УДК 517 95

# Линейные уравнения в частных производных высшего порядка

Т. З. Чочиев
*Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, Россия*

Решение линейных уравнений второго порядка тесно связано с решением нелинейного уравнения класса Риккати. В работе линейное уравнение второго порядка приведено к системе из двух линейных уравнений первого порядка, при этом ее сопровождает нелинейное уравнение класса Риккати. Строим решение для системы линейных уравнений, находим решение и для нелинейного уравнения класса Риккати.

***Ключевые слова:*** *линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, эквивалентность систем, характеристическое уравнение, понижение порядка, уравнения класса Риккати, уравнения класса Бернулли.*

Рішення лінійних рівнянь другого порядку тісно пов'язано з рішенням нелінійних рівнянь класу Ріккаті. В роботі лінійні рівняння другого порядку приведено к системі з двох лінійних рівнянь першого порядку, при цьом її супроводжує нелінійних рівнянь класу Ріккаті .Строєм рішення для системи лінійних рівнянь, та находімо рішення стосовно нелінійного рівняння класу Рік каті.

***Ключові слова:*** *лінійне діфірінційне рівняння в часткових похідних другого порядку, еквівалентність систем, характеристичне рівняння, зниження порядку, рівняння класу Ріккаті, рівняння класу Бернуллі.*

Solving linear equations of second order is closely related to the solution of nonlinear equations of a class of Riccati. In this paper, a linear equation of second order is given to a system of two linear equations of first order, with its accompanying nonlinear class of Riccati. Building a solution for a system of linear equations, we find a solution for a class of nonlinear equation of Riccati.

***Key words:*** *linear differential equation of second order partial, equivalence of systems, characteristic equation, reduction of order, equations of Bernoulli's class , equations of Riccati's class.*

**1. Линейные уравнения в частных производных высшего порядка.**

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, которое в общем виде представляется [1, 6, 7, 8]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+A\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial u}{\partial t}+D\frac{\partial u}{\partial x}+Eu=f(x,t)\,,\qquad (A^2-4B>0)\quad (1.1)$$

где $0\le t<\infty$, $-\infty<x<\infty$; $A(x,t)$, $B(x,t)$ допускают непрерывные частные производные до второго порядка, $C(x,t), D(x,t)$ допускают непрерывные частные производные до первого порядка, а $E(x,t)$ и $f(x,t)$ – непрерывны в заданной области.

Требуется найти $u(x,t)$, удовлетворяющее уравнению (1.1) и начальным условиям

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=F(x), \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\varphi(x)$ и $F(x)$ – заданные функции (причем $\varphi(x)$ допускает производную первого порядка). Если в соотношении [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1u\right)+C_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+B_1u\right)+D_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}+A_1\frac{\partial u}{\partial x}+E_1^*\right)=f\,, \tag{1.3}$$

где

$$A_1=\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2-4B}\right);\ B_1=\frac{-D+CA_1+\dfrac{\partial A_1}{\partial t}+C_1\dfrac{\partial A_1}{\partial x}}{A_1-C_1};\ C_1=\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2-4B}\right);$$

$$D_1=\frac{D-\dfrac{\partial A_1}{\partial t}-C_1\dfrac{\partial A_1}{\partial x}-CC_1}{A_1-C_1};\ D_1E_1^*=E-\frac{\partial B_1}{\partial t}-C_1\frac{\partial B_1}{\partial x}\,,$$

выполнить указанную операцию, сгруппировать, то придем к уравнению (1.1). С другой стороны, (1.3) есть система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+B_1u=v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+C_1\dfrac{\partial v}{\partial x}+D_1v=D_1(B_1-E_1^*)u+f \end{cases} \tag{1.4}$$

относительно функций $u$ и $v$. (1.4) – сложная система, поэтому составим другую, эквивалентную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+A_1\dfrac{\partial u}{\partial x}+[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]u=\rho, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}+C_1\dfrac{\partial v}{\partial x}+\left(D_1-\dfrac{1}{l}\right)v=f-\dfrac{\rho}{l}, \\ lD_1(B_1-E_1^*)u+\rho=v, \end{cases} \tag{1.5}$$

если $\rho$ – решение третьего уравнения, а $l$ – решение нелинейного уравнения [8]

$$\frac{\partial l}{\partial t}-D_1(B_1-E_1^*)l^2+(B_1-D_1)l+1=0,\quad (l\,|_{t=0}=1) \tag{1.6}$$

класса Риккати.

Докажем эквивалентность систем (1.4) и (1.5). Пусть $\rho$ известна. Из первых двух уравнений (1.5) для $u$ и $v$ будем иметь:

$$u=e^{-\int\limits_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}\left(u_0(\tau)+\int\limits_0^t\rho e^{\int\limits_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}dt\right), \tag{1.7}$$

$$v=e^{-\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}\left(v_0(\sigma)+\int_0^t\left(f-\frac{\rho}{l}\right)e^{\int_0^t\left(D_1-\frac{1}{l}\right)dt}dt\right), \tag{1.8}$$

где $u_0(\tau)$ и $v_0(\sigma)$ – неизвестные функции, $d\tau=\mu(dx-A_1dt)$; $d\sigma=\tilde{\mu}(dx-C_1dt)$. Допуская, что $l$ удовлетворяет уравнению (1.6), легко составить тождественное равенство

$$\frac{1}{l}e^{\int_0^t(D-\frac{1}{l})dt}=e^{\int_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}, \tag{1.6$_1$}$$

при наличии которого формулы (1.7) и (1.8) вкратце переходят к виду:

$$u=e^{-\int_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}(u_0(\tau)+\Phi), \tag{1.7$_1$}$$

$$v=e^{-\int_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}\frac{1}{l}\left(v_0(\sigma)+\int_0^t fe^{\int_0^t(D_1-\frac{1}{l})dt}dt-\Phi\right), \tag{1.8$_1$}$$

где

$$\Phi=\int_0^t\rho e^{\int_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}dt. \tag{1.9}$$

С учетом $(1.7)_1$ и $(1.8)_1$ третье уравнение системы (1.5) относительно $\Phi$ перейдет к равенству

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\left[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}\right]\Phi=L, \tag{1.10}$$

где

$$L=\frac{1}{l}\left[v_0(\sigma)+\int_0^t fe^{\int_0^t(D_1-\frac{1}{l})dt}dt\right]-lD_1(B_1-E_1^*)u_0(\tau). \tag{1.10$_1$}$$

Из (1.10) для $\Phi$ находим:

$$\Phi=e^{-\int_0^t\left[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}\right]dt}\int_0^t Le^{\int_0^t\left[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}\right]dt}dt. \tag{1.11}$$

Она и обеспечивает выполнимость третьего уравнения (1.5) и позволяет определить $\rho$,

$$\rho=e^{-\int_0^t\left[B_1-l_1D_1(B_1-E_1^*)\right]dt}\frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

которым и устанавливается эквивалентность двух систем: (1.4) и (1.5). Но из удовлетворения (1.4) следует выполнимость соотношения (1.3), или, что тоже самое, уравнения (1.1).

Таким образом, $u$ в развернутой форме выглядит:

$$u(\tau,t)=e^{-\int\limits_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}\left[u_0(\tau)+e^{-\int\limits_0^t[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}]dt}\int\limits_0^t Le^{\int\limits_0^t[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}]dt}dt\right],\tag{1.12}$$

где $L$ выражается через $(1.10)_1$.

Из первого начального условия (1.2) имеем: $u_0(\tau)=\varphi(x)$. Далее замечая, что $u=\Psi(\tau,t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial t}-A_1\mu\frac{\partial\Psi}{\partial\tau};$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{v_0(\sigma)}{l}-A_1\mu\varphi'(\tau)-[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]\varphi(\sigma)=F(\sigma).$$

Следовательно,

$$\frac{v_0(\sigma)}{l}=F(\sigma)+A_1\mu\varphi'(\sigma)+[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]\varphi(\sigma).$$

Таким образом, (1.12) в начальных данных есть:

$$u(\tau,t)=e^{-\int\limits_0^t[B_1-lD_1(B_1-E_1^*)]dt}\left\{\varphi(\tau)+e^{-\int\limits_0^t[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}]dt}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^t\left[F(\sigma)+A_1\mu\varphi'(\sigma)-B_1\varphi(\sigma)+\frac{1}{l}\int\limits_0^t fe^{\int\limits_0^t(D_1-\frac{1}{l})dt}dt\right]e^{\int\limits_0^t[lD_1(B_1-E_1^*)+\frac{1}{l}]dt}dt\right\}.$$

Она и удовлетворяет условиям Коши (1.2). Остается исследовать нелинейное уравнение (1.6).

**2. О нелинейном уравнении класса Риккати.**

В настоящем пункте нелинейное уравнение класса Риккати относительно двух неизвестных интегралов удалось разбить на систему из двух линейных уравнений. Решается система уравнений, решение нелинейного уравнения приведено к разрешимому классу Риккати.

**П.2.1. Обобщенное нелинейное уравнение.**

В основе многих дифференциальных уравнений высшего порядка лежит решение нелинейного уравнения класса Риккати [2, 3, 4, 5] (см. (1.6) П.1).

$$\frac{\partial l}{\partial t}+A(x,t)l^2+B(x,t)l+C(x,t)=0,\tag{1.1}$$

где $A, B$ и $C$ – заданные непрерывно-дифференцируемые функции. Через $\lambda$ обозначим корни квадратного трехчлена

$$\lambda=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A},\qquad (B^2-4AC>0).$$

(1.1) допускает представление

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left|\frac{l-\lambda_1}{l-\lambda_2}\right|+\frac{1}{l-\lambda_1}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}-\frac{1}{l-\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}=-A(\lambda_1-\lambda_2)\,. \qquad (1.2)$$

Имеет место следующее важное положение:

Если выполнено равенство

$$e^{-\int A\lambda_1 dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt-e^{-\int A\lambda_2 dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt=A\alpha(\lambda_1-\lambda_2)\,, \qquad (1.3)$$

где $\alpha$ – неизвестна, то

$$\begin{cases} l-\lambda_1=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{\Delta}e^{-\int A\lambda_1 dt}\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt,\\ l-\lambda_2=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{\Delta}e^{-\int A\lambda_2 dt}\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt,\end{cases}$$

где

$$\Delta=e^{-\int A\lambda_2 dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt-e^{-\int A\lambda_1 dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt\,,$$

обращает (1.2) в тождество.

Действительно, из (1.2) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\left|\frac{l-\lambda_1}{l-\lambda_2}\right|=-A(\lambda_1-\lambda_2)+$$

$$+\frac{A\alpha\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt-A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt}{\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt\cdot\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt}\,,$$

а разность второго и третьего членов

$$\frac{\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t}}{l-\lambda_1}-\frac{\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t}}{l-\lambda_2}=\frac{\Delta}{\lambda_1-\lambda_2}\,\frac{\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt-\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt}{\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt\cdot\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt}.$$

Внеся значения этих двух выражений в (1.2), после приведения получим:

$$\left(A\alpha+\frac{\Delta}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{A\alpha\dfrac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}}{\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A\lambda_1 dt}dt}-\frac{A\alpha\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}}{\displaystyle\int A\alpha\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{\int A\lambda_2 dt}dt}\right)=0.$$

Поскольку $\lambda_1\neq\lambda_2$, то второй сомножитель отличен от нуля, а первый,

$$\Delta+(\lambda_1-\lambda_2)A\alpha=0,$$

в развернутой форме есть (1.3).

Таким образом, чтобы удовлетворить равенству (1.2), или, что тоже самое, уравнению (1.1), необходимо установить выполнимость сомножителя (1.3).

Для неизвестных интегралов в (1.3) вводим обозначение

$$u = \int A\alpha \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} e^{\int A\lambda_1 dt} dt, \;\; v = \int A\alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} e^{\int A\lambda_2 dt} dt.$$

Тогда (1.3) представим как систему равенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t} u = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt} v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t} v = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt} u. \end{cases} \tag{1.5}$$

Составим другую, более упрощенную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t} + l^* \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt}\right) u = \rho, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \dfrac{1}{l^*}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt}\right) v = -\dfrac{\rho}{l^*}, \\ \dfrac{l^*}{\lambda_1 - \lambda_2}\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt} \cdot u + \rho = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt} v, \end{cases} \tag{1.6}$$

эквивалентную (1.5), если $\rho$ удовлетворяет третьему уравнению, а $l^*$ есть решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial l^*}{\partial t} - \frac{\frac{\partial \lambda_2}{\partial t}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt} l^{*2} - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\frac{\partial(\lambda_1 - \lambda_2)}{\partial t} l^* - \frac{\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt} = 0,$$

или

$$\frac{\partial l^*}{\partial t} + A_1 l^{*2} + B_1 l^* + C_1 = 0, \tag{1.7}$$

где

$$A_1 = -\frac{\frac{\partial \lambda_2}{\partial t}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt}; B_1 = -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\frac{\partial(\lambda_1 + \lambda_2)}{\partial t}; C_1 = -\frac{\frac{\partial \lambda_1}{\partial t}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\int A(\lambda_1 - \lambda_2)dt}.$$

**2.1. Исследование уравнения (1.7).**

Через $\lambda^*$ обозначим корни квадратного трехчлена (1.7):

$$\lambda^* = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1}.$$

Тогда оно представимо:

$$\frac{\partial l^*}{\partial t} + A_1(l_1^* - \lambda_1^*)(l^* - \lambda_2^*) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\ln\left|\frac{l^* - \lambda_1^*}{l^* - \lambda_2^*}\right| + \frac{1}{l_1^* - \lambda_1^*}\frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} - \frac{1}{l^* - \lambda_2^*}\frac{\partial \lambda_2^*}{\partial t} = -A_1(\lambda_1^* - \lambda_2^*). \tag{2.1}$$

Также, как и для случая уравнения (1.3), для (1.7) доказывается аналогичное положение:

Если выполняется равенство

$$e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1 dt}dt-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt=A_1\alpha^*(\lambda_1^*-\lambda_2^*), \tag{2.2}$$

то формулы

$$\begin{cases} l^*-\lambda_1^*=\dfrac{\lambda_1^*-\lambda_2^*}{\Delta^*}e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}\displaystyle\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1^* dt}dt,\\ l^*-\lambda_2^*=\dfrac{\lambda_1^*-\lambda_2^*}{\Delta^*}e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}\displaystyle\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\Delta^*=e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt-e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1^* dt}dt$,

обращают (2.1) в тождество.

Необходимо установить выполнимость равенства (2.2). Поскольку в нем два неизвестных интеграла, то составляется подобное (2.2) равенство

$$e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1^* dt}dt-e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt=-A_1\alpha^*(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma, \tag{2.4}$$

где

$$\gamma=\frac{\dfrac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}}{\dfrac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}}\left(e^{\int A_1(\lambda_1^*-\lambda_2^*)dt}-\int\frac{\dfrac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{-\int A_1(\lambda_1^*-\lambda_2^*)dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}dt\right). \tag{2.5}$$

Имеет место следующая теорема:

**Теорема.** Если неизвестные интегралы, содержащиеся в (2.2) и (2.4), определены соответственно

$$\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda^* dt}dt=\begin{cases} e^{\int\frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt}, & \text{когда } \lambda^*=\lambda_2^*,\\ e^{-\int\frac{re^{-\int A_1\lambda_2^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}}{r(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma}\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1^* dt}dt}, & \text{когда } \lambda^*=\lambda_1^*, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $r$ – решение нелинейного уравнения

$$\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{e^{-\int A_1(\lambda_1^*-\lambda_2^*)dt}\dfrac{\partial\lambda_2}{\partial t}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}r^2-\frac{\gamma\dfrac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}-e^{\int A_1(\lambda_1^*-\lambda_2^*)dt}\dfrac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}}{(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma}r-\frac{\dfrac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}}{(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma}=0, \tag{2.7}$$

то равенства (2.2) и (2.4) обращаются в тождества.

Исследуем сперва уравнение (2.7), которое вкратце выглядит так:

$$\frac{\partial r}{\partial t}+A^* r^2+B^* r+C^*=0\,, \tag{2.8}$$

где

$$A^*=\frac{e^{-\int A_1(\lambda_1^*-\lambda_2^*)dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t};B^*=-\frac{\gamma\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}-e^{\int A_1(\lambda_1^*-\lambda_2^*)dt}\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}}{(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma};C^*=-\frac{\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}}{(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma},$$

а после докажем теорему.

Замечаем, что преобразование вида

$$r=\frac{1}{\int A^* dt-v_1} \tag{2.9}$$

(2.8) переводит в уравнение

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}-(B^*+2C^*\int A^* dt)v_1+C^* v_1^2+(B^*+C^*\int A^* dt)\int A^* dt=0\,,$$

относящееся к классу Бернулли,

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+C^* v_1^2-C^*\int A^* dt\cdot v_1=0\,, \tag{2.10}$$

так как его свободный член

$$B^*+C^*\int A^* dt=0\,.$$

Следовательно, построив $v_1$, из (2.9) находим $r$: причем, вошедшую в $v_1$ неизвестную постоянную определим из условия $r|_{t=0}=1$. Но из выполнимости (2.7) следует тождество

$$e^{-\int\frac{re^{-\int A_1\lambda_2^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}}{r(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma}\frac{\partial\lambda_1^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1^* dt}dt}=re^{\int\frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt}, \tag{2.11}$$

которым ниже воспользуемся.

Перейдем к доказательству теоремы. В уравнении (2.2) вместо неизвестных интегралов подставим их соответствующие значения из (2.6),

$$e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}\cdot e^{-\int\frac{re^{-\int A_1\lambda_2^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_1^* dt}}{r(\lambda_1^*-\lambda_2^*)\gamma}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_1^* dt}dt}-$$

$$-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}\cdot e^{\int\frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt}=A_1\alpha^*(\lambda_1^*-\lambda_2^*),$$

или, заменив второй множитель первого члена правой частью (2.11), после группировки придем:

$$\frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt}=A_1\alpha^*.$$

Обе части умножим на $\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}$ и воспользуемся (2.6), когда $\lambda^*=\lambda_2^*$; легко убедимся в тождестве:

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt}=\frac{\partial}{\partial t}e^{\int \frac{re^{-\int A_1\lambda_1^* dt}-e^{-\int A_1\lambda_2^* dt}}{\lambda_1^*-\lambda_2^*}\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda_2^* dt}dt}.$$

Аналогичным образом доказывается выполнимость второго равенства (2.4). Но если (2.2) удовлетворяет, то формулы (2.3) обращают уравнения (2.1) в тождество; то есть, уравнение (1.7) удовлетворяет, из последнего следует тождественное соотношение,

$$\frac{1}{l^*}e^{\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\frac{1}{l^*}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}=e^{-\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}, \quad (2.12)$$

которым воспользуемся ниже.

**П.3. О решении системы (1.6).**

После того как находим неизвестные интегралы $\int A_1\alpha^*\frac{\partial\lambda^*}{\partial t}e^{\int A_1\lambda^* dt}$ (см.(2.6)), построим $l^*-\lambda_1^*$ и $l^*-\lambda_2^*$ (см. (2.3)), представляется возможность изучить систему (1.6) В частности, для неизвестных $u$ и $v$ будем иметь соответственно:

$$u=e^{\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}\times$$
$$\times\left(u_0(x)-\int\rho e^{-\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}dt\right),$$

$$v=e^{-\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\frac{1}{l^*}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}\times$$
$$\times\left(v_0(x)+\int\frac{\rho}{l^*}e^{\int\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}+\frac{1}{l^*}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}dt\right),$$

где $u_0(x)$ и $v_0(x)$ – неизвестные функции. Через $\Phi$ обозначим:

$$\Phi = \int \rho e^{-\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt} dt\,. \qquad (3.1)$$

Воспользовавшись тождеством (2.12), функции $u$ и $v$ вкратце переходят:

$$\begin{cases} u = e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}(u_0(x)-\Phi), \\ v = \dfrac{1}{l^*}e^{-\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt}(v_0(x)+\Phi). \end{cases} \qquad (3.2)$$

Подставив теперь (3.2) в третье равенство системы (1.6), относительно $\Phi$ получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+M\Phi = L,$$

где

$$M = \frac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}+\frac{1}{l^*(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt},$$

$$L = -\left(\frac{l^*}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\partial\lambda_2}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}u_0(x)+\frac{1}{l^*(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}e^{\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}v_{0(x)}\right).$$

Следовательно,

$$\Phi = e^{-\int Mdt}\int Le^{\int Mdt}dt\,. \qquad (3.3)$$

Сравнивая (3.1) с (3.3), сразу находим $\rho$,

$$\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial t}e^{\int \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial t}+l^*\frac{\partial\lambda_2^*}{\partial t}e^{-\int A(\lambda_1-\lambda_2)dt}\right)dt},$$

устанавливающую эквивалентность системы (1.5) и (1.6). Но выполнимость (1.5) означает удовлетворение уравнения (1.3), то есть, (1.4) обращает (1.2) в тождество, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА


1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М., 1962. – 768 с.
2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., 1955. – 656 с.
3. Бренштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Госиздат техн. лит., 1953. – 468 с.
6. Чочиев Т.З. О методах решения дифференциальных уравнений математической физики и их приложения. Ч.II. – Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2004. – 116 с.
7. Чочиев Т.З. Термоупругость и линейные уравнения в частных производных высшего порядка // Вестник Харьковского нац. университета. – №780. – С.175-186.
8. Чочиев Т.З. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию. – Владикавказ, 2009. – С.144-155.

Надійшла у першій редакції 22.04.2010, в останній - 26.10.2010.