УДК 532.546

Решение одной задачи нелинейной фильтрации

Г. В. Голубев

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

Рассматривается задача определения параметров фильтрации в неоднородном пласте. Мы получили начальные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных с дивергентной главной частью и установили его тип. Мы поставили задачу и предложили метод решения на основе метода Галеркина с конечными элементами. Дан также общий алгоритм и ряд примеров.

Ключевые слова: *фильтрация, неоднородный пласт, метод Галеркина, конечные элементы.*

Розглянуто задачу визначення параметрів фільтрації в неоднорідному пласті. Ми отримали початкові нелінійні диференціальні рівняння в частинних похідних з дивергентною головною частиною та встановили його тип. Ми даємо постановку задачі та пропонуємо метод розв'язку на основі методу Гальоркіна з кінцевими елементами. Дано також загальний алгоритм і ряд прикладів.

Ключові слова: *фільтрація, неоднорідний пласт, метод Гальоркіна, кінцеві елементи.*

We consider the problem on determination of filtration parameters in nonuniform purely stratum. We derived the initial nonlinear differential partial equation with the main divergent part and established its type. We formulate this problem and suggest the method for solution on the basis Galerkin method with finite elements. Also given are the general algorithm and a number of examples.

Key words: *filtration, nonuniform stratum, Galerkin method, finite elements.*

В работе рассматривается задача определения фильтрационного параметра пласта в случае, когда при движении жидкости в нем справедлив закон с начальным градиентом давления. Для решения ее используется метод Галеркина с конечными элементами. Изложенный алгоритм применим для смешанных элементов. Работа скважин моделируется дискретными логарифмическими особенностями. Задача приводится к решению нелинейной системы алгебраических уравнений, для чего применим программный продукт Mathcad.

Рассмотрим фильтрацию однофазной жидкости в неоднородном горизонтальном пласте [1]. Закон фильтрации возьмем нелинейный

$$\overline{v} = -\frac{k}{\mu}\Phi(|\nabla p|, \beta)\nabla p, \tag{1}$$

где функция Φ указанных аргументов удовлетворяет условиям: $\Phi \geq 0, d\Phi / d|\nabla p| \geq 0.$ Здесь $\overline{v}-$скорость фильтрации, $p-$давление, $k-$ проницаемость пласта, $\mu-$вязкость жидкости, $\beta-$предельное или начальное значение градиента давления, при превышении которого скорость фильтрации резко возрастает или становится ненулевой для модели фильтрации с начальным градиентом давления. В качестве второго исходного соотношения возьмем уравнение, которое получается из уравнения неразрывности и зависимостей плотностей жидкости и пористой среды от давления. Оно имеет следующий вид

$$div(h\overline{v}) + f(x, y, t) + \beta^{\bullet} h\partial p / \partial t = 0, \tag{2}$$

где $h -$ толщина пласта, $\beta^{\bullet} -$ упругоемкость, $f -$ плотность отбора, $t -$ время.

Из (1) и (2) получаем при фильтрации несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{kh}{\mu}\Phi\frac{\partial p}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{kh}{\mu}\Phi\frac{\partial p}{\partial y})=f. \qquad (3)$$

При движении с начальным градиентом давления (НГД) $\Phi = 0$ при $|\nabla p| < \beta$ и $\Phi = 1-\beta/|\nabla p|$ при $|\nabla p| \geq \beta$. Считается, что $\beta = \alpha/\sqrt{k}, (\alpha -$ постоянная). Обозначим $\sqrt{k} = u$, тогда $\Phi = \Phi(|\nabla p|, \alpha/u)$ и уравнение (3) запишется

$$\frac{\partial}{\partial x}(ahu^2 - ah\frac{u\alpha}{|\nabla p|})+\frac{\partial}{\partial y}(bhu^2 - bh\frac{u\alpha}{|\nabla p|})=\mu f. \qquad (4)$$

Здесь использованы обозначения: $a = \partial p/\partial x, b = \partial p/\partial y.$ Для уравнения (4) будем также пользоваться сокращенной формой записи

$$Lu = g, g = \mu f, \qquad (5)$$

где $L -$ нелинейный дифференциальный оператор, $u -$ точное распределение искомой функции в области. Исследуемую задачу сформулируем следующим образом. В области фильтрации D с границей ∂D найти функцию u, удовлетворяющую в ней дифференциальному уравнению (4) и принимающую на линии Γ известные значения (данные Коши)

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\tau), \qquad (6)$$

где носитель данных Коши Γ ни в одной точке не принимает характеристического направления, $\tau -$ дуговая абсцисса линии Γ.

Для решения этой задачи используем один из вариантов метода Галеркина с конечными элементами Разобьем область D на конечные элементы

$$D = \bigcup_{e=1}^{n} D_e. \qquad (7)$$

Обозначим через s общее число узлов типичного конечного элемента D_e (или просто e); $q -$ число степеней свободы в узле; $N_e = sq$; $\omega_1^e, \omega_2^e, ..., \omega_{N_e}^e -$ элементные базисные функции; $u_1^e, u_2^e, ..., u_{N_e}^e -$ узловые параметры элемента, которыми могут быть, в частности, значения функции в узлах; $n -$ число конечных элементов в области. Заметим, что здесь допускается аппроксимация области треугольными, четырехугольными или смешанными элементами с различным числом узлов и узловых параметров. Приближенное распределение искомой функции на элементе e будем искать в виде разложения по базису

$$u_h^e = \sum_{i=1}^{N_e} \omega_i^e(x, y) u_i^e. \qquad (8)$$

При использовании глобальной нумерации узловых параметров выражение (8) может быть записано в форме

$$u_h^e = \sum_{j=1}^{m} \omega_j^e(x, y) u_i. \qquad (9)$$

Здесь $\omega_j^e(x,y)=0$ для всех j, не равных соответствующим элементу e номерам, $m-$общее число узловых параметров системы. Таким образом, из общего числа m часть N_e номеров узловых параметров принадлежит элементу e. В матричной форме распределение (9) будет иметь вид

$$u_h^e=\Omega^e\overline{u}, \quad (10)$$

где $\Omega^e=(\omega_1^e,\omega_2^e,...,\omega_j^e,...,\omega_m^e)$ (расширенная матрица-строка базисных функций для элемента e), $\overline{u}=(u_1,u_2,...,u_j,...,u_m)^ò$ (узловой вектор системы).

Приближенное распределение искомой функции во всей области запишется следующим образом

$$u_h=\sum_{e=1}^{n}u_h^e=\sum_{e=1}^{n}\sum_{i=1}^{N_e}\omega_i^e(x,y)u_i^e. \quad (11)$$

Если же использовать матричную форму представления решения (10), то функция u_h может быть записана в виде

$$u_h=\sum_{e=1}^{n}\Omega^e\overline{u}=\Omega\overline{u}, \quad (12)$$

где обозначено

$$\Omega=\sum_{e=1}^{n}\Omega^e. \quad (13)$$

Из (13) следует, что элемент $\omega_j(x,y)$ матрицы Ω подсчитывается по формуле

$$\omega_j(x,y)=\sum_{e=1}^{n}\omega_j^e(x,y), \quad (14)$$

т.е. каждая базисная функция равна сумме элементных базисных функций.

При подстановке конечно-элементной аппроксимации (8) в уравнение (2) получается некоторая невязка

$$R^e=L^e u_h^e-\rho^e. \quad (15)$$

где L^e-ограничение оператора L на функции, определенные в D_e. С приближением аппроксимирующего решения u_h^e к точному невязка R^e должна стремиться к нулю. В методах минимизации невязок формулируются различные условия, при выполнении которых невязка будет малой. В методе взвешенных невязок требуют, чтобы взвешенный интеграл

$$\int_{D_e} w^e\varphi(R^e)dD_e$$

удовлетворял критерию малости, например, обращался в нуль в смысле некоторого средневзвешенного в D_e. Потребуем, чтобы

$$\int_{D_e} w^e(x,y)R^e(x,y)dD_e=0. \quad (16)$$

Здесь через $w^e(x,y)$ обозначена весовая функция. После подстановки сюда невязки R^e из (15) получим

$$K^e u_h^e - G^e = 0,$$

где обозначено

$$K^e u_h^e = \int_{D_e} L^e(\sum_{j=1}^{m} \omega_j^e(x,y) u_j) w^e(x,y) dD_e, \quad G^e = \int_{D_e} g^e(x,y) w^e(x,y) dD_e,$$

причем $K^e u_h^e$ зависят от величин u_j ввиду нелинейности исходного дифференциального уравнения (3). Глобально имеем

$$Ku_h - G = 0, \qquad (17)$$

где $Ku_h = \sum_{e=1}^{n} K^e u_h^e, \quad G = \sum_{e=1}^{n} G^e.$

Таким образом, для определения узловых параметров системы получается система нелинейных алгебраических уравнений. Решение ее обеспечивает обращение в нуль глобальной взвешенной средней невязки

$$\int_D (Lu_h - g) w dD = 0.$$

Соотношения (14) и (15) являются условиями ортогональности невязки подпространству, порождаемому весовыми функциями w, которые остаются в нашем распоряжении. При поиске таких функций может быть использована известная теорема о проекциях [2]. Допустимо, в частности, согласно критерию Галеркина определять весовые функции как базисные функции. Нелинейная система уравнений со многими неизвестными (17), записанная в операторной форме, может быть решена каким-либо итерационным методом, созданным для систем алгебраических и трансцендентных уравнений и имеющимся в пакетах прикладных программ. В этом случае производится обращение из основной программы к соответствующим стандартным подпрограммам, основанным на использовании методов Ньютона, обобщенного Стеффенсона, Бройдена и др Если для решения нелинейной системы применяется программный продукт Mathcad, то используется итерационный метод Левенберга-Маркардта, являющийся разновидностью градиентного метода. Имеется ряд существенных ограничений.

Произведем одну из возможных конкретизаций рассматриваемого алгоритма. Пусть область D представляется как объединение прямоугольных подобластей $D = \bigcup D_{\nu s}$. Будем использовать только прямоугольные элементы и билинейные базисные функции при лагранжевой интерполяции. В этом случае для узловых параметров более целесообразна двухиндексная нумерация вместо одноиндексной, использованной в формуле (9) или двухиндексной, но другого типа в формуле (8). Теперь примем $u_{ij} = u(x_i, y_j)$. Нелинейная система алгебраических уравнений (17) принимает тогда следующий вид

$$\sum_{k_{11}+\ldots+k_{NN}=2} c_2(k_{11},\ldots,k_{NN}) \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} u_{ij}^{k_{ij}} a_{\nu s}^{ij} - \sum u_{ij} b_{\nu s}^{ij} = G_{\nu s}, \qquad (18)$$

$$(\nu = 0,1,\ldots,N+1; s = 1,2,\ldots,M),$$

где использованы обозначения

$$a_{\nu s}^{ij}=\sum_{\nu,s}\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_{\nu+1}}\int\limits_{y_{s-1}}^{y_{s+1}}[\frac{\partial}{\partial x}(ah\omega_{ij}^{k_{ij}}(x,y))+\frac{\partial}{\partial y}(bh\omega_{ij}^{k_{ij}}(x,y))]w_{\nu s}(x,y)dxdy,$$

$$b_{\nu s}^{ij}=\sum_{\nu,s}\int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_{\nu+1}}\int\limits_{y_{s-1}}^{y_{s+1}}[\frac{\partial}{\partial x}(ah\frac{\alpha}{|\nabla p|}\omega_{ij}(x,y))+\frac{\partial}{\partial y}(bh\frac{\alpha}{|\nabla p|}\omega_{ij}(x,y))]w_{\nu s}(x,y)dxdy,$$

$$G_{\nu s}=\iint\limits_{(D)}\mu\rho w_{\nu s}(x,y)dxdy.$$

Здесь $c_2(k_{11},k_{12},...,k_{NM})-$ это полиномиальные коэффициенты. В первой сумме, стоящей в левой части системы (18), суммирование распространяется на все последовательности неотрицательных чисел $(k_{11},k_{12},...,k_{NM})$, для которых

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}k_{ij}=2.$$

Уравнение (18) представляет собой проекционно-разностный аналог исходного дифференциального уравнения (4), а вся совокупность таких уравнений при $\nu=0,1,...,N+1; s=1,2,...,M$ есть нелинейная система алгебраических уравнений, подлежащая решению с использованием пакетов прикладных программ. При этом, коэффициенты $a_{\nu s}^{ij}$ и $b_{\nu s}^{ij}$ равны нулю, если $|i-k|>1$ или $|j-s|>1$, т.е. ненулевыми будут следующие коэффициенты $a_{\nu s}^{\nu s},a_{\nu s}^{\nu,s-1},a_{\nu s}^{\nu,s+1},a_{\nu s}^{\nu-1,s-1},a_{\nu s}^{\nu-1,s+1},a_{\nu s}^{\nu-1,s}$ (то же для коэффициентов $b_{\nu s}^{ij}$).

Нелинейная система для определения узловых параметров может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$K(\overline{u})\overline{u}=\overline{G}, \tag{19}$$

где $K(\overline{u})-$ матрица, зависящая от решения; $\overline{u}=(u_1,u_2,...,u_{N+M+2})^{ò}$ – вектор – столбец неизвестных, $\overline{G}=(G_1,G_2,...,G_{N+M+2})^{ò}$ – вектор-столбец правых частей. Решение уравнения (19) осуществляется разными методами. Все они являются итерационными. Можно прибегнуть к помощи пакетов прикладных программ (Mathcad, Maple и др.), а можно составить и свою программу. Две такие программы были составлены студентами-старшекурсниками КГТУ им. А.Н. Туполева. Одна из них использовала метод простой итерации, когда уравнение многократно решается с последовательными уточнениями значений матрицы $K(\overline{u})$. Зададимся начальным приближением $\overline{u}=\overline{u}_0$ и подсчитаем матрицу $K(\overline{u}_0)=K_0$, а затем найдем уточненное значение $\overline{u}:\overline{u}_1=K_0^{-1}\overline{g}$. В результате продолжения этой процедуры получаем итерационный процесс $\overline{u}_i=K_{i-1}^{-1}\overline{g}$, который продолжается до тех пор, пока разность между $\overline{u}_i$ и $\overline{u}_{i-1}$ не достигнет желаемой точности. Таким образом, алгоритм решения в этом случае складывается из шагов.

1. По начальному приближению (или опорной точке), выбор которой играет очень важную роль, подсчитываются коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений. Как показывают расчеты, при компьютерных

вычислениях осуществляется выход на ближайшее по норме решение системы. А оно может оказаться не тем, которое нас интересует.

2. Производится решение СЛАУ каким-либо методом.

3. Подсчитывается разность $\overline{u}_1 - \overline{u}_0$, а затем процесс повторяется до тех пор, пока разность не достигнет выбранной точности.

Другой алгоритм является более общим. Он сводится к проведению итераций с релаксацией по нелинейности $K_{i-1}\hat{\overline{u}}_i = \overline{g}$, $\overline{u}_i = \omega\hat{\overline{u}}_i + (1-\omega)\overline{u}_{i-1}$. Матрица K_{i-1} подсчитывается при этом для значений вектора $\overline{u} = \overline{u}_{i-1}$, т.е. с предыдущего шага. Параметр релаксации ω берется из интервала $[0,1]$ и находится экспериментально. Его введение позволяет ускорить сходимость процесса. Для линейной задачи при $\omega = 1$ решение находится за одну итерацию. В обоих алгоритмах главным по существу является процесс последовательного решения СЛАУ. В связи с этим возникает вопрос о выборе метода решения СЛАУ с матрицей K_{i-1}. Эти матрицы при большом числе узлов могут иметь порядок в несколько сот и являются ленточными. Одним из возможных методов решения является метод последовательного исключения Гаусса. С использованием современных компьютеров применение метода Гаусса является достаточно эффективным и целесообразным. Объясняется это тем, что для областей сложной формы размеры конечных элементов (а следовательно, и шагов неравномерной сетки) могут сильно отличаться, что заметно замедляет скорость сходимости итерационных методов. Использование элементов различных типов и их нерегулярность делают более сложной структуру матрицы и затрудняют применение ряда апробированных алгоритмов, например, метода переменных направлений. При применении метода Гаусса, а также и других прямых методов решения СЛАУ, например, Холесского, весьма важным является такой выбор упорядоченности конечных элементов и узлов, при которой матрица системы имеет наименьшую ширину ленты. Это позволяет усилить эффективность процесса решения. При рассмотрении примеров по предложенному алгоритму интересно прежде всего изучить такой, для которого существует точное решение и можно оценить погрешность приближенного. Рассмотрим радиальную нелинейную фильтрацию с НГД в круговом пласте с центральной скважиной для двух законов изменения проницаемости: 1) линейного $k = k_0(1+ar)$, 2) экспоненциального $k = k_0\exp(-\varepsilon r)$. В этих случаях могут быть записаны соответствующие распределения давления и при расчете примеров задача как бы обращается: считается заданным распределение давления и данные Коши, ищется распределение проницаемости. Полученное приближенное решение сравнивается с точным. Соответствующие распределения давления для указанных случаев имеют вид

$$p = \frac{a_1}{k_0}\ln\frac{r}{1+ar} + \frac{2\alpha}{a\sqrt{k_0}}\sqrt{1+ar} + b_1, p = \frac{a_1}{k_0}Ei(\varepsilon r) + \frac{2\alpha}{\varepsilon\sqrt{k_0}}e^{-\varepsilon r/2} + b_1.$$

где $a_1, b_1, k_0, a, \varepsilon -$ постоянные величины, $Ei -$ интегральная показательная функция, $a_1 = Q\mu / 2\pi h, Q -$ дебит скважины. Приближенное решение искалось в узловых точках $r = j\Delta h, j = 2,3,...,20, \Delta h = 0,05,$ интервала $r \in (0,1]$; данные Коши ставились при $r = 0,05$. Нелинейная система решалась итерационным одношаговым методом последовательной верхней релаксации-Ньютона. В процессе расчетов изменялись наборы параметров, от которых зависит решение.

Относительная погрешность везде является небольшой, менее одного процента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика-М.: Недра, 1993.-416с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред.-М.: Мир, 1977.-404с.

Надійшла – 01.03.2011.