа сформулирована задача Коши и изучены общие свойства ее решений. Проведено исследование стационарных точек на зависимости  $T(x)$  и получена общая формула, позволяющая определить тип стационарной точки по известному коэффициенту сжимаемости  $z(p, T)$ . На основе анализа уравнения состояния природных газов аналитически показано, что в широком диапазоне температур и давлений стационарная точка функции  $T(x)$  соответствует точке максимума. Аналитически получено необходимое условие существования максимума для функции  $T(x)$ . Аналитические результаты проиллюстрированы результатами численного моделирования стационарных режимов течения природного газа и получены графические представления немонотонных зависимостей  $T(x)$ . На основе двух частных решений задачи Коши построена функция для локальной аппроксимации зависимости  $T(x)$ . Для этой функции сформулирована и доказана лемма о локальном сравнении с функцией  $T(x)$ . Изучен случай изотермического течения газа, когда коэффициент сжимаемости является линейной функцией от давления и в явном виде получена зависимость давления от координаты. Получены формулы, определяющие удельный массовый расход и среднее давление по известным давлениям на входе и выходе трубопровода.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Неизотермическое течение газа в трубах / Васильев О.Ф., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболоцкий М.А. – Новосибирск: Наука, 1978. – 128 с.

2. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа / Бондарев Э.А., Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф. и др. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – 272 с.
3. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / Под ред. В.Е. Селезнева. – М.: Ком Книга, 2005. – 496 с.
4. Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте: математические методы моделирования и практическое применение / Под ред. В.Е. Селезнева. – М.: МАКС Пресс, 2007. – 200 с.
5. Об одном классе задач математического моделирования нестационарных неизотермических режимов транспорта природного газа по участку трубопровода. Тевяшев А.Д., Смирнова В.С. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, №4/5 (28) 2007, с. 45-51.
6. Математическое моделирование нестационарного неизотермического течения газа по участку трубопровода. А.Д. Тевяшев, В.С. Смирнова. // Радиоэлектроника и информатика, 2008, №2, с. 21-27
7. Сухарев М. Г., Карасевич А. М. Технологический расчет и обеспечение надежности газо- и нефтепроводов. М.: ГУП Изд-во «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2000.

---

Надійшла 15.09.2009.

© Смирнова В. С., Тевяшев А. Д., 2009