

УДК 539.3

Сравнение методов конечных и граничных элементов в задачах о колебаниях составной оболочки вращения с жидкостью

В.И. Гнитько¹, К.Г. Дегтярев¹, Е.С. Кононенко¹, А.М. Тонконоженко²¹Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, 61046, Украина²Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля
yehorkononenko@gmail.com

Плескания – это феномен, который представляет собой интенсивное движение свободной поверхности жидкости, содержащейся в резервуаре, под действием внезапно приложенных внешних воздействий. Общепринята следующая классификация колебаний свободной поверхности: а) горизонтальные плескания, б) вертикальные плескания, в) плескания вращения. Вибрации в реальных резервуарах обычно вызываются одновременным действием плесканий жидкости и осцилляциями упругих стенок. В полностью или почти полностью заполненных резервуарах свободная поверхность не имеет достаточного объема для плесканий. Такое состояние обычно отвечает старту ракетоносителя. Однако, на дальнейших этапах полета, когда уровень топлива существенно снижается, эффекты плесканий становятся доминирующими. Неоднократно замечалось, что интенсивные плескания были причиной потери устойчивости ряда ракетоносителей, например, при запусках Фалькон 1 в 2006, 2007 и 2008 годах. Еще одной важной проблемой является учет влияния упругости стенок резервуара на частоты свободных колебаний. В данной работе на основе эффективных вычислительных схем методов конечных и граничных элементов и их теоретического обоснования разработаны новый аналитический метод и компьютерная технология для анализа свободных и вынужденных колебаний составных топливных баков ракет носителей на различных стадиях полета: при перегрузках и в условиях микрогравитации, в том числе, с учетом плесканий топлива. Предлагаемый метод позволяет осуществлять более точный анализ колебаний топливных баков, учесть взаимное влияние упругих деформаций стенок баков и изменяющихся во время полета уровня заполнения баков и формы свободной поверхности жидкости, наличие упругих и жестких демпфирующих внутренних перегородок, изменение ускорения силы тяжести. Разработана математическая модель для анализа плесканий топлива при больших амплитудах. Рассмотрены свободные колебания баков ракет-носителей

Ключевые слова: топливные баки, вибрации, методы конечных и граничных элементов, плескания, идеальная несжимаемая жидкость.

The phenomenon of sloshing can be described as the movement of the free surface of a liquid contained in a reservoir under the action of a suddenly applied load. Some classifications of free-surface fluctuations in liquids identify three main forms of sloshing: a) longitudinal sloshing, b) vertical sloshing c) rotating sloshing. Sloshing is a phenomenon that is found in a wide range of industrial applications: in containers for storing liquefied gas, fuel tanks of missiles and airplanes, in tanks of cargo tankers. The vibrations of the real tanks are caused by sloshing of the fluid and vibration of the elastic walls. In completely (or almost completely) filled tanks, the free surface cannot experience strong oscillations. This corresponds to launching the launch vehicle. However, in further stages of flight, when the level of liquid aggregate falls, the sloshing effect becomes dominant. It was repeatedly noted that powerful sloshing can lead to a violation of the flight trajectory, as happened, for example, during the launch of the Falcon 1 launch vehicle in 2006, 2007 and 2008. The next important problem in the study of the oscillations of the fuel tanks is the study of the associated hydro-elastic oscillations of the fluid interacting with the elastic walls of the tank. New analytical method and computer technology have been developed for analyzing free and forced vibrations of composite fuel tanks of missiles at different stages of flight: during overloads and in microgravity conditions, including sloshing fuel. The proposed method allows for more accurate analysis of fuel tank oscillations; takes into account the mutual influence of elastic deformations of tank walls and changes in the tank filling levels during missions as well as the shape of the free surface of the liquid, the presence of elastic and rigid damping internal partitions, and the gravity acceleration changes. A mathematical model has been developed for the analysis of fuel sloshing at large amplitudes. The free oscillations of the launch vehicle tanks have been considered.

Keywords: fuel tanks, vibrations, finite and boundary element methods, sloshing, ideal incompressible fluid.

Плескання - це феномен, що є наслідком інтенсивного руху вільної поверхні рідини, що міститься в резервуарі, під дією раптово прикладених зовнішніх впливів. Загальноприйнята наступна класифікація коливань вільної поверхні: а) горизонтальні плескання, б) вертикальні плескання, в) плескання обертання. Вібrazioї в реальних резервуарах зазвичай викликаються одночасною дією плескань рідини і осцилляциями пружних стінок. У повністю або майже повністю заповнених резервуарах вільна поверхня не має достатнього об'єму для плескань. Такий стан зазвичай відповідає старту ракети-носія. Однак, на подальших стадіях місії, коли рівень палива істотно знижується, ефекти плескань стають домінуючими. Не раз зазначалося, що інтенсивні плескання були причиною втрати стійкості ряду ракетоносіїв, наприклад, при запусках Фалькон 1 в 2006, 2007 і 2008 роках. Ще одною важливою проблемою є вплив врахування пружності стінок паливного баку на частоти та форми власних коливань. В даній роботі на основі ефективних обчислювальних схем методів скінчених і граничних елементів і їх теоретичного обґрунтування розроблені новий аналітичний метод і комп'ютерна технологія для аналізу вільних і вимушених коливань складених паливних баків ракет носіїв на різних стадіях польоту: при перевантаженнях і в умовах мікрогравітації, в тому числі, з врахуванням плескань заповнювача. Запропонований метод дозволяє здійснювати більш точний аналіз коливань паливних баків, врахувати взаємний вплив пружних деформацій стінок баків, змінних під час польоту рівня заповнення баків і форми

вільної поверхні рідини, наявність пружних і жорстких демпфуючих внутрішніх перегородок, зміни прискорення сили тяжіння. Розроблено математичну модель для аналізу плескань палива при великих амплітудах. Розглянуто вільні коливання баків ракет-носіїв.

Ключові слова: паливні баки, вібрації, методи скінчених і граничних елементів, плескання, ідеальна нестислива рідина

1 Введение

Проблема колебаний конструкций с отсеками, содержащими жидкость, находится в центре внимания исследователей в течение нескольких последних десятилетий. Первые работы в этом направлении появились в начале 60-х годов прошлого века. Одна из них была опубликована в 1963 году [1]. В ней проведен анализ плесканий жидкости в цилиндрических баках при различных уровнях гравитации на основе аналитических методов. Частоты колебаний изучались в зависимости от числа Бонда. обстоятельный анализ исследований по динамике жидкости в сосудах и резервуарах был дан Р. Ибрагимом в монографии [2]. В [3] для вычисления сил давления жидкости в призматических и цилиндрических резервуарах применена нелинейная теория. Здесь изучалось изменение формы свободной поверхности. Отметим, что численные методы изучения движения жидкости со свободной поверхностью находят широкое применение во многих инженерных приложениях [4-6]. В полностью (или практически полностью) заполненных баках свободная поверхность не может испытывать сильных осцилляций. Это соответствует началу полета ракетносителя. Однако, на дальнейших стадиях полета, когда уровень жидкого заполнителя падает, эффект плескания становится доминирующим. Неоднократно отмечалось, что мощные плескания могут привести к нарушению полетной траектории, как это произошло, например, при запусках ракеты-носителя Фалькон 1 (Falcon 1) в 2006, 2007 и 2008 годах [7]. Следующей важной проблемой при изучении колебаний топливных баков является изучение связанных гидроупругих колебаний жидкости, взаимодействующей с упругими стенками бака.

Несмотря на имеющиеся теоретические достижения, проблема колебаний упругих контейнеров и баков с жидкостью остается в центре внимания многих научных школ. Феномен плесканий может быть описан как движение свободной поверхности жидкости, содержащейся в резервуаре, под действием внезапно приложенной нагрузки. Н. Olsen привел в [8] классификацию колебаний свободной поверхности жидкости в резервуарах, выделив три основные формы плесканий: а) продольные плескания, б) вертикальные плескания в) вращательные плескания. Плескание – это феномен, который обнаруживается в широком диапазоне промышленных приложений: в контейнерах для хранения сжиженного газа, топливных баках ракет и самолетов, в резервуарах грузовых танкеров. Колебания реальных баков вызываются одновременными плесканиями жидкости и вибрациями упругих стенок [9].

2 Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим задачу о колебаниях оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью (рис. 1).

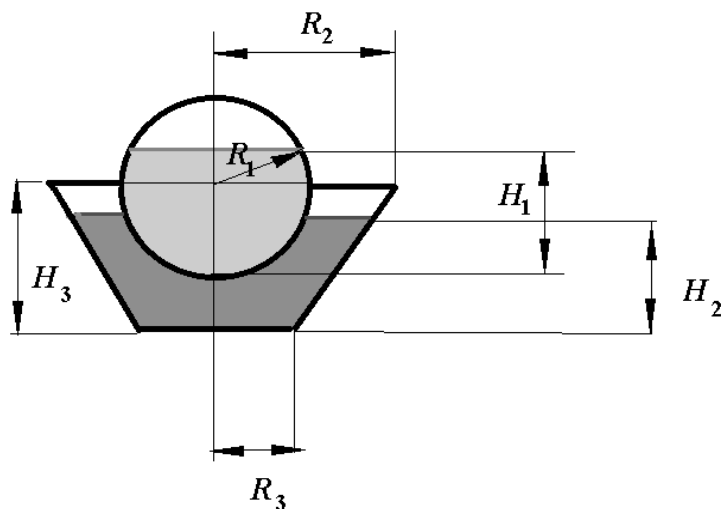


Рис. 1.1 Схема оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью

Предполагается, что свойства жидкости (плотность, угол смачивания, поверхностное натяжение) могут быть разными в каждом из отсеков. Уровень заполнения жидкостью в каждом отсеке меняется во время полета. Требуется определить частоты и формы свободных гидроупругих колебаний оболочечной конструкции, с учетом плесканий, разного уровня заполнения баков, различного уровня гравитации, наличия внутренних перегородок.

В общем случае уравнение движения этой конструкции в операторной форме имеет вид

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{L} , \mathbf{M} – операторы упругих и массовых сил; \mathbf{P} – давление жидкости на смоченные поверхности конструкции; $\mathbf{U}=(u_1, u_2, u_3)$ – вектор - функция перемещений.

Представим вектор \mathbf{U} в форме $\mathbf{U}=\mathbf{u}e^{i\Omega t}$, где Ω – частота, а \mathbf{u} – собственная форма гидроупругих колебаний. Будем искать собственные формы оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью, в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{u}_k,$$

где \mathbf{u}_k – собственные формы колебаний оболочечной конструкции, незаполненной жидкостью; c_k – неизвестные коэффициенты,

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj}.$$

Таким образом,

$$(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \Omega_k^2 \delta_{kj},$$

где Ω_k – k -ая частота собственных колебаний незаполненной конструкции. Эти соотношения показывают, что собственные формы колебаний незаполненной конструкции ортонормированы по матрице масс.

Рассмотрим правую часть уравнения (1.1). Отметим, что вектор \mathbf{P} направлен по нормали к смоченным поверхностям рассматриваемой оболочечной конструкции, вследствие того, что идеальная жидкость создает только нормальную составляющую давления на смоченные поверхности. Считаем, что $|\mathbf{P}| = p$.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, индуцированное колебаниями оболочки и начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей Φ

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; V_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

который удовлетворяет уравнению Лапласа.

Собственные формы незаполненной конструкции определены на боковых поверхностях, на перегородках и на днищах. Поверхность незаполненной конструкции будем обозначать S_1 . Для определения нестационарного давления на стенки и перегородки бака в общем случае необходимо задание скорости изменения уровня жидкости в каждом отсеке.

Пусть в первом отсеке скорость изменения уровня жидкости равна $V_1(t)$, во втором принимает значение $V_2(t)$. Области, занятые жидкостью, для первого и второго отсеков обозначаем Ω_1 и Ω_2 . Плотности жидкости в отсеках обозначаем соответственно, ρ_1 и ρ_2 .

Динамические составляющие давления жидкости на стенки резервуара в отсеках определяются по формулам, представляющим собой линеаризованные интегралы Коши-Лагранжа

$$\begin{aligned} p_1 &= -\rho_1 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (V_1(t) + g \cdot n_x) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_x(t)x \right); \\ p_2 &= -\rho_2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (V_2(t) + g \cdot n_x) \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a_x(t)x \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, n_x – параметр перегрузки, $a_x(t)$ – ускорение вынуждающей силы в горизонтальном направлении.

Соотношения (2.4) позволяют рассматривать вынужденные колебания динамической системы «оболочечная конструкция - жидкость» при воздействии возмущений, действующих в продольном и поперечном направлениях.

Для определения потенциала скоростей Φ имеем смешанную краевую задачу для уравнения Лапласа в двусвязной области $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Обозначим нормальную составляющую перемещения оболочечной конструкции через w .

По заданной собственной форме u_k колебаний незаполненной оболочечной конструкции мы определяем компоненту w_k на всей поверхности оболочечной конструкции S_1 .

На поверхности S_1 требуем выполнения условия непротекания, которое имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = (\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}) \quad (2.5)$$

Здесь \mathbf{n} - единичная нормаль к поверхности S_1 . Отметим, что поверхность S_1 состоит из поверхностей, ограничивающих отсеки.

Аналогично [10] рассматриваемая задача решается в 3 этапа. На первом определяются частоты колебаний сухой оболочки, на втором - частоты плесканий, а на третьем решается связанная гидродинамическая задача.

3 Анализ точности и достоверности предложенных алгоритмов

Для анализа достоверности рассмотрены колебания упругой оболочки без учета действия силы тяжести и задача плесканий. Первая задача решена методом конечных элементов с помощью одномерного метода конечных элементов [11]. Вторая задача сведена к одномерным сингулярным уравнениям [6].

Определены частоты и формы свободных колебаний упругой полусферической оболочки с жидкостью. Жидкость считается идеальной несжимаемой, а ее движение – потенциальным.

Рассматривается полусферическая оболочка, заполненная жидкостью, со следующими параметрами: радиус $R = 5.08$ м, толщина $h = 0.0254$ м, модуль упругости $E=70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, плотность материала $\rho = 2770$ кг / м³. Жидкость считается несжимаемой, ее плотность принимается равной 1000 кг / м³. условия закрепления - шарнирное опирание по контуру оболочки.

В таблице 3.1 приведены собственные частоты гидроупругих колебаний оболочки для различного числа α . Полученные результаты сравниваются с данными В.В.Мокеева (для сжимаемой жидкости) и с результатами его расчетов по комплексу ANSYS (для несжимаемой жидкости), [12].

Таблица 3.1. Собственные частоты гидроупругих колебаний оболочки

α	n	Частоты (Гц)		
		Предложенный метод (МКЭ-МГЭ)	[12]	ANSYS [12] (Shell63)
0	1	23.59	22.00	22.07
	2	35.70	33.38	33.41
	3	43.92	42.02	41.30
1	1	21.96	22.44	22.18
	2	33.40	36.88	34.68
	3	41.52	48.92	42.98
2		31.57	31.57	31.50
		40.44	41.55	40.50
		46.97	50.29	
3		37.30	36.98	36.65
		45.62	46.27	
		52.11	54.86	

Приведенные результаты показывают хорошее согласование, что свидетельствует об их достоверности.

Изучены так же колебания жидкости в жесткой сферической оболочке. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса $R=1$ м, частично заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, уровень заполнения h . Численный анализ проводился для $(0.2 < h/R < 1.99)$ и

различных α ($\alpha = \overline{0,3}$). Был использован метод граничных элементов. Меридиан смоченной поверхности оболочки разбивался на 200 элементов, а радиус свободной поверхности – на 150 элементов [13]. В таблице 3.2 приведены результаты расчета частот в Hz с помощью МГЭ, и дано сравнение с результатами работы [14], $h_1 = h/R$, $\alpha=0$.

Таблица 3.2. Частоты осесимметричных колебаний жидкости в сферической оболочке

m	Метод	Уровень заполнения h, м				
		$h_1=0.2$	$h_1=0.6$	$h_1=1.0$	$h_1=1.8$	$h_1=1.99$
1	[14]	3.8261	3.6501	3.7451	6.7641	29.0500
	МГЭ	3.8314	3.6510	3.7456	6.7665	29.1811
2	[14]	9.2561	7.2659	6.9763	12.1139	51.8122
	МГЭ	9.2686	7.2684	6.9780	12.1205	52.0255

Задача о колебаниях жидкости в цилиндрической оболочке изучена методом граничных элементов и методом конечных элементов. Результаты сравнения приведены в таблице 3.

Таблица 3.3

α	метод	Частоты колебаний				
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0	МКЭ	3.8285	7.0159	10.1735	13.3243	6.47066
	МГЭ	3.8281	7.0156	10.1732	13.3233	6.47060
	[7]	3.8281	7.0156	10.1734	13.3236	6.47063
1	МКЭ	1.6579	5.3297	8.5372	11.7182	14.8925
	МГЭ	1.6573	5.3293	8.5366	11.7066	14.8665
	[7]	1.6573	5.3293	8.5363	11.7060	14.8635

4 Модель оболочки для модального анализа

Построена конечно-элементная модель для проведения модального анализа конструкции, не содержащей жидкость, построена из гексагональных элементов. Данная модель приведена на рис. 4.

Общее количество конечных элементов: 6684.

Общее количество узлов: 36645.

Количество элементов по ширине сектора: 7.

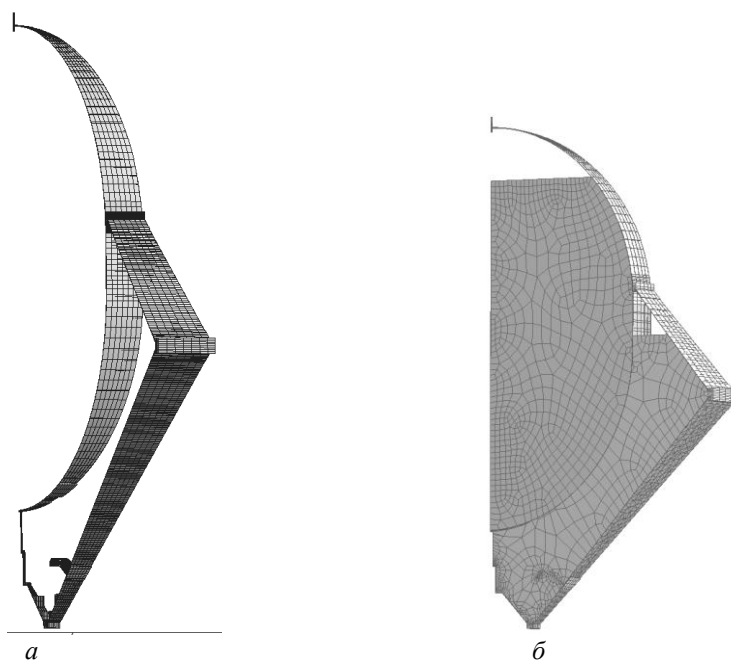
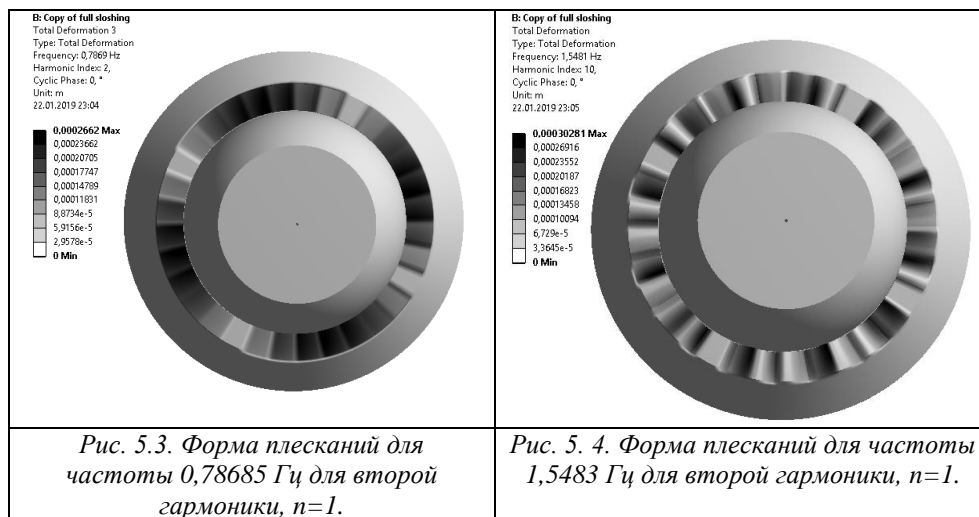
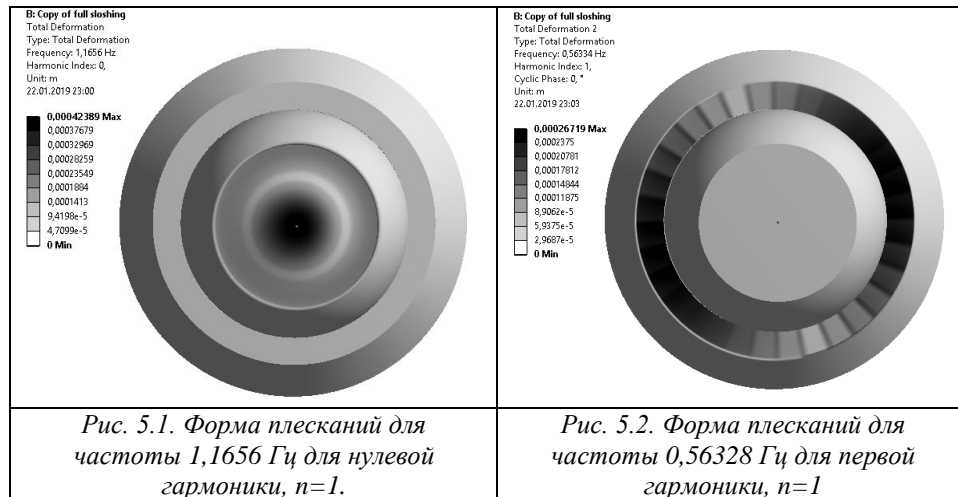


Рис. 4. а,б. Конечно элементные модели конструкции.

Следует заметить, что серия тестовых расчетов, не приводимых в отчете, продемонстрировала достаточность 5 конечных элементов по ширине сектора оболочки, так как результаты расчетов с пятью и семью конечными элементами оказались практически идентичными. Построена также конечно элементная модель, для проведения акустического модального анализа конструкции, содержащей жидкость, построена она из качественных гексагональных элементов. Данная модель приведена на рис. 4.4.б. Общее количество конечных элементов: 9146. Общее количество узлов: 38908.

5. Анализ численных результатов

Расчет частот проведен для 0, 1, и 10 гармоник. Формы колебаний поверхности жидкости приведены на рис. 5.1-5.4.



Следует отметить, что данные формы плесканий свободной поверхности соответствуют не только для полученным частотам, но и в целом практически неизменны для вычисляемых далее частот.

С учетом гидроупругого взаимодействия собственные формы конструкции полностью совпадают с формами «сухой» оболочки, однако частоты значительно снизились.

5 Выводы и перспективы дальнейших исследований

В результате проведенного анализа было установлено, что наименьшие частоты колебаний динамической системы «оболочка-жидкость» отвечают плесканиям свободной поверхности, учет упругости стенок баков приводит к существенному снижению частот колебаний по

сравнению с частотами незаполненной оболочки, при этом наименьшие частоты заполненной и незаполненной оболочечных конструкций могут отвечать разным волновым числам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramson H.N. Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers. *Applied Mechanics Reviews*. 1963. № 16, P. 501 – 506.
2. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications: Cambridge University Press, 2005.
3. Yan-Sheng, Y., Xing-Rui, M., Ben-Li, W. Multidimensional modal analysis of liquid nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank. *Appl. Math. and Mech.* 2007 . № 28 (8), pp. 1997–2018.
4. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid. Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods: WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2010. Vol.50. P. 203-211.
5. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow. *Nonlinear Dynamics*. 2012. N 70. P. 1335 – 1354.
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*. 2016. 1 , N 1, P.14-27.
7. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Sloshing: Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
8. Olsen H. What is sloshing? Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas, 1976.
9. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks Int. *Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*. 2018. 6(6), P. 976-988.
10. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. 2011. Vol. 52. P. 285-296.
11. Еселева Е.В, Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С.105-118.
12. Мокеев В.В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов. Изв. РАН. *Механика твердого тела*. 1998. № 6. С. 166–174.
13. Gnitko V.I., Naumenko Yu. V., Strelnikova E.A. Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. 2017. Issue. 34. С. 29-37.
14. Mciver, P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech.* 1989. 201, P. 243–257.

REFERENCES

1. H.N. Abramson, “Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers”. *Applied Mechanics Reviews*, № 16, P. 501 – 506, 1963.
2. Ibrahim R. A., Liquid sloshing dynamics: theory and applications: Cambridge University Press, 2005.
3. Yan-Sheng Y., Xing-Rui M., Ben-Li W. “Multidimensional modal analysis of liquid nonlinear sloshing in right circular cylindrical tank”, *Appl. Math. and Mech.*, № 28 (8), pp. 1997–2018. 2007.
4. Strelnikova E., Yeseleva E., Gnitko V., Naumenko V. “Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid”, Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. Vol.50. P. 203-211, 2010.
5. Avramov K.V., Strel'nikova E A., Pierre C. “Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow”. *Nonlinear Dynamics*, N 70, P. 1335 – 1354, 2012.
6. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. “Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles”. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences*, 1, N 1, P.14-27, 2016.

7. Faltinsen, O.M., Timokha, A.N. Sloshing. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
8. Olsen H. What is sloshing? Seminar on Liquid Sloshing. Det Norske Veritas, 1976.
9. Gnitko V., Degtyarev K., Naumenko V., Strelnikova E., “Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks”. *Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements*, 6(6), P. 976-988, 2018.
10. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E., Forced vibrations of tanks partially filled with the liquid under seismic load. *Proc. of XXXIII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods*, WITPress, Transaction on Modeling and Simulation, Vol. 52, P. 285-296, 2011.
11. Eseleva E.V, Gnitko V.I., Strelnikova E.A., “Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu”. *Problemyi mashinostroeniya*, N 1, S.105-118, 2006. [in Russian]
12. Mokeev V.V. “Issledovanie dinamiki konstruktsiy s zhidkostyu i gazom s pomoschyu metoda konechnyih elementov”, *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela*. N 6, S. 166–174, 1998. [in Russian]
13. Gnitko V.I., Naumenko Yu. V., Strelnikova E.A. “Discrete singularities method in problems of liquid vibrations in spherical tanks”, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University*, Issue 34, S. 29-37, 2017.
14. Mciver, P. Sloshing frequencies for cylindrical and spherical containers filled to an arbitrary depth. *J. Fluid Mech*, N 201, R. 243–257, 1989.

Гнітько Василь Іванович – кандидат технічних наук, Інститут проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАН України, Харків, Україна, Gnitkovi@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.

Гнітько Василь Іванович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.

Gnitko Vasyl I. – PhD, Senior Research Fellow, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: gnitkovi@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.

Дегтярев Кирилл Георгиевич – ведучий інженер, Інститут проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАН України, Харків, Україна, kdegt89@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.

Дегтярьов Кирило Георгійович – провідний інженер, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; e-mail: kdegt89@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.

Degtyarev Kirill G. – Senior Engineer, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: kdegt89@gmail.com; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.

Кононенко Егор Сергеевич – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, Харків, Україна, yehorkononenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Кононенко Егор Сергійович – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, вул. Пожарського, 2/10, м. Харків, Україна, 61046; yehorkononenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Kononenko Yehor – post graduate, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail yehorkononenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Тонконоженко Анатолій Мстиславович – начальник сектора, Конструкторське бюро «Южное» ім. М.К. Янгеля, stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net, <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.

Тонконоженко Анатолій Мстиславович – керівник сектору, Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля, stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net, <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.

Tonkonozhenko Anatoly – head of department, M. K. Yange Yuzhnoye Design Office stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net, <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.