

УДК 517.954:517.972

Нестационарная задача о диффузии вещества в бесконечном стержне

С. Л. Жуковецкая, О. Н. Яковлева

*Одесская государственная академия холода, Украина
Южноукраинский национальный педагогический университет
имени К. Д. Ушинского, Украина*

Исследована одна экстремальная задача о диффузии вещества в бесконечном стержне, выяснены вопросы разрешимости, построено решение задачи при определенных условиях.

Ключевые слова: диффузия, бесконечный стержень, разрешимость.

Досліджена одна екстремальна задача про дифузію речовини в нескінченному стрижні, з'ясовані питання розв'язності, побудовано розв'язок задачі при певних умовах.

Ключові слова: дифузія, нескінченний стрижень, розв'язність.

One extremal problem about diffusion of matter in infinite bar was investigational, the questions of solvability are found out, the solution of problem was built at certain conditions.

Key words: diffusion, infinite bar, solvability.

Исследуется задача:

В области $-\infty < x < \infty$ при $t > 0$ найти ограниченную функцию $u(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$u_t'(x, t) = a^2 u_{xx}''(x, t) \quad (1)$$

и условиям

$$u(b, t_1) \rightarrow \inf, \quad t_1 > 0 \quad (2)$$

$$u_x'(c, t_2) = \sigma, \quad \sigma > 0, \quad t_2 > 0 \quad (3)$$

$$u(x, 0) \geq 0, \quad (4)$$

где $a \neq 0$ – известная постоянная, σ – известная постоянная, $x = b$, $x = c$ – известные точки, t_1 , t_2 – известные моменты времени.

Данная задача является нестационарной задачей о диффузии вещества в бесконечном стержне.

Применим к уравнению (1) преобразование Фурье по переменной x , получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$V_t'(x, t) + a^2 x^2 V(x, t) = 0, \quad (5)$$

где $V(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(\tau, t) e^{ix\tau} d\tau$ – преобразование Фурье искомой функции $u(x, t)$, $x \in R$.

Уравнение (5) является уравнением с разделяющимися переменными, его можно привести к виду

$$\frac{dV}{V} = -a^2 x^2 dt.$$

Построим общее решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \ln V &= -a^2 x^2 t + \ln c(x), \\ V(x, t) &= c(x) e^{-a^2 x^2 t}, \end{aligned}$$

где $c(x)$ – неизвестная функция параметра x .

Положив $t = 0$, получим:

$$V(x, 0) = c(x),$$

где $V(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(\tau, 0) e^{ix\tau} d\tau$, $x \in R$. Тогда решение уравнения (5) примет вид:

$$V(x, t) = V(x, 0) \cdot e^{-a^2 x^2 t}.$$

Функция $V(x, t)$ представима в виде произведения двух преобразований Фурье: функции $V(x, 0)$ и функции $e^{-a^2 x^2 t}$. На основании свойств преобразования Фурье функция $u(x, t)$ представима в виде свертки обратных преобразований Фурье функций $V(x, 0)$ и $e^{-a^2 x^2 t}$. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-\frac{s^2}{2}} e^{-ixs} ds = e^{-\frac{x^2}{2}},$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-a^2 t s^2} e^{-ixs} ds = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Т.о. решение уравнения (1) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(s, 0) \cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds, \quad x \in R, \quad t > 0. \quad (6)$$

Для построения решения задачи (1)-(4) необходимо найти функцию $u(x; 0) = u(x)$. Для определения функции $u(x)$ используем условия (2) и (3). Из условия (2) получим:

$$\frac{1}{a\sqrt{2t_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R u(s) \cdot e^{-\frac{(s-b)^2}{4a^2 t_1}} ds \rightarrow \inf,$$

что эквивалентно условию:

$$\frac{1}{\sqrt{t_1}} \int_R u(s) \cdot e^{-\frac{(s-b)^2}{4a^2 t_1}} ds \rightarrow \inf.$$

Так как:

$$u'_x(x, t) = \frac{1}{4a^3 \sqrt{\pi} \sqrt{t^3}} \int_R u(s) (s-x) \cdot e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}} ds, \quad x \in R,$$

то из условия (3) получим:

$$\frac{1}{\sqrt{t_2^3}} \int_R u(s)(s-c) \cdot e^{-\frac{(s-c)^2}{4a^2 t_2}} ds = 4a^3 \sqrt{\pi} \sigma.$$

Введём функции:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{t_1}} e^{-\frac{(s-b)^2}{4a^2 t_1}}, \quad \psi(s) = \frac{1}{\sqrt{t_2^3}} (s-c) e^{-\frac{(s-c)^2}{4a^2 t_2}}.$$

Пусть $\Gamma \subset R$, Γ – множество, на котором функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ принимают неотрицательные значения. Тогда полученные условия можно записать в виде:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma} u(s) \varphi(s) ds \rightarrow \inf, \\ \int_{\Gamma} u(s) \psi(s) ds = 4a^3 \sqrt{\pi} \sigma, \\ u(s) \geq 0, s \in \Gamma. \end{cases} \quad (7)$$

Совокупность условий (7) представляет собой задачу «о сингулярном решении». Её решение имеет вид:

$$u(x) = c_0 \delta(x - s_0),$$

где $s_0 \in \Gamma \subset R$, c_0 – неизвестная постоянная.

Так как $t > 0$, то $\varphi(s) > 0$ для всех $s \in R$, а функция $\psi(s)$ неотрицательна при $s - c \geq 0$. Это означает, что множество $\Gamma = [c; +\infty)$.

Постоянная c_0 определяется так:

$$c_0 = \frac{4a^3 \sqrt{\pi} \sigma t_1^2 e^{\frac{3}{4a^2} \frac{(s_0-c)^2}{4a^2 t_2}}}{s_0 - c}. \quad (8)$$

Точку s_0 определяем из условия:

$$\frac{t_2^{\frac{3}{2}}}{t_1^2} \cdot \frac{1}{s_0 - c} \cdot e^{\frac{(s_0-c)^2 t_2^{-1} - (s_0-b)^2 t_1^{-1}}{4a^2}} \rightarrow \inf.$$

Подставив найденное значение s_0 в формулу (8), получим вполне определенное значение постоянной c_0 . Т.о. решение задачи (1)-(4) имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(s_0-x)^2}{4a^2 t}}, \quad x \in R, t > 0. \quad (9)$$

Решение задачи (1)-(4) приводит к нахождению инфимума функции

$$F(x) = \frac{t_2^{\frac{3}{2}}}{t_1^2} \cdot \frac{1}{x - c} \cdot e^{\frac{(x-c)^2 t_2^{-1} - (x-b)^2 t_1^{-1}}{4a^2}}$$

на множестве $\Gamma = [c; +\infty)$.

Очевидно, что при любых t_1, t_2, b, c функция $F(x)$ непрерывна на множестве $(c; +\infty)$, при этом

$$\lim_{x \rightarrow c+0} F(x) = +\infty.$$

Для достижения минимума на множестве $(c; +\infty)$ необходимо, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty. \quad (10)$$

Были рассмотрены случаи, при которых выполнялось условие (10).

1. $t_2 < t_1$, тогда $t_2^{-1} - t_1^{-1} > 0$ и выполнено (10) при любых значениях b и c . На промежутке $(c; +\infty)$ существует точка s_0 :

$$F(s_0) = \inf_{c < x < +\infty} F(x). \quad (11)$$

В этом случае решение задачи (1)-(4) существует.

2. $t_2 > t_1$, тогда $t_2^{-1} - t_1^{-1} < 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ при любых b и c . Это означает, что в этом случае задача (1)-(4) решений не имеет.

3. $t_1 = t_2$, тогда

$$F(x) = \frac{t_1}{x-c} \cdot e^{\frac{2t_1^{-1}(b-c)x + t_1^{-1}(c^2-b^2)}{4a^2}}.$$

При $b > c$ выполнено условие (10) и на $(c; +\infty)$ существует точка s_0 , которая удовлетворяет условию (11). В этом случае решение задачи (1)-(4) существует.

При $b = c$ функция $F(x)$ примет вид

$$F(x) = \frac{t_1}{x-c}.$$

Функция не имеет минимума на $(c; +\infty)$, т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. Задача (1)-(4) решений не имеет.

При $b < c$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, задача (1)-(4) решений не имеет.

Построим решение задачи (1)-(4) в случае $t_1 = t_2$ и $b > c$. Функцию $F(x)$ запишем в виде:

$$F(x) = t_1 \cdot e^{\frac{t_1^{-1}(c^2-b^2)}{4a^2}} \cdot e^{\frac{2t_1^{-1}(b-c)x}{4a^2}}.$$

Т.к. $t_1 \cdot e^{\frac{t_1^{-1}(c^2-b^2)}{4a^2}}$ вполне определённая постоянная, то для нахождения точки s_0 необходимо на множестве $(c; +\infty)$ определить минимум функции

$$G(x) = \frac{1}{x-c} \cdot e^{\frac{t_1^{-1}(b-c)x}{2a^2}}.$$

После определенных рассуждений и вычислений получим, что

$$s_0 = c + \frac{2a^2 t_1}{b-c}.$$

Т.к. $t_1 > 0$, $b > c$, то $s_0 \in \Gamma = [c; +\infty)$. Теперь мы можем из (8) найти значение c_0 :

$$c_0 = 2a(b-c)\sqrt{\pi_1} \sigma e^{\frac{a^2 t_1}{(b-c)^2}}.$$

Решение задачи (1)-(4) в этом случае будет иметь вид:

$$u(x,t) = (b-c)\sigma \sqrt{\frac{t_1}{t}} e^{-\frac{(c-x)^2}{4a^2 t} - \frac{(c-x)t_1}{(b-c)t} - \frac{t_1}{t}}.$$

В случае 1 ($t_2 < t_1$) точку s_0 можно найти лишь приближённо, значит, решение задачи (1)-(4) мы можем получить только приближённо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черский Ю.И. Аналитическое решение экстремальных задач. – Одесса: ОИИМФ, 1990. – 54с.
2. Жуковецкая С.Л., Яковлева О.Н. Исследование одной экстремальной задачи диффузии вещества в бесконечном стержне // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ – 2009). – Харьков-Херсон, 2009. – с. 74-76.