Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.948 № 1081, 2013, с.54–66

Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным

В.Н. Сыровацкий

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
vsirovatsky@gmail.com

Найдены операторы, которые определяют основную коммутативную систему линейных ограниченных операторов T_1, T_2 коммутативного унитарного метрического узла. Операторы задаются в терминах построенной для системы T_1, T_2 функциональной модели.
Ключевые слова: функциональная модель, коммутативная система операторов.

Сировацький В.М., **Функціональні моделі коммутативних систем операторів близьких до унітарних.** Знайдени оператори, які визначають основну комутативну систему лінійних обмежених операторів T_1, T_2 комутативного унитарного метричного вузла. Оператори задаються у термінах збудованої для системи T_1, T_2 функціональної моделі.
Ключові слова: Функціональна модель, комутативна система операторів.

V.N. Syrovatskyi, **Functional models of commutative systems of operators close to the unitary.** Operators were found, that define main commutative system of linear limited operators T_1, T_2 for unital metric knot. This operators are defined in terms of functional model that was built for system T_1, T_2.
Keywords: functional model, commutative system of operators.
2000 Mathematics Subject Classification: 47A45.

Функциональная модель оператора сжатия T, который действует в гильбертовом пространстве H была впервые получена Б.С. Надем и Ч. Фояшем [5]. Данная модель позволяет реализовать оператор T как оператор умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций [5, 2]. Изучение спектральных характеристик этой модели привело к ряду нетривиальных задач как функционального анализа так и теории функции, среди которых: вопросы интерполяции, задачи базисности и полноты и др. [2].

При использовании техники дилатаций Надя-Фояша [5] построение аналогичных функциональных моделей для коммутативных систем операторов $\{T_1, T_2\}$, заданных в гильбертовом пространстве H, наталкивалось на существенные трудности. На этом пути не удалось решить поставленную выше задачу даже в случае сжимаемости T_1 и T_2. Выход из этой ситуации был найден в работе [7], которая базируется на обобщении понятия узла для коммутативных систем операторов и по сути была высказана М.С. Лившицем.

В работе [8] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда один из них является сжатием. Эти построения основаны на технике преобразований Фурье. Если же ни один из операторов $\{T_1, T_2\}$ не является сжатием, данный метод применим быть не может.

В работе [9] построена функциональная модель пары коммутативных операторов, когда ни один из них не является сжатием. Модель построена в пространстве Л. де Бранжа.

В данной работе найден вид операторов $N_1, N_2, \Gamma, \widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{\Gamma}$, которые определяют систему $\{T_1, T_2\}$.

§1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейный ограниченный оператор T, действующий в гильбертовом пространстве H. Совокупность

$$\triangle = (J; H \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; H \oplus \tilde{E}; \tilde{J}) \tag{1.1}$$

называется унитарным узлом [1-4], если линейный оператор

$$V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix} : H \oplus E \mapsto H \oplus \tilde{E} \tag{1.2}$$

удовлетворяет соотношениям

$$V^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \qquad V \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} V^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{J} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

где J и $\tilde{J}$ являются инволюциями в гильбертовых пространствах E и $\tilde{E}$ соответственно, $J = J^* = J^{-1}, \tilde{J} = \tilde{J}^* = \tilde{J}^{-1}$. Любой ограниченный линейный оператор T в H всегда может быть включен в унитарный узел $\triangle$ (1.1), для этого необходимо положить [2] $-E = \overline{D_{T^*}H}$, $\tilde{E} = \overline{D_T H}$, $\Psi = \sqrt{|D_T|}$, $\Phi = \sqrt{|D_{T^*}|}$, $J = signD_{T^*}$, $\tilde{J} = signD_T$, $K = -\tilde{J}T^*$, где, как обычно, $D_T = I - T^*T-$ дефектные операторы, отвечающие T, а $\sqrt{|A|}$ и $signA$ для самосопряженного оператора A следует понимать в смысле соответствующих спектральных разложений.

Узел $\triangle$ (1.1) называется простым [2], если $H = H_1$, где

$$H_1 = span\{T^n \Phi f + T^{*m}\Psi^* g;\ f \in E;\ g \in \tilde{E};\ \ n, m \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{1.4}$$

Подпространства H_1 и $H_0 = H_1^{\perp} = H \ominus H_1$ приводят оператор T, причём сужение T на H_0 является унитарным оператором [2].

Основным инвариантом узла $\triangle$ (1), описывающим простые узлы, является, введенная ещё в 1946 году [1] М.С. Лившицем, характеристическая оператор-функция

$$S_{\triangle} = K + \Psi(zI - T)^{-1}\Phi, \tag{1.5}$$

которая играет основную роль в теории треугольных [2] и функциональных моделей [4, 5] для операторов близких к унитарным (в смысле определения (1.1)).

Предположим, что $\dim E = \dim \tilde{E} = r < \infty$ и $J = \tilde{J}$. Выберем в E и $\tilde{E}$ ортонормированные базисы $\{e_\alpha\}_1^r$ и $\{e'_\alpha\}_1^r$. Тогда из результатов В. П. Потапова [2] следует, что матрица-функция $S_{\triangle}(z) = \| < S_{\triangle}(z)e_\alpha, e'_\beta > \|$, в случае когда спектр $\sigma(T)$ оператора T принадлежит единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, имеет следующую мультипликативную структуру

$$S_{\triangle}(z) = \overset{\leftarrow}{\int_0^l} \exp\left\{\frac{e^{\imath\varphi_t} + z}{e^{\imath\varphi_t} - z} J\, dF_t\right\}, \tag{1.6}$$

где φ_t - неотрицательная неубывающая на $[0, \ell]$ функция $0 \leq \varphi_t \leq 2\pi$; а F_t - неубывающая эрмитовая $(r \times r)$ матрица-функция на $[0, \ell]$, для которой $trF_t \equiv t$.

Используя представление В. П. Потапова (1.6) для $S_{\triangle}(z)$ (5), нетрудно построить [2] треугольную модель оператора Т. Обозначим через $L^2_{r,l}(F_x)$ гильбертово пространство вектор-функций

$$L^2_{r,l}(F_x) = \left\{ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x));\ \int_0^l f(x)\, dF_x f^*(x) < \infty \right\}. \tag{1.7}$$

Зададим в $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.7) линейный оператор T

$$Tf(x) = f(x)e^{\imath\varphi_x} - 2\int_x^l f(t)\, dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{\imath\varphi_x}, \tag{1.8}$$

где матрица Φ_x является решением интегрального уравнения

$$\Phi_x + \int_0^x \Phi_t\, dF_t J = I, \qquad x \in [0, l]. \tag{1.9}$$

Рассмотрим также матрицу-функцию Ψ_x

$$\Psi_x + \int\limits_x^l \Psi_t \, dF_t J = J, \qquad x \in [0, l]. \tag{1.10}$$

Определим теперь операторы $\Phi : E \mapsto L^2_{r,l}(F_x)$ и $\Psi : L^2_{r,l}(F_x) \mapsto E$ (здесь $E = \mathbb{C}^n$) следующим образом

$$\Phi f(x) = \sqrt{2} f \Psi_x e^{\imath \varphi_x}\,, \qquad \Psi f(x) = \sqrt{2} \int\limits_0^l f(x) \, dF_x \Phi^*_x\,, \tag{1.11}$$

где $f \in E$. И пусть $K = S_\triangle(\infty)$ (1.6). Совокупность

$$\triangle_c = (J; L^2_{r,l}(F_x) \oplus E; V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}; L^2_{r,l}(F_x) \oplus E; J) \tag{1.12}$$

является унитарным узлом (1.1)-(1.3) и называется треугольной моделью простого узла $\triangle$ (1.1), где $L^2_{r,l}(F_x)$, T, Φ, Ψ - имеют вид (1.7), (1.8) - (1.11). Последнее означает, что простые компоненты (1.4) у узлов $\triangle$ (1.1) и $\triangle_c$ (1.12), в случае когда спектр оператора T лежит на единичной окружности $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$, унитарно-єквивалентны [2], конечно, при условии $J = \tilde{J}$ и $dimE = dim\tilde{E} = r < \infty$.
Предположим, что $dimE = 2$, а $J = J_N$, где

$$J_N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Следуя работе [6], введём вектор-функции:

$$L_x(z) = (1 - zT)^{-1} \Phi(1, 1) \tag{1.14}$$

$$\widetilde{L}_x(z) = (1 - zT^*)^{-1} \Psi^*(1, -1) \tag{1.15}$$

Определение 1. *Гильбертовым пространством Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E, G)$ назовём пространство, которое образуют вектор-функции $F(z) = [F_1(z), F_2(z)]$, где $F_k(z)$, $(k = 1, 2)$ имеют вид*

$$F_1(z) = \int\limits_0^l f(t) \, dF_t L^*_t(\bar{z}); \quad F_2(z) = \int\limits_0^l f(t) \, dF_t \tilde{L}^*_t(\bar{z}). \tag{1.16}$$

И пусть $\mathcal{B}_\phi$ - отображение Л.де Бранжа

$$\mathcal{B}_\phi f = [F_1(z), F_2(z)]. \tag{1.17}$$

Скалярное произведение в $\mathcal{B}(E,G)$ индуцируется прообразом отображения $\mathcal{B}_\varphi$ (1.17):

$$< F(z), \hat{F}(z) >_{\mathcal{B}_\varphi(E,G)} = < f(t), \hat{f}(t) >_{L^2_{2,l}(F_t)}, \tag{1.18}$$

причём $F(z) = \mathcal{B}_\varphi f(t)$, $\hat{F}(z) = \mathcal{B}_\varphi \hat{f}(t)$, где $f(t), \hat{f}(t) \in L^2_{2,l}(F_t)$.
Функции $E_x(z), \widetilde{E}_x(z), G_x(z), \widetilde{G}_x(z)$ задаются соотношениями [6]

$$L_x(z) = (e^{-i\phi_x} - z)^{-1}[E_x(z); \widetilde{E}_x(z)] \tag{1.19}$$

$$\widetilde{L}_x(z) = (1 - ze^{-i\phi_x})^{-1}[G_x(z); \widetilde{G}_x(z)]. \tag{1.20}$$

Пусть T_1, T_2 - коммутативная система линейных ограниченных операторов, действующая в гильбертовом пространстве H. Совокупность гильбертовых пространств $E, \tilde{E}$ и операторов $\Phi \in [E,H]$, $\Psi \in [H,\tilde{E}]$, $K \in [E,\tilde{E}]$, $\sigma_s, \tau_s, N_s, \Gamma_1 \in [E,E]$, $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{N}_s, \tilde{\Gamma}_1 \in [\tilde{E},\tilde{E}]$ $(s = 1,2)$ назовём коммутативным унитарным метрическим узлом $\triangle$

$$\triangle = (\Gamma_1, \sigma_s, \tau_s, N_s, H \oplus E, V_s, \overset{+}{V}_s, H \oplus \tilde{E}, \tilde{N}_s, \tilde{\tau}_s, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\Gamma}_1), \tag{1.21}$$

если для расширений

$$V_s = \begin{bmatrix} T_s & \Phi N_s \\ \Psi & K \end{bmatrix}, \qquad \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} T_s^* & \Psi^* \tilde{N}_s^* \\ \Phi^* & K^* \end{bmatrix}$$

справедливы следующие соотношения:

1) $V_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma} \end{bmatrix} V_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tau_s \end{bmatrix}, \qquad \overset{+}{V}{}_s^* \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \sigma_s \end{bmatrix} \overset{+}{V}_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_s \end{bmatrix},$

2) $T_2\Phi N_1 - T_1\Phi N_2 = \Phi\Gamma_1, \ \tilde{N}_1\Psi T_2 - \tilde{N}_2\Psi T_1 = \tilde{\Gamma}_1\Psi,$

3) $\tilde{N}_2\Psi\Phi N_1 - \tilde{N}_1\Psi\Phi N_2 = K\Gamma_1 - \tilde{\Gamma}_1 K, \ KN_s = \tilde{N}_s K (s = 1,2),$

где $\sigma_s, \tau_s, (\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_s)$ самосопряжены в $E(\tilde{E})$, $(s = 1,2)$.
Операторы, действующие в пространствах E и $\tilde{E}$ узла $\triangle$ (1.21), – зависимы. Произвольная коммутативная система линейных ограниченных операторов T_1, T_2 всегда может быть включена в узел $\triangle$ (1.21) [1]. В случае обратимости "дефектных" операторов σ_1 и $\tilde{\sigma}_1$ в E и $\tilde{E}$ всегда можно считать, что N_1 и $\tilde{N}_1$ обратимы. Введём $N, \tilde{N}, \Gamma, \tilde{\Gamma}$ следующего вида

$$N = N_1^{-1}N_2; \ \Gamma = N_1^{-1}\Gamma_1; \ \tilde{N} = \tilde{N}_1^{-1}\tilde{N}_2; \ \tilde{\Gamma} = \tilde{N}_1^{-1}\tilde{\Gamma}_1. \tag{1.22}$$

Зададим в $L^2_{r,l}(F_x)$ (1.7) линейные операторы T_1 и T_2

$$T_1 f(x) = f(x)e^{\imath\varphi_x} - 2\int_x^l f(t)\, dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J e^{\imath\varphi_x}\,, \tag{1.23}$$

$$T_2 f(x) = f(x)\,(N(x)e^{\imath\varphi_x} + \Gamma(x)) - 2\int\limits_x^l f(t)\,dF_t \Phi_t^* \Phi_x^{*-1} J N(x) e^{\imath\varphi_x}\,. \tag{1.24}$$

Основная система коммутативных операторов $\{T_1, T_2\}$ узла $\triangle$ (1.19) унитарно эквивалентна [9] системе операторов, которая действует в пространстве Л. де Бранжа $\mathcal{B}(E,G)$ следующим образом

$$T_1 F_1(z) = (z + \overline{\mu(\overline{z})})F_1(z) + \overline{\nu(\overline{z})}F_2(z) + \frac{\overline{E_0(\overline{z})} - \overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{2} F_2(0) \tag{1.25}$$

$$T_1 F_2(z) = \frac{F_2(z) - F_2(0)}{z} \tag{1.26}$$

$$T_2 F_1(z) = \frac{F_1(z)}{m(z)} + \frac{\widetilde{\mu}(z)}{m(z)} F_1(z) + \frac{\widetilde{\nu}(z)}{m(z)} F_2(z) \tag{1.27}$$

$$T_2 F_2(z) = \frac{F_2(z)n(z) - F(0)n(0)}{z}, \tag{1.28}$$

где $(F_1(z), F_2(z)) \in \mathcal{B}(E,G)$, а $m(z)$ и $n(z)$ удовлетворяют уравнениям $(N + z\Gamma)(1,1)^T = m(z)(1,1)^T$ и $(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*)(1,-1)^T = n(z)(1,-1)^T$. При этом коэффициенты $\mu(z)$ и $\nu(z)$ имеют следующий вид:

$$\nu(z) = \frac{c_2(z)c_3(z) - c_1(z)c_4(z)}{c_2(z) - c_4(z)} \tag{1.29}$$

$$\mu(z) = \frac{c_1(z) - c_3(z)}{c_2(z) - c_4(z)} \tag{1.30}$$

$$c_1(z) = \frac{(E_0(z) + \widetilde{E}_0(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})} \int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1) dF_t L_t^*(\overline{z}) \tag{1.31}$$

$$c_2(z) = \frac{(G_l'(z) + \widetilde{G}_l'(z))(1 - z^2)}{2(E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})} \tag{1.32}$$

$$c_3(z) = \frac{E_0(z) + \widetilde{E}_0(z)}{E_0'(z) - \widetilde{E}_0'(z)} \int\limits_0^l \Psi_t^*(1,1) dF_t \widetilde{L}_t^*(\overline{z}) \tag{1.33}$$

$$c_4(z) = \frac{2(G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})} - \widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})})}{(E_0'(z) - \widetilde{E}_0'(z))(1 - z^2)}, \tag{1.34}$$

а коэффициенты $\widetilde{\mu}(z)$ и $\widetilde{\nu}(z)$ равны:

$$\widetilde{\mu}(z) = \frac{I_1(z)d_3(z) - I_2(z)d_1(z)}{d_2(z)d_3(z) - d_1(z)d_4(z)} \tag{1.35}$$

$$\widetilde{\nu}(z) = \frac{I_1(z)d_4(z) - I_2(z)d_2(z)}{d_1(z)d_4(z) - d_2(z)d_3(z)} \tag{1.36}$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\widetilde{\sigma}_2\left(\Phi_l\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - J(\overline{E_0(\overline{z})}, \overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})\right) \tag{1.37}$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2z}(1,1)\sqrt{2}S\left(\frac{1}{z}\right)\widetilde{\sigma}_2\left(\Phi_l J\begin{pmatrix}\overline{G_l(\overline{z})}\\ \overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \tag{1.38}$$

$$d_1(z) = \frac{E_0(z)\overline{E_0(\overline{z})} - \widetilde{E}_0(z)\overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})}}{1-|z|^2} \tag{1.39}$$

$$d_2(z) = \frac{G_l'(z) + \widetilde{G}_l'(z)}{2} \tag{1.40}$$

$$d_3(z) = \frac{E_0'(z) - \widetilde{E}_0'(z)}{2} \tag{1.41}$$

$$d_4(z) = \frac{G_l(z)\overline{G_l(\overline{z})} - \widetilde{G}_l(z)\overline{\widetilde{G}_l(\overline{z})}}{1-|z|^2}. \tag{1.42}$$

§2. Основная часть

Поскольку для системы операторов T_1, T_2 (1.23), (1.24) построение модели (1.25)-(1.28) использует операторы N, Γ, $\widetilde{N}$, $\widetilde{\Gamma}$ (1.22), то найдём вид этих операторов в терминах параметров модели (1.29) - (1.42).
Обозначим

$$N_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix} \quad N_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} a_3 & b_3\\ c_3 & d_3\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{N}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1\\ \widetilde{c}_1 & \widetilde{d}_1\end{bmatrix} \quad \widetilde{N}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2\\ \widetilde{c}_2 & \widetilde{d}_2\end{bmatrix} \quad \widetilde{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_3 & \widetilde{b}_3\\ \widetilde{c}_3 & \widetilde{d}_3\end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Рассмотрим выражение, которое вытекает из узлового соотношения

$$T_2\Psi_x N_1 - T_1\Psi_x N_2 = \Psi_x\Gamma, \tag{2.2}$$

где операторы T_1, T_2 из узла $\triangle$ (1.21). Выясним, во что перейдут после преобразования де Бранжа операторы $\Psi_x N_1$, $\Psi_x N_2$ и $\Psi_x\Gamma$.
Легко видеть, что

$$\int\limits_0^l \Psi_t dF_t L_t(\overline{z}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\Psi_0 J\begin{pmatrix}E_0(\overline{z})\\ \widetilde{E}_0(\overline{z})\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}R_0\begin{pmatrix}E_0(\overline{z})\\ \widetilde{E}_0(\overline{z})\end{pmatrix},$$

где:

$$R_0 = -S_\triangle(0) = \begin{pmatrix} a(0) & b(0)\\ c(0) & d(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(0) & a(0) - \overline{G_l(0)}\\ a(0) - \overline{G_l(0)} & E_0(0) - \overline{\widetilde{G}_l(0)} - a(0)\end{pmatrix}.$$

Следовательно:

$$B_L\Psi_x N_1\xi = \xi N_1\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}R_0\begin{pmatrix} E_0(\overline{z}) \\ \widetilde{E}_0(\overline{z}) \end{pmatrix}\right),$$

$$B_L\Psi_x N_2\xi = \xi N_2\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}R_0\begin{pmatrix} E_0(\overline{z}) \\ \widetilde{E}_0(\overline{z}) \end{pmatrix}\right),$$

$$B_L\Psi_x \Gamma\xi = \xi \Gamma\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}R_0\begin{pmatrix} E_0(\overline{z}) \\ \widetilde{E}_0(\overline{z}) \end{pmatrix}\right),$$

где $\xi \in E$.
Также рассмотрим:

$$\int_0^l \Psi_t dF_t \widetilde{L}_t(\overline{z}) = \frac{-1}{2z}\begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2z}\Psi_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2z}R_0 J\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z}\begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2z}R_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z}\begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix}.$$

Итак, мы имеем:

$$B_{\widetilde{L}}\Psi_x N_1\xi = \xi N_1\left(\frac{1}{2z}R_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z}\begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix}\right),$$

$$B_{\widetilde{L}}\Psi_x N_2\xi = \xi N_2\left(\frac{1}{2z}R_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z}\begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix}\right),$$

$$B_{\widetilde{L}}\Psi_x \Gamma\xi = \xi \Gamma\left(\frac{1}{2z}R_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2z}\begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix}\right).$$

Обозначим:

$$R_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}R_0\begin{pmatrix} E_0(\overline{z}) \\ \widetilde{E}_0(\overline{z}) \end{pmatrix},$$

$$R_2 = R_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношение (2.2) при преобразовании де Бранжа B_L принимает вид:

$$T_2 B_L(\Psi_x N_1\xi) - T_1 B_L(\Psi_x N_2\xi) = B_L(\Phi_x \Gamma\xi)$$

или

$$\frac{1}{m(z)}\xi N_1 R_1(z) + \frac{\widetilde{\mu}(z)}{m(z)} + \frac{\widetilde{\nu}(z)}{m(z)}\xi N_1 R_2(z) + (z + \overline{\mu(\overline{z})})\xi N_2 R_1(z) + \nu(\overline{z})\xi N_2 R_2(z) +$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{E_0(\overline{z})} - \overline{\widetilde{E}_0(\overline{z})})\xi N_2 R_2(z) = \xi\Gamma R_1(z).$$

А при преобразовании де Бранжа $B_{\widetilde{L}}$ соотношение (2.2) принимает следующий вид:

$$T_2 B_{\widetilde{L}}(\Psi_x N_1 \xi) - T_1 B_{\widetilde{L}}(\Psi_x N_2 \xi) = B_{\widetilde{L}}(\Phi_x \Gamma \xi)$$

$$\frac{1}{z}(\xi N_1 R_2(z) n(z) - \xi N_1 R_2(0) n(0)) - \frac{1}{z}(\xi N_2 R_2(z) - \xi N_2 R_2(0)) = \xi \Gamma R_2(z)$$

$$\frac{1}{z}(\xi N_1 n(z) - \xi N_2) R_2(z) - \frac{1}{z}(\xi N_1 n(0) - \xi N_2) R_2(0) = \xi \Gamma R_2(z)$$

$$\frac{1}{z}\left(\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma\right) R_2(z) = \frac{1}{z}\left(\xi N_1 n(0) - \xi N_2\right) R_2(0).$$

Введём функцию $f(z) = \left(\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma\right) R_2(z)$, тогда последнее равенство означает, что:

$$f(z) - f(0) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

Так как

$$R_2 = R_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\overline{G_l(0)} \\ E_0(0) + \overline{G_l(0)} - \overline{\widetilde{G}_l(0)} - 2a(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\overline{G_l(0)} - G_l(\overline{z}) \\ E_0(0) + \overline{G_l(0)} - \overline{\widetilde{G}_l(0)} - \widetilde{G}_l(\overline{z}) - 2a(0) \end{pmatrix},$$

то первый коэффициент разложения функции $f(z)$ должен равняться нулю:

$$\left(\left(\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma\right) R_2(z)\right)' = 0$$

$$\left(\xi N_1 n'(z) - \xi\Gamma\right) R_2(z) + \left(\xi N_1 n(z) - \xi N_2 - z\xi\Gamma\right) R_2'(z) = 0. \tag{2.3}$$

Следовательно, при $z = 0$:

$$\left(\xi N_1 n'(0) - \xi\Gamma\right) R_2(0) + \left(\xi N_1 n(z) - \xi N_2\right) R_2'(0) = 0.$$

Рассмотрим также

$$(-1, 1) n(z) = (-1, 1)(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*),$$

где $\widetilde{N} = \widetilde{N}_1^{-1}\widetilde{N}_2$, $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{N}_1^{-1}\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{N}^* = \widetilde{N}_2^*\widetilde{N}_1^{*-1}$, $\widetilde{\Gamma}^* = \widetilde{\Gamma}^*\widetilde{N}_1^{*-1}$, тогда:

$$(1, -1) n(z) = (1, -1)(\widetilde{N}_2^*\widetilde{N}_1^{*-1} + z\widetilde{\Gamma}^*\widetilde{N}_1^{*-1})$$

$$(1, -1) n(z)\widetilde{N}_1^* = (1, -1)(\widetilde{N}_2^* + z\widetilde{\Gamma}^*).$$

В результате приведенных преобразований имеем два выражения:

$$(1, -1) n(0)\widetilde{N}_1^* = (1, -1)\widetilde{N}_2^*$$

$$(1, -1) n'(0)\widetilde{N}_1^* = (1, -1)\widetilde{\Gamma}^*.$$

Так как $n(z)$ есть линейная функция $n(z) = \theta z + \lambda$ и $n'(z) = \theta$, выражение (2.3) принимает вид:

$$(\xi\theta N_1 - \xi\Gamma)R_2(0) + (\xi\lambda N_1 - \xi N_2)R_2'(0) = 0.$$

В связи с тем, что $R_2'(z)$ имеет вид:

$$R_2'(z) = \begin{pmatrix} G_l'(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l'(\overline{z}) \end{pmatrix},$$

то:

$$(\xi\theta N_1 - \xi\Gamma)\left(R_0\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_l(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l(\overline{z}) \end{pmatrix}\right) + (\xi\lambda N_1 - \xi N_2)\begin{pmatrix} G_l'(\overline{z}) \\ \widetilde{G}_l'(\overline{z}) \end{pmatrix} = 0.$$

Так как вектор ξ произвольный, то, взяв в последнем выражении $\xi = (1, 0)$ и $\widetilde{\xi} = (0, 1)$, получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered}(\theta a_1 - a_3)(a(0) - b(0) - G_l(0)) + (\theta b_1 - b_3)(c(0) - d(0) - \widetilde{G}_l(0)) + \\ +(\lambda a_1 - a_2)G_l'(0) - (\lambda b_1 - b_2)\widetilde{G}_l'(0) = 0\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(\theta c_1 - c_3)(a(0) - b(0) - G_l(0)) + (\theta d_1 - d_3)(c(0) - d(0) - \widetilde{G}_l(0)) + \\ +(\lambda c_1 - c_2)G_l'(0) - (\lambda d_1 - d_2)\widetilde{G}_l'(0) = 0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Из выражений $(1,-1)n(0)\widetilde{N}_1^* = (1,-1)\widetilde{N}_2^*$ и $(1,-1)n'(0)\widetilde{N}_1^* = (1,-1)\widetilde{\Gamma}^*$, а также, используя вид матриц N_1, N_2 и Γ, имеем:

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_1) &= \widetilde{a}_2 - \widetilde{b}_2 \\ \overline{\lambda}(\widetilde{c}_1 - \widetilde{d}_1) &= \widetilde{c}_2 - \widetilde{d}_2 \\ \overline{\theta}(\widetilde{a}_1 - \widetilde{b}_1) &= \widetilde{a}_3 - \widetilde{b}_3 \\ \overline{\theta}(\widetilde{c}_1 - \widetilde{d}_1) &= \widetilde{c}_3 - \widetilde{d}_3.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Аналогично рассмотрим выражение, определяющее $m(z)$:

$$m(z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (N + z\Gamma)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m(z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (N_1^{-1}N_2 + zN_1^{-1}\Gamma)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m(z)N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (N_2 + z\Gamma)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда выражения $m(0)N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = N_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $m'(0)N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ определяют вид функции $m(z)$:

$$m(z) = \delta z + \eta.$$

И приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\eta(a_1+b_1)&=a_2+b_2\\ \eta(c_1+d_1)&=c_2+d_2\\ \delta(a_1+b_1)&=a_3+b_3\\ \delta(c_1+d_1)&=c_3+d_3.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Теперь рассмотрим узловые соотношения $KN_1=\widetilde{N}_1K$ и $KN_2=\widetilde{N}_2K$. Используя то, что $K=S_\triangle(0)$, получим:

$$\begin{pmatrix}a(0)&b(0)\\c(0)&d(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{a}_1&\widetilde{b}_1\\\widetilde{c}_1&\widetilde{d}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(0)&b(0)\\c(0)&d(0)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a(0)&b(0)\\c(0)&d(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{a}_2&\widetilde{b}_2\\\widetilde{c}_2&\widetilde{d}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(0)&b(0)\\c(0)&d(0)\end{pmatrix}.$$

Или имеем 8 уравнений:

$$\begin{aligned}a(0)a_1+b(0)c_1&=a(0)\widetilde{a}_1+c(0)\widetilde{b}_1\\ a(0)b_1+b(0)d_1&=b(0)\widetilde{a}_1+d(0)\widetilde{b}_1\\ c(0)a_1+d(0)c_1&=a(0)\widetilde{c}_1+c(0)\widetilde{d}_1\\ c(0)b_1+d(0)d_1&=b(0)\widetilde{c}_1+d(0)\widetilde{d}_1\\ a(0)a_2+b(0)c_2&=a(0)\widetilde{a}_2+c(0)\widetilde{b}_2\\ a(0)b_2+b(0)d_2&=b(0)\widetilde{a}_2+d(0)\widetilde{b}_2\\ c(0)a_2+d(0)c_2&=a(0)\widetilde{c}_2+c(0)\widetilde{d}_2\\ c(0)b_2+d(0)d_2&=b(0)\widetilde{c}_2+d(0)\widetilde{d}_2.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Также, взяв вторую производную от функции $f(z)$, получим:

$$((\xi N_1n(z)-\xi N_2-z\xi\Gamma)R_2(z))''=0$$

$$((\xi N_1n'(z)-\xi\Gamma)R_2(z)+(\xi N_1n(z)-\xi N_2-z\xi\Gamma)R_2'(z))'=0$$

$$2(\xi N_1n'(z)-\xi\Gamma)R_2'(z)+(\xi N_1n(z)-\xi N_2-z\xi\Gamma)R_2''(z)=0.$$

Из $R_2'(z)=\begin{pmatrix}G_l'(\overline{z})\\\widetilde{G}_l'(\overline{z})\end{pmatrix}$ следует, что $R_2''(z)=\begin{pmatrix}G_l''(\overline{z})\\\widetilde{G}_l''(\overline{z})\end{pmatrix}$, тогда:

$$2(\xi N_1n'(0)-\xi\Gamma)R_2'(0)+(\xi N_1n(0)-\xi N_2)R_2''(0)=0$$

$$2(\xi N_1n'(0)-\xi\Gamma)\begin{pmatrix}G_l'(0)\\\widetilde{G}_l'(0)\end{pmatrix}+(\xi N_1n(0)-\xi N_2)\begin{pmatrix}G_l''(0)\\\widetilde{G}_l''(0)\end{pmatrix}=0.$$

В последнем выражении, подставив $\xi = (1,0)$ и $\widetilde{\xi} = (0,1)$, получим:

$$\begin{gathered} 2(\theta a_1 - a_3)G_l'(0) + 2(\theta b_1 - b_3)\widetilde{G}_l'(0) + \\ +(\lambda a_1 - a_2)G_l''(0) + (\lambda b_1 - b_2)\widetilde{G}_l''(0) = 0 \\[1em] 2(\theta c_1 - c_3)G_l'(0) + 2(\theta d_1 - d_3)\widetilde{G}_l'(0) + \\ +(\lambda c_1 - c_2)G_l''(0) + (\lambda d_1 - d_2)\widetilde{G}_l''(0) = 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Аналогичные уравнения можно получить, взяв следующие производные:

$$\begin{gathered} 3(\theta a_1 - a_3)G_l''(0) + 3(\theta b_1 - b_3)\widetilde{G}_l''(0) + \\ +(\lambda a_1 - a_2)G_l'''(0) + (\lambda b_1 - b_2)\widetilde{G}_l'''(0) = 0 \\ 3(\theta c_1 - c_3)G_l''(0) + 3(\theta d_1 - d_3)\widetilde{G}_l''(0) + \\ +(\lambda c_1 - c_2)G_l'''(0) + (\lambda d_1 - d_2)\widetilde{G}_l'''(0) = 0 \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} 4(\theta a_1 - a_3)G_l'''(0) + 4(\theta b_1 - b_3)\widetilde{G}_l'''(0) + \\ +(\lambda a_1 - a_2)G_l''''(0) + (\lambda b_1 - b_2)\widetilde{G}_l''''(0) = 0 \\ 4(\theta c_1 - c_3)G_l'''(0) + 4(\theta d_1 - d_3)\widetilde{G}_l'''(0) + \\ +(\lambda c_1 - c_2)G_l''''(0) + (\lambda d_1 - d_2)\widetilde{G}_l''''(0) = 0 \end{gathered}, \tag{2.10}$$

где $m(z) = \delta z + \eta$ и $n(z) = \theta z + \lambda$.

Результатом проведенных вычислений является следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть задан коммутативный узел $\triangle$ (1.21) такой, что $E = \tilde{E}$, $dimE = 2$, а $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 = J_N$ (1.13); спектр оператора T_1 сосредоточен в точке $\{1\}$, а функции $m(z)$ и $n(z)$ удовлетворяют уравнениям $(N + z\Gamma)(1,1)^T = m(z)(1,1)^T$ и $(\widetilde{N}^* + z\widetilde{\Gamma}^*)(1,-1)^T = n(z)(1,-1)^T$, соответственно.*
И пусть функциональная модель системы операторов T_1, T_2 имеет вид (1.25)-(1.28), а функции $E_x(z), \widetilde{E}_x(z), G_x(z), \widetilde{G}_x(z)$ удовлетворяют выражениям (1.14), (1.15), соответственно.
Тогда, чтобы для операторов $N_1, N_2, \Gamma, \widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \widetilde{\Gamma}$ (2.1) выполнялись узловые соотношения узла $\triangle$ (1.21), необходимо, чтобы были справедливы соотношения (2.4)-(2.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С. Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков.: Изд. Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.

2. Золотарёв В.А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряжённых и неунитарных операторов. – Харьков.: ХНУ, 2003. – 342 с.

3. De Branges Н.И., Hilbert spaces of entire functions. – Prentice-Hall: London, 1968. – 326 с.

4. Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Матем. сборник – 1946. – 19. 61:2 – 236-260 с.

5. Надь Б.С., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – Москва.: Мир, 1970. – 431 с.

6. Золотарёв В.А., Сыровацкий В.Н. Преобразование де Бранжа относительно круга // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина, Серия "Математика, прикладная математика и механика". №711 – Харьков, ХНУ, 2005. – с. 80-92.

7. Золотарёв В.А. Модельные представления коммутативных систем линейных операторов // Функциональный анализ и его приложения, 1988, т.22, вып. 1, С. 66-68.

8. Zolotarev V.A. Functional model of commutative operator systems // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry, 2008. vol. 4, No 3, P. 420-440.

9. Сыровацкий В.Н. Функциональные модели коммутативных систем операторов близких к унитарным // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н.Каразина, Серия "Математика, прикладная математика и механика". №1018 - Харьков.: ХНУ, 2012. – С. 41-61.

10. Dym H. Reproducing kernels and Riccati equations // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2001, Vol.11, No.1, P. 35-53.

11. Arov D.Z., Dym H. J-contractive matrix valued functions and related topic // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 116, Cambridge University Press, Cambridge 2008. - 440 p.

Статья получена: 4.10.2013; окончательный вариант: 10.12.2013; принята: 10.12.2013.