

УДК 539.3:534.1

## Моделювання коливань шаруватих оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні

Н. В. Сметанкіна

*Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, Україна*

У статті запропоновано метод дослідження нестационарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні. Метод ґрунтується на розвиненні шуканих функцій у тригонометричні ряди. Динамічна поведінка оболонок досліджується в рамках теорії першого порядку, що враховує деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у кожному шарі. Модель ударної взаємодії базується на контактному законі Герца. Розглянуто коливання п'ятишарової оболонки. Теоретичні результати добре узгоджуються з експериментальними даними.

**Ключові слова:** шарувата оболонка, складна форма, ударне навантаження, нестационарні коливання.

В статье предложен метод исследования нестационарных колебаний слоистых незамкнутых цилиндрических оболочек со сложной формой плана при ударном нагружении. Метод основан на разложении искомых функций в тригонометрические ряды. Динамическое поведение оболочек исследуется в рамках теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига, обжатие по толщине и инерции вращения нормального элемента в каждом слое. Модель ударного взаимодействия основана на контактном законе Герца. Рассмотрены колебания пятислойной оболочки. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** слоистая оболочка, сложная форма, ударное нагружение, нестационарные колебания.

The paper presents the method for analysis of non-stationary vibrations of laminated non-closed cylindrical shells with a complicated shape in plan view at impact loading. The method is based on expansion of the sought-for functions into trigonometrical series. Dynamical behavior of shells is investigated within the framework of the first order theory accounting to transverse shear strains, compression on width and normal element rotation inertia in each layer. Model of impact interaction is based on the Hertzian contact law. Vibrations of a five-layer shell are considered. The theoretical results are consistent with experimental data.

**Key words:** laminated shell, complicated shape, impact loading, non-stationary vibrations.

### 1. Вступ

Шаруваті конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з однорідними й тому широко застосовуються в різних галузях техніки. Розрахунок параметрів динамічного відгуку при ударному навантаженні є важливим напрямком дослідження коливань шаруватих конструкцій.

У статтях [1, 2] за допомогою методу скінчених елементів розглянуті шаруваті кругові пластини при ударному впливі. Встановлено, що такі пластини мають більш високий опір удару, ніж монолітні пластини рівної маси. Результати скінченно-елементного моделювання добре погоджуються з експериментальними даними. У роботі [3] запропоновано аналітичну модель ударної взаємодії ударника й шаруватих шарнірно опертих прямокутних

панелей. Переміщення, напруження й деформації в шарах обчислювалися методом скінченних елементів. У статті [4] досліджено перехідні процеси у шарнірно опертих шаруватих композитних циліндричних та сферичних оболонкових панелях при низькошвидкісному ударі у гідротеплових середовищах. Скінченно-елементний аналіз проведено у рамках геометрично нелінійної теорії. Модель зіткнення заснована на модифікованому контактному законі Герца.

Аналіз наведених робіт дозволяє зробити висновок, що для дослідження нестационарних коливань шаруватих конструкцій при ударному навантаженні найчастіше використовуються чисельні методи, а саме, метод скінченних елементів. В аналітичному вигляді розв'язок таких задач одержано тільки для шаруватих пластин і оболонок канонічної форми в плані.

Таким чином, розробка методів розв'язання задач нестационарної динаміки шаруватих оболонок зі складною формою плану, що дозволяють подати розв'язок у аналітичній формі є актуальним питанням.

У роботі [5] на основі методу розширення заданої області розглянуто задачу про нестационарні коливання шаруватої пластини складної форми у плані при ударному навантаженні. У даній роботі запропоновано метод розв'язання задачі про нестационарні коливання шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану, який дає можливість одержати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

## 2. Постановка задачі

Розглядається незамкнена шарувата незамкнена циліндрична оболонка радіуса  $R$ . Оболонка складається з  $I$  ізотропних шарів постійної товщини  $h_i$  та займає на координатній поверхні (зовнішня поверхня першого шару) область  $\Omega$ , що обмежена контуром  $\Gamma: x_\Gamma = x(s), y_\Gamma = y(s)$  ( $s$  – поточна довжина дуги). Координата  $x$  змінюється вздовж твірної, координата  $y$  – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки. Додатний напрям осі  $Oz$  збігається з напрямом зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Удар наноситься індентором масою  $M$  з напівсферичною кінцевою частиною радіуса  $r$ , який скидається з висоти  $H$  на зовнішню поверхню першого шару оболонки. Швидкість його зіткнення з оболонкою визначається за формулою

$$V_z = \sqrt{2gH},$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння. Розглядається низькошвидкісний удар, коли деформації оболонки залишаються пружними.

Передбачається, що область взаємодії індентора й оболонки є круг радіуса  $a(t)$  із центром у точці з координатами  $(x_0, y_0)$  [6]. Радіус області контакту обчислюється за формулою

$$a(t) = \left[ \frac{3}{16} F(t)(\theta_1 + \theta) \right]^{1/3},$$

де

$$\theta_1 = \frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}, \quad \theta = \frac{4(1-\nu^2)}{E};$$

$F(t)$  – сила контактної взаємодії індентора й оболонки,  $t$  – час,  $E_1$  та  $\nu_1$  – модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу першого шару оболонки,  $E$  та  $\nu$  – відповідні характеристики матеріалу індентора.

Рівняння руху індентора має вигляд

$$M z_{,tt} = M g - F(t), \quad z(0) = 0, \quad z_{,t}(0) = V_z, \quad (2)$$

де  $z = z(t)$  – переміщення індентора.

Умова сумісності переміщення індентора й оболонки записується в такому вигляді [7]:

$$w_0 + \alpha_c - z \geq 0. \quad (3)$$

Тут  $\alpha_c$  – контактне зближення індентора й оболонки в точці дотику  $(x_0, y_0)$ ,  $w(x_0, y_0, t)$  – прогин зовнішньої поверхні першого шару оболонки в точці  $(x_0, y_0)$ .

Контакт індентора й оболонки відбувається при перетворенні нерівності (3) на рівність

$$w_0 + \alpha_c - z = 0. \quad (4)$$

Контактне зближення  $\alpha_c$  визначається з розв'язку задачі Герца [8] про здавлення кулі в пружний півпростір

$$\alpha = \kappa_1 F^{2/3},$$

де

$$\kappa_1 = \left[ \frac{9(\theta_1 + \theta)^2}{256r} \right]^{1/3}.$$

### 3. Метод розв'язання

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині й інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару,

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k=1,2,3, \quad i=\overline{1,I}, \quad (5)$$

де  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ,  $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$ ;  $u_k = u_k(x, y, t)$  ( $k=1,2,3$ ) – переміщення точки

координатної поверхні в напрямку координатних осей;  $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$  ( $k=1,2$ ) – кути повороту нормального елемента в  $i$ -му шарі навколо координатних осей  $Ox$  і  $Oy$ ;  $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$  – обтиснення нормального елемента в  $i$ -му шарі.

З варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [7] одержимо рівняння руху оболонки під впливом навантаження **P**

$$[\Omega^p]U_{,tt} - [\Lambda]U = P, (x, y) \in \Omega, U = U_{,t} = 0, t = 0, \quad (6)$$

і систему граничних умов на контурі  $\Gamma$

$$[B^\Gamma] U = P^\Gamma, (x, y) \in \Gamma, \quad (7)$$

де  $[\Omega^p]$  та  $[\Lambda]$  – симетричні матриці;

$$U = \{u_j(x, y, t)\}, P^\Gamma = \{p_j^\Gamma(x, y, t)\}, P = \{p_j(x, y, t)\}, p_j = 0, j \neq 3, p_3 = p_z(x, y, t);$$

$p_z$  – контактний тиск,  $B_{ij}^\Gamma = \chi_i^1 B_{ij}^u + \chi_i^2 B_{ij}^\sigma, i, j = \overline{1, 3I+3}$ .

Вигляд елементів матриці  $[B^\Gamma]$  та вектора граничних навантажень  $P^\Gamma$  залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам  $\chi_i^1$  та  $\chi_i^2$  (7), можна моделювати необхідні граничні умови на контурі оболонки.

Метод розв'язання задачі (6), (7) базується на прийомі розширення заданої області [5, 7]. Вихідна оболонка розширюється до допоміжної оболонки, форма і граничні умови якої обираються таким чином, щоб розв'язок задачі можна було одержати у аналітичній формі. Розв'язок має найбільш простий вигляд, якщо як допоміжну обрати прямокутну в плані шарнірно оперту оболонку. Тоді розв'язок вихідної задачі можна записати у вигляді розвинень у тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови шарнірного опирання.

Щоб забезпечити виконання вихідних граничних умов (7), до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження  $Q^{\text{comp}} = \{q_j^{\text{comp}}(x, y, t)\}, j = \overline{1, 3I+3}$ , які неперервно розподілені вздовж контуру  $\Gamma$ . Таким чином, задача про коливання оболонки складної форми з довільними граничними умовами зводиться до задачі про коливання прямокутної в плані шарнірно опертої оболонки. Компенсуючі навантаження входять у рівняння руху допоміжної оболонки у вигляді таких інтегральних співвідношень:

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma) ds, j, k = \overline{1, 3I+3},$$

де  $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$  – двовимірна  $\delta$ -функція.

Елементи матриці  $\zeta_{jk}$ , що не дорівнюють нулю, мають вигляд

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{3+i, 3+i} = \zeta_{3+I+i, 3+I+i} = y'_\Gamma, \zeta_{33} = \zeta_{3+2I+i, 3+2I+i} = 1,$$

$$\zeta_{12} = \zeta_{3+i, 3+I+i} = x'_\Gamma, \zeta_{21} = \zeta_{3+I+i, 3+i} = -x'_\Gamma, i = \overline{1, I},$$

$$\text{де } x'_\Gamma = \frac{dx_\Gamma}{ds}, y'_\Gamma = \frac{dy_\Gamma}{ds}.$$

З умови задоволення вихідних граничних умов на контурі  $\Gamma$  (7) формується система інтегральних рівнянь, з якої визначаються невідомі компенсуючі навантаження,

$$[B^\Gamma] U [Q^{\text{comp}}(x, y, t)] = P^\Gamma, (x, y) \in \Gamma. \quad (8)$$

Метод розв'язання системи (8) полягає у тому, що функції переміщень (5), заданих і компенсуючих навантажень розвиваються в подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовольняють граничні умови допоміжної оболонки,

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y), \quad p_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}(t) C_{jmn}(x, y),$$

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jmn}^{\text{comp}}(t) C_{jmn}(x, y), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де

$$C_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad C_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B}, \quad C_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

$$C_{3+i mn} = C_{1mn}, \quad C_{3+I+i mn} = C_{2mn}, \quad C_{3+2I+i mn} = C_{3mn},$$

$$p_{jmn}(t) = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B p_j(t) C_{jmn}(x, y) dx dy,$$

$$p_{jmn}^{\text{comp}}(t) = \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \oint_{\Gamma} \zeta_{jk} q_k^{\text{comp}}(s, t) C_{jmn}(x_{\Gamma}, y_{\Gamma}) ds;$$

$$j = \overline{1, 3I+3}, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, m^*}, \quad n = \overline{1, n^*};$$

$A$  – довжина твірної допоміжної оболонки,  $B$  – довжина дуги цієї оболонки.

Розв'язок рівняння руху індентора (2) одержимо за допомогою інтегрального перетворення Лапласа [7].

Далі функції компенсуючих навантажень розвиваються в ряд уздовж контуру  $\Gamma$

$$q_j^{\text{comp}}(s, t) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu}(t) b_{\alpha\mu}(s), \quad j = \overline{1, 3I+3},$$

де

$$b_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad b_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\tilde{s} / \oint_{\Gamma} d\tilde{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi, \quad \mu = \overline{0, m^*}.$$

Граничні функції, що входять у вихідні граничні умови на контурі  $\Gamma$  (7), також розвиваються в ряд уздовж контуру  $\Gamma$ . У результаті система (8) на кожному кроці за часом перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинення компенсуючих навантажень у ряд уздовж контуру  $\Gamma$ . Система рівнянь руху (6) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [5, 7]. Таким чином, після обчислення компенсуючих навантажень розв'язок задачі набуває вигляду

$$u_j(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \pi_{jk}^{mn} \sum_{l=1}^{3I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \theta_{kl\alpha\mu}^{mn} q_{l\alpha\mu}(t) + \varepsilon_{jmn}(t) \right) C_{jmn}(x, y),$$

$$j = \overline{1, 3I+3},$$

де  $\pi_{jk}^{mn}$ ,  $\theta_{kl\alpha\mu}^{mn}$ ,  $\varepsilon_{jmn}$  – елементи матриць, отриманих у результаті чисельних перетворень.

Після обчислення компенсуючих навантажень, визначаються переміщення (1), деформації і напруження у шарах вихідної оболонки.

#### 4. Чисельні результати

З метою підтвердження вірогідності чисельних результатів проведено порівняння розрахункових і експериментальних даних для п'ятишарової вільно опертої оболонки при ударі індентором з органічного скла. Контур оболонки описаний рівняннями кривих Ламе

$$\Gamma: \left(\frac{x}{\alpha}\right)^c + \left(\frac{y}{\beta}\right)^c = 1,$$

де  $\alpha = 0,3$  м,  $\beta = 0,14$  м,  $c = 10$ . Оболонка має такі геометричні параметри:  $R = 5$  м,  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = 3$  мм,  $h_3 = 15$  мм,  $h_4 = 2$  мм,  $h_5 = 20$  мм.

Шари мають такі механічні характеристики:  $E_i = 6,12 \cdot 10^4$  МПа,  $i = 1, 3, 5$ ,  $E_i = 280$  МПа,  $i = 2, 4$  (модулі пружності);  $\nu_i = 0,22$ ,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\nu_i = 0,39$ ,  $i = 2, 4$  (коефіцієнти Пуассона);  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 1, 3, 5$ ,  $\rho_i = 1200$  кг/м<sup>3</sup>,  $i = 2, 4$  (густини матеріалів шарів).

Індентор має наступні механічні й геометричні характеристики:  $E = 5,7 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu = 0,38$ ,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup> (густина матеріалу індентора),  $M = 0,215$  кг,  $r = 0,03$  м. Висота скидання індентора  $H = 1$  м.

На рис. 1 показані теоретична (суцільна лінія) і експериментальна (штрихова лінія) залежності деформації  $\varepsilon_x^5$  оболонки від часу. Також на рисунку наведено розрахункову схему оболонки.

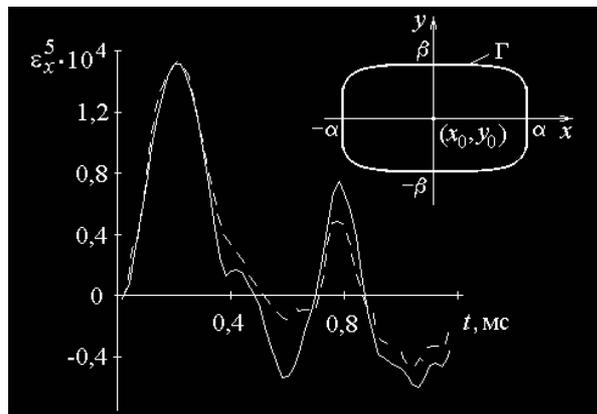


Рис. 1. Деформація  $\varepsilon_x^5$  в п'ятишаровій оболонці при ударі

Удар завдається по зовнішній поверхні першого шару в точку з координатами  $(x_0, y_0)$ . Деформація обчислюється та вимірюється у точці з такими ж координатами на зовнішній поверхні п'ятого шару. Експериментальні дані одержані методом динамічної ширококугової тензометрії [5, 6]. Теоретична та експериментальна залежності добре узгоджуються між собою, що підтверджує вірогідність результатів розрахунку.

Як чисельний приклад, розглянуто коливання п'ятишарової вільно опертої оболонки. Форма плану оболонки наведена на рис. 2. Механічні характеристики шарів співпадають з характеристиками попередньо розглянутої оболонки. Оболонка має наступні геометричні параметри:  $R = 2$  м,  $l_1 = 0,62$  м,  $l_2 = 0,68$  м,  $l_3 = 0,64$  м,  $l_4 = 0,75$  м,  $R_1 = 0,05$  м,  $R_2 = 0,03$  м,  $R_3 = 0,04$  м,  $R_4 = 0,045$  м,  $h_1 = 5$  мм,  $h_2 = h_4 = 4$  мм,  $h_3 = 15$  мм,  $h_5 = 6$  мм.

Удар завдається індентором з органічного скла масою  $M = 0,123$  кг та радіусом головної частини  $r = 0,03$  м по зовнішній поверхні першого шару, висота скидання індентору  $H = 1$  м.

На рис. 3 наведені залежності напружень  $\sigma_x^5$  (суцільна лінія) та  $\sigma_y^5$  (штрихова лінія) від часу у точці  $C$  (рис. 2) на зовнішній поверхні п'ятого шару.

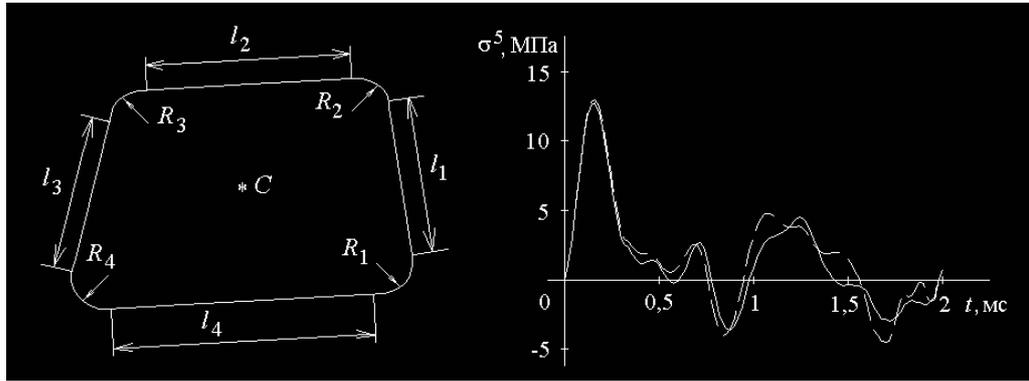


Рис. 2 Схема плану оболонки

Рис. 3 Змінення у часі напруження в оболонці

## 5. Висновки за результатами й напрямки подальших досліджень

Розроблено метод дослідження нестационарних коливань шаруватих незамкнених циліндричних оболонок зі складною формою плану при ударному навантаженні, який дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді тригонометричного ряду.

Можливості методу проілюстровані на прикладі розрахунку деформацій п'ятишарових вільно опертих оболонок при ударі індентором з напівсферичною кінцевою частиною. Добре узгодження теоретичних і експериментальних даних підтвердило вірогідність результатів, одержаних за допомогою запропонованого методу.

Надалі метод можна застосувати до розрахунку оболонок з різною формою плану та різними граничними умовами при дослідженні коливань оболонкових

елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією інтенсивних швидкоплинних навантажень.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Qiu X., Deshpande V.S., Fleck N.A. Dynamic response of a clamped circular sandwich plate subject to shock loading // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*– 2004.– v. 71, № 5.– P. 637 – 645.
2. McShane G.J., Radford D.D., Deshpande V.S., Fleck N.A. The response of clamped sandwich plates with lattice cores subjected to shock loading // *Europ. J. Mechanics – A/Solids.*– 2006.– v. 25, № 2.– P. 215 – 229.
3. Malekzadeh K., Khalili M.R., Mittal R.K. Analytical prediction of low-velocity impact response of composite sandwich panels using new TDOF spring–mass–damper model // *J. Composite Materials.* – 2006.– v. 40, № 18.– P. 1671–1689.
4. Naidu N.V.S., Sinha P.K. Nonlinear impact behaviour of laminated composite shells in hygrothermal environments // *Int. J. Crashworthiness.*– 2005.– v. 10, № 4.– P. 389 – 402.
5. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. A noncanonically shape laminated plate subjected to impact loading: Theory and experiment // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*– 2008.– v. 75, № 5.– P. 051004-1 – 051004-9.
6. Smetankina N.V., Shupikov A.N., Sotrikhin S.Yu., Yareschenko V.G. Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment // *Int. J. Impact Eng.*– 2007.– v. 34, № 2.– P. 264 – 276.
7. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011.– 376 с.
8. Динник А.Н. Избранные труды: в 2 т. Т. 1. – К.: Изд-во АН УССР, 1952. – 350 с.