

УДК 539.3

Математическое моделирование в задачах нестационарного деформирования цилиндрических оболочек

Н. И. Воропай, Г. А. Гнатенко, Е. Г. Янютин

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина

Выполнено математическое моделирование импульсных воздействий на цилиндрические оболочки. Моделирование деформирования оболочек производится на основе уточненной теории С.П. Тимошенко. Построены решения прямых и обратных задач. При решении задач идентификаций используется метод регуляризации А.Н. Тихонова.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, интегральное уравнение, идентификация, метод регуляризации, задача управления.

Виконано математичне моделювання імпульсних дій на циліндричні оболонки. Моделювання деформування оболонок здійснюється на основі уточненої теорії С.П. Тимошенка. Побудовано розв'язок прямих та обернених задач. При розв'язку задач ідентифікацій використовується метод регуляризації А.М. Тихонова.

Ключові слова: циліндрична оболонка, інтегральне рівняння, ідентифікація, метод регуляризації, задача керування.

The mathematical modeling of impulse actions on the cylindrical shells is considered. The simulation of the shells deforming is based on Timoshenko's refined theory. The direct and inverse problems are studied. The Tihonov's regularizing method is used for the solution of the identification problems.

Key words: cylindrical shell, integral equation, identification, regularizing method, control problem.

1. Введение

Развитие современной техники требует более глубоких исследований процессов нестационарного деформирования элементов конструкций. От степени понимания этих процессов и точности их прогнозирования во многом зависит прочность и надежность создаваемых конструкций. Способствовать этим исследованиям могут результаты, получаемые при решении прямых и обратных нестационарных задач для деформируемых элементов конструкций.

Существующие ныне вычислительная техника и математические методы позволяют решать задачи связанные с импульсным деформированием и колебаниями элементов конструкций. Однако классические подходы не всегда могут быть напрямую реализованы при решении конкретных задач, что требует разработки специальных методов.

Особенный интерес могут представлять обратные задачи о деформировании упругих цилиндрических оболочек, методика решения которых будут рассмотрены в статье.

2. Анализ публикаций

Вопросы деформирования упругих конструкций в достаточной степени изучены в области решения прямых задач. В основном, описаны задачи о деформировании однородных цилиндрических оболочек [1]. Значительно менее

Приведенные в (4.1) уравнения основаны на предположении, что оболочка является однородной. И они не могут быть непосредственно использованы при решении задачи для составной оболочки. Однако можно применить указанную теорию к участкам оболочки в отдельности. Произведем условное рассоединение системы, заменив каждую из её частей однопролетной оболочкой из соответствующего материала. Вводимые однопролетные оболочки дополним участками некоторой длины и опорой. Индексом $j = 1, 2$ будем обозначать левую и правую части составной оболочки. Схема, используемая для решения задачи о деформировании составной оболочки, приведена на рис. 2. Взаимодействие частей составной оболочки моделируется с помощью сосредоточенных фиктивных нагрузок, описываемых функциями времени $N_j(t)$ и $R_j(t)$ (силы, действующие вдоль оси оболочек и перпендикулярно оси соответственно) и $M_j(t)$ (сосредоточенные внешние моменты), прикладываемых к каждой из введенных оболочек на некотором расстоянии ε_j от плоскости скрепления участков.

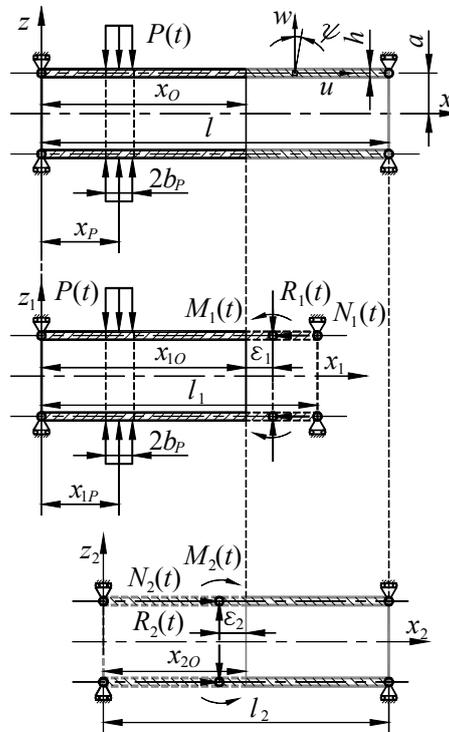


Рис. 2. Схема исследуемой системы

На основе приведенной схемы от задачи о нестационарном деформировании одной составной оболочки переходим к решению задачи о деформировании двух однородных оболочек, к которым приложены возмущающая нагрузка $P(t)$ и неизвестные функции реакций $N_j(t)$, $R_j(t)$ и $M_j(t)$. В последствии

осуществление контакта участков моделируется путем соответствующего подбора фиктивных сил и моментов.

Рассмотрим первую оболочку системы. Как видно, на оболочку воздействуют возмущающая нагрузка $P(t)$, а также сосредоточенные реакции $N_1(t)$, $R_1(t)$ и $M_1(t)$. Произведем решение задачи о деформировании этой оболочки в предположении, что функция возмущающей нагрузки является заданной, а возникающие реакции неизвестны. Решение системы уравнений (4.1) относительно неизвестных функций u , w и ψ будем искать в предположении нулевых начальных условий на основе разложения искомых функций в тригонометрические ряды по координате и применения преобразования Лапласа по времени.

Выражения для определения прогиба w и угла поворота нормали ψ не приводятся, а выражение для осевого перемещения u имеет вид

$$\begin{aligned} u(\xi, t) = & \frac{4l^2}{E'} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k \xi_P \sin \lambda_k \xi_b \cos \lambda_k \xi}{\lambda_k} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^3 D_k^{UQ} \sin \omega_{ik} (t-\tau) d\tau - \\ & \frac{2l}{E'} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k \xi_O \cos \lambda_k \xi \int_0^t N(\tau) \sum_{i=1}^3 D_k^{UN} \sin \omega_{ik} (t-\tau) d\tau - \\ & \frac{2l}{E'} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \lambda_k \xi_O \cos \lambda_k \xi \int_0^t R(\tau) \sum_{i=1}^3 D_k^{UQ} \sin \omega_{ik} (t-\tau) d\tau + \\ & + \frac{2l}{D} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k \xi_O \cos \lambda_k \xi \int_0^t M(\tau) \sum_{i=1}^3 D_k^{UM} \sin \omega_{ik} (t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\lambda_k = k\pi$; $D_k^{UN} = \left((A_k - \omega_{ik}^2) (C_k - \omega_{ik}^2) - 12h^{-2} \bar{k}^{-4} l^2 \lambda_k^2 \right) / \Delta'_k(\omega_{ik})$,

$$D_k^{UQ} = \left((C_k - \omega_{ik}^2) \nu l \lambda_k a^{-1} \right) / \Delta'_k(\omega_{ik}); \quad D_k^{UM} = \left(12h^{-2} a^{-1} \nu l^2 \lambda_k^2 \bar{k}^{-2} \right) / \Delta'_k(\omega_{ik}),$$

$$\Delta'_k(\omega_{ik}) = 3\omega_{ik}^5 - 2e_k \omega_{ik}^3 + f_k \omega_{ik}; \quad A_k = \bar{k}^{-2} \lambda_k^2 + l^2 a^{-2}; \quad C_k = \lambda_k^2 + 12\bar{k}^{-2} l^2 h^{-2},$$

$$f_k = A_k \lambda_k^2 + A_k C_k + \lambda_k^2 C_k - \lambda_k^2 \left(\nu^2 l^2 a^{-2} + 12\bar{k}^{-4} l^2 h^{-2} \right),$$

$$e_k = A_k + \lambda_k^2 + C_k; \quad g_k = A_k \lambda_k^2 C_k - \nu^2 l^2 a^{-2} \lambda_k^2 C_k - 12\bar{k}^{-4} l^2 h^{-2} \lambda_k^4,$$

$$\omega_{ik} - \text{модули мнимых корней уравнения } s^6 + e_k s^4 + f_k s^2 + g_k = 0.$$

Удельные усилия можно записать в следующем виде [1]

$$N_x = E' \left(\frac{1}{l} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\nu}{a} w \right); \quad Q = \bar{k}^{-2} E' \left(\frac{1}{l} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \psi \right); \quad M_x = \frac{D}{l} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (4.3)$$

После подстановки выражений для определения u , w и ψ в (4.3) получим 6 выражений для определения кинематических и силовых параметров. Несложно получить подобные выражения и для второй оболочки.

Для соответствия условию жесткого скрепления участков составной оболочки в плоскости стыковки необходимо выполнение шести контактных

условий. А именно, совпадению трех кинематических и трех силовых параметров в этой плоскости. Для этого последовательно приравняем выражения для динамических параметров в указанной точке. Используя аппроксимацию типа прямоугольников функций, зависящих от t , получим систему уравнений, отображающих условия скрепления:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{13} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{14} \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{A}_{15} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{16} \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{A}_{17} \cdot \mathbf{P}; \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{61} \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{A}_{62} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{63} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{64} \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{A}_{65} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{66} \cdot \mathbf{M}_2 = \mathbf{A}_{67} \cdot \mathbf{P}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) содержит неизвестные векторы \mathbf{N}_j , \mathbf{R}_j и \mathbf{M}_j , соответствующие функциям $N_j(t)$, $R_j(t)$ и $M_j(t)$, вектор \mathbf{P} – функцию нагрузки $P(t)$ и матричные аналоги операторов \mathbf{A}_{11} – \mathbf{A}_{67} .

Решение системы уравнений (4.4) производилось с помощью алгоритма Гаусса. Также при определении неизвестных возникает необходимость применения регуляризирующего алгоритма, поскольку приходится численно решать интегральные уравнения Вольтерра I рода. Использовался регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова [2]. Численное моделирование процесса деформирования, производилось для оболочки со следующими геометрическими параметрами: $a=0.3$; $h=0.04$ м; $l=1.5$ м; $x_P=0.6$ м; $x_O=0.9$ м; $b_P=0.15$ м.

На рис. 3 изображены графики изменения прогиба оболочки для точки контакта участков x_O . Кривая 1 соответствует функции возмущающей нагрузки, кривая 2 – указанному кинематическому параметру, рассчитанному с помощью предлагаемого метода; кривой 3 показана соответствующая кривая, рассчитанные с применением МКЭ.

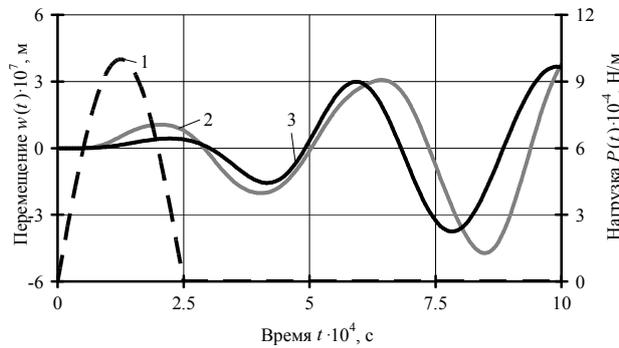


Рис.3. Изменение прогиба оболочки

Далее рассматривается обратная задача по отысканию неизвестного временного изменения нагрузки воздействующей на составную цилиндрическую оболочку, по данным изменения прогиба $\tilde{w}(t)$ в некоторой точке x_S системы, изображенной на рис. 1.

Дополним систему уравнений (4.4) уравнением, отражающим условие задания прогиба $\tilde{w}(t)$, после чего получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{13} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{14} \cdot \mathbf{N}_2 + \\ + \mathbf{A}_{15} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{16} \cdot \mathbf{M}_2 + \mathbf{A}_{17} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}; \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{61} \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{A}_{62} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{63} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{64} \cdot \mathbf{N}_2 + \\ + \mathbf{A}_{65} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{66} \cdot \mathbf{M}_2 + \mathbf{A}_{67} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{A}_{71} \cdot \mathbf{N}_1 + \mathbf{A}_{72} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{73} \cdot \mathbf{M}_1 + \mathbf{A}_{77} \cdot \mathbf{P} = \tilde{\mathbf{w}} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Решение системы уравнений (4.5) относительно искомого вектора \mathbf{P} производится по существу таким же образом, как и в случае прямой задачи.

Результаты численных исследований для обратной задачи приведены на рис. 4. Кривая 1, соответствует исходным значениям прогиба в точке x_S (в данном случае координата принималась $\xi=0.55$) полученным в результате решения прямой задачи с применением МКЭ; кривые 2, 3 – нагрузка, задаваемая при моделировании соответствующей прямой задачи и нагрузка, идентифицированная в процессе решения обратной задачи.

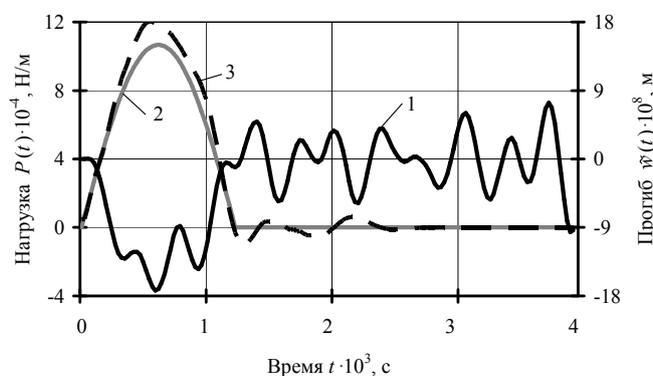


Рис.4. Результаты идентификации нагрузок

5. Постановка задачи управления нестационарными колебаниями цилиндрической оболочки

Пусть на бесконечно длинную круглую упругую цилиндрическую оболочку воздействует нагрузка $Q(t)$ в точке θ_0 , закон изменения во времени которой известен и которая вызывает первичный нестационарный колебательный процесс. Деформирование оболочки предполагается не зависящим от осевой координаты. Предположим также, что на колебания оболочки налагается некоторое условие (критерий управления) в точке θ_S . Для удовлетворения требуемого условия к цилиндрической оболочке прилагается управляющая сила $G(t)$ в точке θ_C , закон изменения которой во времени подлежит определению (рис. 5).

Задача управления нестационарными колебаниями оболочки состоит в нахождении закона изменения управляющей силы во времени для конкретной

точки приложения этой силы. Для этого необходимо решить обратную задачу механики деформируемого твердого тела для цилиндрической оболочки.

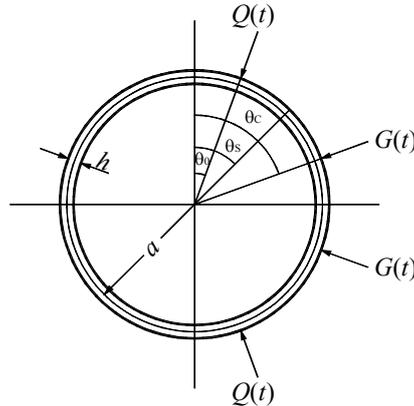


Рис.5. Схема нагружения цилиндрической оболочки

6. Решение задачи управления нестационарными колебаниями цилиндрической оболочки

Уравнения линейных колебаний цилиндрической оболочки с учетом инерции вращения и поперечного сдвига [1] имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial s} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0; \\ k_1^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{a} \right) + \frac{1-\nu^2}{Eh} P - \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - k_1^2 \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi \right) - \gamma^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где u, w — компоненты перемещения срединной поверхности оболочки в радиальном и окружном направлениях соответственно; ψ — угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки; a — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки; $\gamma^2 = \rho(1-\nu^2)/E$; $k_1^2 = k^2(1-\nu)/2$ — коэффициент сдвига; s — окружная координата; P — нагрузка, которая описывается функцией, независимой от продольной координаты и является четной функцией угловой координаты.

В (6.1) нагрузка $P(\theta, \bar{t}) = Q(\theta, \bar{t}) + G(\theta, \bar{t})$, где $Q(\theta, \bar{t}) = Q(\bar{t}) \cdot \delta(\theta - \theta_0)$; $G(\theta, \bar{t}) = G(\bar{t}) \cdot \delta(\theta - \theta_C)$. Здесь $\theta = s/a$ — угловая координата.

Построение решения системы (6.1) при нулевых начальных условиях ищется в виде разложений в ряды Фурье [3].

Для исследования управления колебаниями оболочки в сформулированной постановке достаточно иметь выражения для прогиба $w(\theta, \bar{t})$, и оно следующее:

$$w(\theta, \bar{t}) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} P_0(\tau) \sin(\bar{t} - \tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{(B_k - \omega_{ki}^2)(C_k - \omega_{ki}^2)}{\omega_{ki} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{kj}^2 - \omega_{ki}^2)} \int_0^{\bar{t}} P_k(\tau) \sin \omega_{ki}(\bar{t} - \tau) d\tau \cos k\theta. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует выражение для прогиба оболочки в точке, в которой необходимо выполнить условие управления, и оно имеет вид:

$$w(\theta_S, \bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} Q(\tau) K_Q(\bar{t} - \tau) d\tau + \int_0^{\bar{t}} G(\tau) K_G(\bar{t} - \tau) d\tau, \quad (6.3)$$

где $K_Q(\bar{t}) = K_{Q0}(\bar{t}) + K_{Qk}(\bar{t})$; $K_G(\bar{t}) = K_{G0}(\bar{t}) + K_{Gk}(\bar{t})$, причем

$$K_{Q0}(\bar{t}) = \frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh} \cdot \theta_0 \cdot \sin(\bar{t}); \quad K_{Qk}(\bar{t}) = \sum_{k=1}^K \frac{2(1-\nu^2)r^2}{Eh\pi k} \cdot \sin(k\theta_0) \cdot \cos(k\theta_S) \cdot \Omega_k$$

$$K_{G0}(\bar{t}) = \frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh} \cdot \theta_c \cdot \sin(\bar{t}); \quad K_{Gk}(\bar{t}) = \sum_{k=1}^K \frac{2(1-\nu^2)r^2}{Eh\pi k} \cdot \sin(k\theta_c) \cdot \cos(k\theta_S) \cdot \Omega_k,$$

а выражение для величины Ω_k , входящий в приведенные формулы, таково

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^3 \frac{(B_k - \omega_{ki}^2)(C_k - \omega_{ki}^2)}{\omega_{ki} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{kj}^2 - \omega_{ki}^2)} \cdot \sin(\omega_{ki} \bar{t}).$$

Исследуем случай, когда условием управления является полное устранение колебаний в точке θ_S , т.е. $w(\theta_S, \bar{t}) = 0$. Тогда для нахождения управляющей силы необходимо решить следующее уравнение

$$\int_0^{\bar{t}} Q(\tau) K_Q(\bar{t} - \tau) d\tau = - \int_0^{\bar{t}} G(\tau) K_G(\bar{t} - \tau) d\tau, \quad (6.4)$$

которое является линейным интегральным уравнением Вольтерра I рода относительно функции $G(\bar{t})$.

При решении (6.4) используется метод регуляризации А.Н. Тихонова [2], который позволяет свести решение задачи идентификации к отысканию минимума сглаживающего функционала, что эквивалентно решению следующего матричного уравнения

$$(\mathbf{A}_G^T \mathbf{A}_G + \alpha \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G} = -\mathbf{A}_G^T \mathbf{A}_Q \cdot \mathbf{Q}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{A}_G – матрица, соответствующая ядру $K_G(\bar{t})$, а $\mathbf{A}_Q = K_Q(\bar{t})$.

Численный расчет управляющей силы оболочки согласно (6.5) был выполнен при следующих параметрах: $a=0.3$ м; $h=0.04$ м; $E=2.1 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu=0.3$; $\rho=7800$ кг/м³; $k^2=5/6$; $\theta_0=0.25$; $\theta_S=0.3$; $\theta_C=0.35$; $T=0.05$; $\alpha=10^{-21}$.

Результаты решения уравнения (6.5) приведены на рис. 6, где на графике кривой 1 соответствует закон изменения во времени возмущающей силы, которая вызывает первичное деформирование, а кривой 2 – управляющей силы.

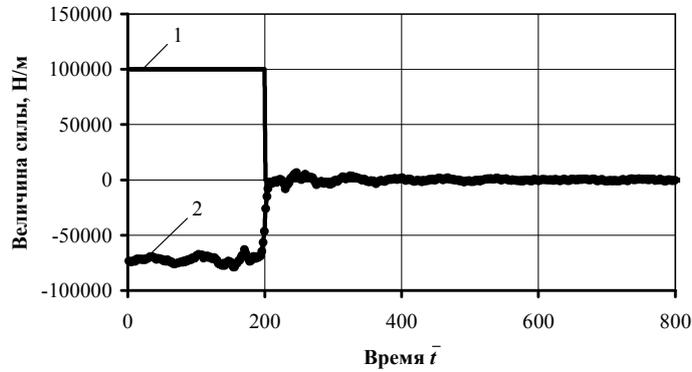


Рис. 6. Закон изменения возмущающей и управляющей сил во времени

На рис. 7 показано изменение прогиба во времени цилиндрической оболочки в точке управления. Кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, а кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление.

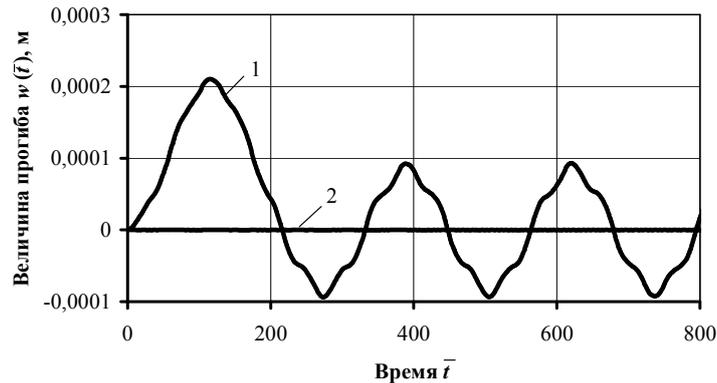


Рис. 7. Результаты решения задачи управления колебаниями цилиндрической оболочки

Далее рассмотрим случай, когда условием критерия управления является некоторое изменение прогиба во времени согласно конкретной временной функции. Тогда уравнение для определения управляющей силы будет иметь следующий вид:

$$\int_0^{\bar{t}} Q(\tau) K_Q(\bar{t}-\tau) d\tau = w(\theta_s, \bar{t}) - \int_0^{\bar{t}} G(\tau) K_G(\bar{t}-\tau) d\tau, \quad (6.6)$$

которое сводится к следующему виду:

$$(A_G^T A_G + \alpha C) \cdot G = w - A_G^T A_Q \cdot Q. \quad (6.7)$$

Кривые, полученные в результате численного расчета согласно (6.7) представлены на рис. 8, причем, кривая 1 отвечает возмущающей силе, а кривая 2 – найденной управляющей силе.

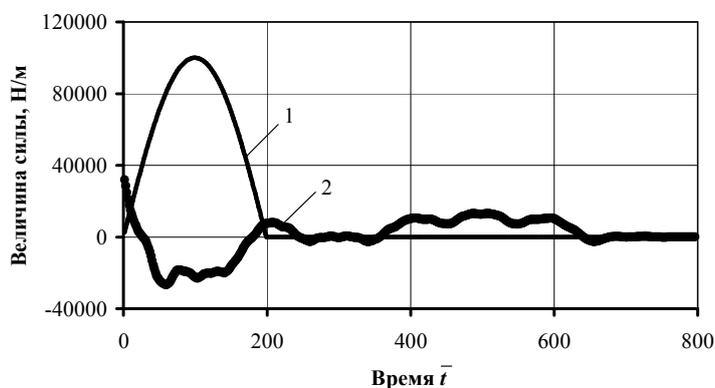


Рис.8. Закон изменения возмущающей и управляющей сил во времени

На рис. 9 изображено изменение нормальных перемещений во времени цилиндрической оболочки в точке управления, кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, а кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление.

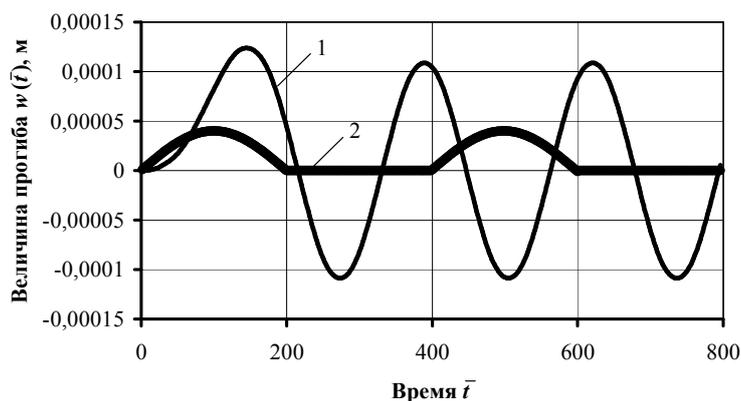


Рис.9. Результаты решения задачи управления колебаниями цилиндрической оболочки

7. Выводы

Построены эффективные методики решения прямых и обратных нестационарных задач для цилиндрических оболочек. Разработаны способы, позволяющие использовать теорию колебаний цилиндрических составных конструкций, у которых разные части изготовлены из различных материалов, для решения некорректных задач по нахождению неизвестных нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолок Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
3. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шарапата А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.