Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 1133, 2014, с.114–130

Двухпотоковое распределение в газе из твердых сфер с модами типа "ускорение-уплотнение"

В. Д. Гордевский, Н. В. Лемешева

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина
пл.Свободы 4, 61022, Харьков, Украина
gordevskyy2006@yandex.ru, lemesheva.kharkov@rambler.ru

Для модели твердых сфер построены приближенные явные решения уравнения Больцмана, которые имеют вид бимодального распределения, то есть линейной комбинации нестационарных неоднородных максвеллианов. Они описывают взаимодействие двух потоков газа, которые ускоряются и уплотняются при движении вдоль неподвижной оси. Найдены достаточные условия минимизации интегральной невязки между частями уравнения Больцмана.
Ключевые слова : уравнение Больцмана, твердые сферы, Максвеллиан, приближенные явные решения, бимодальное распределение, "ускорение-уплотнение", интегральная невязка.

Гордевський В. Д., Лемешева Н. В., **Двопотоковий розподіл в газі з твердих куль з модами типу "прискорення-ущільнення".** Для моделі твердих куль побудовано наближені явні розв'язки рівняння Больцмана, які мають вигляд бімодального розподілу, тобто лінійної комбінації нестаціонарних неоднорідних максвеліанів. Вони описують взаємодію між двома течіями газу, які прискорюються та згущуються при русі вздовж нерухомої осі. Знайдено достатні умови мінімізації інтегрального відхилу між частинами рівняння Больцмана.
Ключові слова: рівняння Больцмана, тверді кулі, Максвеліан, наближені явні розв'язки, бімодальний розподіл, "прискорення-ущільнення", інтегральний відхил.

V. D. Gordevskyy, N. V. Lemesheva, **Biflow distribution in a gas of hard spheres with modes of the "accelerating-packing" type.** We constructed explicit approximate solutions of the Boltzmann equation for the hard-sphere model, which have the form of bimodal distribution, i.e. linear combination of nonstationary inhomogeneous Maxwellians. They describe the interaction of two gas flows, which are accelerated and packed when moving along a fixed axis. Sufficient conditions for the minimization of the integral error between the sides of Boltzmann equation are found.
Keywords: Boltzmann equation, hard spheres, Maxwellian, approximate explicit solutions, bimodal distribution, "accelerating-packing", the integral error.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05, 45K05, 82C40, 35Q55.

Введение

Данная работа посвящена проблеме поиска приближенных решений нелинейного кинетического уравнения Больцмана, которое описывает поведение достаточно разреженного газа и в случае модели твердых сфер имеет вид [1-3]:

$$D(f) = Q(f,f); \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot \\ \cdot [f(t, v_1^{'}, x) f(t, v^{'}, x) - f(t, v_1, x) f(t, v, x)], \end{gathered} \tag{3}$$

где d - диаметр молекулы, $t \in R^1$ - время, $x = \left(x^1, x^2, x^3\right) \in R^3$ - координата молекулы, $v = \left(v^1, v^2, v^3\right) \in R^3$ - ее скорость; $f = f(t, v, x)$ - искомая функция распределения молекул, α - вектор на единичной сфере Σ в R^3; $\frac{\partial f}{\partial x}$ - пространственный градиент функции f; v, v_1 и $v^{'}, v_1^{'}$ - скорости двух молекул до и после столкновения соответственно.

Единственными точными решениями уравнения (1)-(3), известными на данный момент для модели твердых сфер, являются глобальные и локальные максвеллианы $M(t, v, x)$ [1, 2, 3], т. е. решения системы $D(M) = Q(M, M) = 0$. Другие, не максвелловские, точные решения удается найти только для определенных моделей взаимодействия между частицами газа — максвелловских молекул и некоторых их обобщений [4-9].

Вместе с тем, актуальной остается проблема описания взаимодействия между двумя и более максвелловскими потоками в разреженном газе.

Например, в работах [10, 11] дано приближенное описание взаимодействия двух потоков газа из твердых сфер, которые представляют собой глобальные максвеллианы (т. е. не зависят ни от t ни от x); в работе [12] изучено поведение бимодального распределения, в которое входят локальные стационарные (зависящие только от x) максвеллианы частного вида. При этом в качестве невязки между частями уравнения Больцмана во всех вышеупомянутых случаях использовалась "смешанная" (равномерная по t, x и интегральная по v) норма разности.

Однако, при попытках перехода к более общему виду локальных максвеллианов, зависящих еще и от t, т. е. к неравновесным процессам в газе, возникли технические трудности, что обуславливается их достаточно сложным видом. Подробный анализ и классификация таких решений с точки зрения их физического смысла и геометрической структуры были проведены в работе [13].

Таким образом, все вышесказанное приводит к необходимости построения таких бимодальных и многомодальных распределений с произвольными гидродинамическими параметрами мод, которые бы описывали процесс взаимодействия между двумя и более максвелловскими потоками в газе из твердых сфер и в то же время удовлетворяли уравнению Больцмана с какой угодно степенью точности.

Именно поэтому целью данной работы является поиск явных приближенных решений уравнения Больцмана для модели твердых сфер, которые будут иметь следующий бимодальный вид:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{4}$$

где φ_i, $i = 1, 2$ - некоторые положительные гладкие коэффициентные функции, т. е.

$$\varphi_i = \varphi_i(t, x) \geqslant 0; \quad \varphi_i \in C^1\left(R^4\right), \; i = 1, 2, \tag{5}$$

а максвеллианы M_i, $i = 1, 2$ относятся к потокам типа "ускорение-уплотнение" [13, 14] и задаются формулами

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-\beta_i (v - \widetilde{v}_i)^2}, \; i = 1, 2, \tag{6}$$

$$\rho_i = \overline{\rho}_i \cdot e^{\beta_i \left(\widetilde{v}_i^2 + 2\overline{u}_i x\right)}, \; i = 1, 2, \tag{7}$$

$$\widetilde{v}_i = \overline{v}_i - \overline{u}_i t, \; i = 1, 2, \tag{8}$$

где ρ_i — плотность i-го потока, $\overline{\rho} = const$; $\beta = \frac{1}{2T}$ — обратная температура газа (T — абсолютная температура), $\widetilde{v}_i$ — массовая скорость i-го потока, $\overline{u}_i$ и $\overline{v}_i$ — произвольные фиксированные векторы в R^3.

С физической точки зрения каждое из распределений (6)–(8) описывает поступательное движение газа вдоль оси $\overline{u}$ с линейной массовой скоростью $\overline{v}$ и массовым ускорением $-\overline{u}$ в произвольной точке x пространства. Плотность ρ меняется от 0 до $+\infty$, при этом минимального значения она достигает при $t = t_0$, где $t_0 = \frac{1}{\overline{u}^2}\left(\overline{u}, \overline{v}\right)$ для любого фиксированного $x \in R^3$, а для произвольного фиксированного $t \in R^1$ увеличивается только вдоль вектора $\overline{u}$.

Другими словами, с ростом времени t число молекул в единице объема увеличивается и при этом постепенно движется быстрее вдоль оси $\overline{u}$, т. е. поток газа уплотняется и ускоряется.

Постановка задачи. Будем рассматривать неоднородную, нестационарную, линейную комбинацию двух максвеллианов вида (4)–(8). Требуется найти такой вид функций (5) и такое поведение всех имеющихся параметров, чтобы при низкотемпературном предельном переходе ($\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$) интегральная невязка

$$\Delta_1 = \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^3} \left|D(f) - Q(f, f)\right| dv \tag{9}$$

была сколь угодно мала, т. е. стремилась к нулю.

В следующем разделе получено несколько результатов, которые дают решение этой задачи, а именно, найдены некоторые условия, достаточные для минимизации невязки Δ_1.

Основные результаты

Прежде чем перейти к изучению поведения невязки Δ_1 при параметрах $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$, проведем несколько предварительных преобразований правой части выражения (9).

Подставим распределение (4) в уравнение (1)–(3), учитывая, что $D(M_i) = Q(M_i, M_i) = 0$, $i = 1, 2$; мы получим:

$$D(f) = M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2),$$

$$Q(f, f) = \varphi_1 \varphi_2 \left[Q(M_1, M_2) + Q(M_2, M_1) \right],$$

а значит, интеграл по переменной v из (9) можно переписать в виде

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv = \\ = \int\limits_{R^3} \left| \sum_{i=1}^{2} M_i D(\varphi_i) - \varphi_1 \varphi_2 \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} Q(M_i, M_j) \right| dv. \tag{10}$$

Используем представление интеграла столкновений в виде разбиения $Q(f, g) = G(f, g) - f L(g)$ (как это сделано, например, в [1, 3, 15]), где

$$G(f, f) = \frac{d^2}{2} \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot f(t, v_1', x) f(t, v', x),$$

$$f L(f) = f(t, v, x) \frac{d^2}{2} \int\limits_{R^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha |(v_1 - v, \alpha)| \cdot f(t, v_1, x);$$

подставляя вместо функции f максвеллианы M_1, M_2, и учитывая, что $G \geqslant 0$ и $M_i > 0$, получим следующую оценку сверху для выражения (10):

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv = \int\limits_{R^3} |M_1 D(\varphi_1) + M_2 D(\varphi_2) - \\ -\varphi_1 \varphi_2 \left[G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1) - M_1 L(M_2) - M_2 L(M_1) \right] | \, dv \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{R^3} \left[M_1 |D(\varphi_1)| + M_2 |D(\varphi_2)| + \varphi_1 \varphi_2 \left(G(M_1, M_2) + G(M_2, M_1) \right) + \\ + \varphi_1 \varphi_2 \left(M_1 |L(M_2)| + M_2 |L(M_1)| \right) \right] dv. \tag{11}$$

Далее, с учетом того, что $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$, справедливы равенства [1, 3]:

$$\int\limits_{R^3} G(M_1, M_2) dv = \int\limits_{R^3} M_1 L(M_2) dv = \int\limits_{R^3} G(M_2, M_1) dv = \int\limits_{R^3} M_2 L(M_1) dv.$$

Следовательно, выражение (11) можно представить следующим образом:

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{R^3} [M_1|D(\varphi_1)| + M_2|D(\varphi_2)|]\, dv + 4\varphi_1\varphi_2 \int\limits_{R^3} M_1\, |L(M_2)|\, dv. \tag{12}$$

Так как [15]

$$L(M_i) = \frac{d^2\rho_i}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{R^3} \left| v - \widetilde{v}_i - \frac{w}{\sqrt{\beta_i}} \right| \cdot e^{-w^2} dw,$$

то ввиду (2) и (6) сумма интегралов в (12) примет вид:

$$\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{3/2} \cdot e^{-\beta_i(v-\widetilde{v}_i)^2} \left| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + v\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \right| dv +$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1\rho_2}{\pi^2} d^2 \int\limits_{R^6} \beta_1^{3/2} \cdot e^{-\beta_1(v-\widetilde{v}_1)^2} \left| v - \widetilde{v}_2 - \frac{w}{\sqrt{\beta_2}} \right| \cdot e^{-w^2} dw dv.$$

После замены $u = \sqrt{\beta_i}(v - \widetilde{v}_i)$, с учетом (8), получим основной вид оценки сверху для выражения (10):

$$\int\limits_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i(t,x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du + \tag{13}$$
$$+4\varphi_1\varphi_2 \frac{\rho_1(t,x)\rho_2(t,x)}{\pi^2} d^2 \int\limits_{R^6} F_{12} \cdot e^{-w^2-u^2} dw du,$$

где

$$F_{12} = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_1}} - \frac{w}{\sqrt{\beta_2}} + \overline{v}_1 - \overline{v}_2 + (\overline{u}_2 - \overline{u}_1)t \right|. \tag{14}$$

Для полноты изложения последующих результатов приведем несколько определений, которые были введены в работе [16] и использованы в [17].

Определение 1. *Пусть G — такая ограниченная область в R^n, что число компонент связности пересечения G с любой прямой, параллельной какой-либо из координатных осей, конечно. Для всякого $\delta > 0$ обозначим через G_δ множество точек из R^n, отстоящих от G не более чем на δ.*

Если $n = 4$ и координаты обозначаются как $t,\ x^k$ $(k = 1,2,3)$, то через $G^{\,x}$ - обозначим проекцию G на гиперплоскость $t = 0$, а через $G^{\,k}$ - проекцию G на гиперплоскость $x^k = 0$ $(k = 1,2,3)$.

Определение 2. *Финитным "δ-плато" над областью $G \subset R^4$, $\delta > 0$ называется такая функция $\varphi_\delta(G,t,x) \in C^1(R^4)$, что*

$$\varphi_\delta(G,t,x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ (t,x) \in G, \\ 0,\ (t,x) \in R^4 \setminus G_\delta, \\ 0 \leqslant \varphi_\delta \leqslant 1,\ (t,x) \in G_\delta \setminus G, \end{array} \right. \tag{15}$$

и, кроме того, на любой прямой, параллельной одной из координатных осей, функция φ_δ имеет не более чем конечное число строгих экстремумов.

Теперь вернемся непосредственно к поставленной задаче и рассмотрим несколько вариантов ее решения, которые дают различные достаточные условия стремления невязки (9) к нулю при определенном выборе функций φ_i, $i = 1,2$ и гидродинамических параметров.

Теорема 1. *Пусть $G_1, G_2 \subset R^4$ — ограниченные области из Определения 1, и $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $G_{1,\delta_1} \cap G_{2,\delta_2} = \emptyset$. Пусть функции φ_i, $i = 1,2$ из распределения (4) имеют вид "δ-плато" (15), причем $\varphi_{\delta_1}(G_1,t,x)$ и $\varphi_{\delta_2}(G_2,t,x)$ таковы, что общее количество их экстремумов из Определения 2, ограничено равномерно относительно всех аргументов константой $K > 0$ при $\delta_1, \delta_2 \to 0$.*

Кроме этого, пусть выполняются следующие условия:

$$\overline{u}_i = \frac{\overline{u}_{oi}}{\beta_i^{n_i}},\ i = 1,2, \tag{16}$$

$$\overline{v}_i = \frac{\overline{v}_{oi}}{\beta_i^{k_i}},\ i = 1,2, \tag{17}$$

где $\overline{u}_{oi}$, $\overline{v}_{oi}$ — произвольные фиксированные векторы, а числа n_i, k_i удовлетворяют неравенствам

$$n_i \geqslant 1,\ k_i \geqslant \frac{1}{2},\ i = 1,2.$$

Тогда существует такое Δ_1', для которого верно

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1'. \tag{18}$$

Причем при любом фиксированном $d > 0$

$$\lim_{m(G_i^x)\to 0} \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = 0, \tag{19}$$

где $m(G_i^x)$, $i = 1,2$ - объем (мера) проекции множества G_i на подпространство $t = 0$.

Доказательство. Проинтегрировав выражение (13) по x и t, получим следующий вид оценки для невязки (9):

$$\Delta_1 \leqslant \Delta_1' =$$
$$= \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} dx \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| \rho_i(t,x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du +$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2} \int\limits_{R^1} dt \int\limits_{R^3} \varphi_1 \varphi_2 \rho_1(t,x) \rho_2(t,x) dx \int\limits_{R^6} F_{12} \cdot e^{-w^2-u^2} dw du, \tag{20}$$

где F_{12} имеет вид (14).

Эта оценка корректно определена, так как величины $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$; $\left(\overline{u}_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right) t$; $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|$; φ_i; $(\varphi_i, \overline{u}_i)t$; $\varphi_1\varphi_2$ после умножения на $\rho_i(t,x)$ принадлежат пространству $L_1(R^4)$ при всех $\beta_i > 0,\ i = 1,2$ благодаря финитности функций φ_i, $i = 1,2$.

Равномерная сходимость всех интегралов, входящих в правую часть неравенства (20), которая следует из условий корректности оценки, описаных выше, и финитности функций φ_i, а также благодаря тому, что функции e^{-w^2} и e^{-u^2} — быстроубывающие, позволяет перейти к низкотемпературному пределу в этом выражении.

Таким образом, с учетом (7), (8), (16), (17) и (14), мы получим:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \rho_i(t,x) = \overline{\rho}_i \mu_i(x),\ i = 1,2,$$

где

$$\mu_i(x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ n_i > 1,\ k_i > \frac{1}{2},\ i = 1,2, \\ e^{2\overline{u}_{oi} x},\ n_i = 1,\ k_i > \frac{1}{2},\ i = 1,2, \\ e^{\overline{v}_{oi}^2 + 2\overline{u}_{oi} x},\ n_i = 1,\ k_i = \frac{1}{2},\ i = 1,2; \end{array} \right. \tag{21}$$

а

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} F_{12} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{R^4} dt dx \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i \mu_i(x) \pi^{-3/2} e^{-u^2} du,$$

который после вычисления интеграла по переменной u, будет иметь вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{R^4} dt dx \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i \mu_i(x). \tag{22}$$

Возвращаясь непосредственно к виду функций φ_i, $i = 1,2$, т. е. условию (15), ввиду (21) мы получим следующие результаты.

1) Если $\mu_i(x) = 1$, то предел (22) будет иметь вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} = \overline{\rho}_1 \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt + \overline{\rho}_2 \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt. \tag{23}$$

Опираясь на условия теоремы, рассмотрим первый интеграл из (23) (обозначим $\mathfrak{D}_{13} = G_{1,\delta_1} \backslash G_1$) и оценим его таким же образом как это было сделано с аналогичным интегралом в работе [16]:

$$\begin{gathered} \int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt = \\ = \int\limits_{G_1} \left| \frac{\partial 1}{\partial t} \right| dtdx + \int\limits_{R^4 \backslash G_{\delta_1}} \left| \frac{\partial 0}{\partial t} \right| dtdx + \int\limits_{G_{1,\delta_1} \backslash G_1} \left| \frac{\partial \varphi_{\delta_1}}{\partial t} \right| dtdx = \\ = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dtdx = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt = \\ = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \sum_{s=1}^{N(x,\delta_1)} \int\limits_{a_s}^{a_{s+1}} \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right| dt = \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \sum_{s=1}^{N(x,\delta_1)} \left| \int\limits_{a_s}^{a_{s+1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} dt \right| = \\ \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} dx \sum_{s=1}^{N(x,\delta_1)} |\varphi_1(a_{s+1}, x) - \varphi_1(a_s, x)| \leqslant \\ \leqslant 2 \int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x} N(x, \delta_1) dx \leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{13}^x), \end{gathered} \tag{24}$$

где $a_s,\ s = 1, ..., N(x, \delta_1)$ — строгие экстремумы функции φ_1, принадлежащие прямым, параллельным оси t, для некоторых фиксированных x и δ_1; K — константа из условия теоремы; оценка φ_1 следует из (15).

Аналогичным образом оценивается второй интеграл из (23), где $\mathfrak{D}_{23} = G_{2,\delta_2} \backslash G_2$:

$$\int\limits_{R^3} dx \int\limits_{R^1} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt = \int\limits_{\mathfrak{D}_{23}^x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right| dt \leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{23}^x). \tag{25}$$

Вспоминая обозначения для $\mathfrak{D}_{13}^x$ и $\mathfrak{D}_{23}^x$, мы можем написать, что

$$\lim_{\delta_1 \to 0} m(\mathfrak{D}_{13}^x) = m(G_1^x), \tag{26}$$

$$\lim_{\delta_2 \to 0} m(\mathfrak{D}_{23}^x) = m(G_2^x). \tag{27}$$

Таким образом, из (23)–(27) мы получим:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1^{'}\leqslant 2\overline{\rho}_1 Km(G_1^x)+2\overline{\rho}_2 Km(G_2^x)=2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i m(G_i^x).$$

Откуда следует (19).

2) Если $\mu_i(x)=e^{2\overline{u}_{oi}x}$, то выражение (22) примет вид:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1^{'}=\overline{\rho}_1\int\limits_{R^4}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|e^{2\overline{u}_{o1}x}dtdx+\overline{\rho}_2\int\limits_{R^4}\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|e^{2\overline{u}_{o2}x}dtdx. \qquad (28)$$

Преобразуем интегралы в (28) аналогично тому, как это было сделано в случае 1), с учетом того, что в силу ограниченности множеств $\mathfrak{D}_{13}^x$ и $\mathfrak{D}_{23}^x$ существует константа $q>0$ такая, что $|x|\leqslant q$ и, значит $e^{2\overline{u}_{oi}x}\leqslant e^{2|\overline{u}_{oi}|q}$:

$$\int\limits_{R^4}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|e^{2\overline{u}_{o1}x}dtdx=\int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x}e^{2\overline{u}_{o1}x}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant e^{2|\overline{u}_{o1}|q}\int\limits_{\mathfrak{D}_{13}^x}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right|dt\leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{13}^x)e^{2|\overline{u}_{o1}|q},$$

$$\int\limits_{R^4}\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right|e^{2\overline{u}_{o2}x}dtdx\leqslant 2Km(\mathfrak{D}_{23}^x)e^{2|\overline{u}_{o2}|q}.$$

Поэтому, учитывая (26) и (27)

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1^{'}\leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{2|\overline{u}_{oi}|q}m(G_i^x),$$

откуда получаем необходимое утверждение (19).

3) Если $\mu_i(x)=e^{\overline{v}_{oi}^2+2\overline{u}_{oi}x}$, то, используя выкладки, полученные в случаях 1) и 2), имеем:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}}\Delta_1^{'}\leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{\overline{v}_{oi}^2+2|\overline{u}_{oi}|q}m(\mathfrak{D}_{i3}^x).$$

Переходя к пределу при $\delta_1\to 0$ и $\delta_2\to 0$ в последнем неравенстве, мы получим:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} \leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i e^{\overline{v}_{oi}^2+2|\overline{u}_{oi}|q} m(G_i^x),$$

что в дальнейшем приводит нас к необходимому результату, т. е. снова к утверждению (19).

Таким образом, при любых $\mu_i(x)$ из (21) справедливо (19), что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть функции φ_i в распределении (4) имеют вид*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)e^{-\beta_i((\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2+2\overline{u}_i x)},\ i=1,2, \tag{29}$$

где функции ψ_i такие, что выражения

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|;\ \psi_1\psi_2;\ \psi_i;\ \psi_i t;\ \left(\overline{u}_i,\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right)t,\ i=1,2 \tag{30}$$

принадлежат пространству $L_1(R^4)$.

Кроме того, пусть выполняется (16) при $n_i > \frac{1}{2}$.

Тогда справедлива оценка (18), причем существует конечный предел величины $\Delta_1^{'}$, который равен

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} = \int\limits_{R^4} dtdx\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+\overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| + 4\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1-\overline{v}_2|\int\limits_{R^4}\psi_1\psi_2 dtdx. \tag{31}$$

Доказательство. Будем опираться на вид оценки (18), а именно на формулу (20), полученную при доказательстве Теоремы 1. Вычислим производные функций $\varphi_i,\ i=1,2$, вида (29):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)e^{-\beta_i((\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2+2\overline{u}_i x)},\ i=1,2, \tag{32}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+2\beta_i\psi_i((\overline{v}_i,\overline{u}_i)-\overline{u}_i^2 t)\right)e^{-\beta_i((\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2+2\overline{u}_i x)},\ i=1,2. \tag{33}$$

Подставив полученные выражения (32) и (33) в (20) (сходимость соответствующих интегралов выплывает из условия (30)) мы приходим к следующему виду оценки для $\Delta_1^{'}$:

$$\Delta_1^{'} = \int\limits_{R^4} dtdx\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{R^3}\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}+(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)\frac{\partial\psi_i}{\partial x}+\frac{u}{\sqrt{\beta_i}}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}-2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)\right|\overline{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{-u^2}du+$$
$$+4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\int\limits_{R^4}\psi_1\psi_2 dtdx\int\limits_{R^6}F_{12}e^{-w^2-u^2}dwdu \tag{34}$$

при сохранении (14).

Предельный переход благодаря (16) (обоснование его такое же как при доказательстве Теоремы 1) дает:

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} F_{12} = |\overline{v}_1 - \overline{v}_2|, \tag{35}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} -2\sqrt{\beta_i}\psi_i(u,\overline{u}_i) = 0 \text{ при } n_i > \frac{1}{2}.$$

В результате перехода к пределу в (34) и дальнейшего интегрирования по u получаем (31).

Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть имеют место все предположения Теоремы 2, а функции $\psi_i(t,x)$, $i=1,2$ удовлетворяют тем же условиям, которые были наложены на функции φ_i, $i=1,2$ в Теореме 1.*

Тогда соотношение

$$\Delta_1 \to 0 \tag{36}$$

справедливо в предположениях аналогичных (19) и, кроме того, если имеет место хотя бы одно из условий:

1) для любых $\psi_i(t,x)$, $i=1,2$, удовлетворяющих условиям (30)

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2; \tag{37}$$

2)

$$supp\psi_1 \cap supp\psi_2 = \varnothing; \tag{38}$$

3) для произвольных $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ и $\psi_i(t,x)$, $i=1,2$, с учетом (30)

$$\lim_{d\to 0}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\(i=1,2)}} \Delta_1' = 0. \tag{39}$$

Доказательство. Легко видеть, что условие (30) Теоремы 2 выполняется благодаря финитности функций $\psi_i(t,x)$, $i=1,2$ и, с учетом (16) при $n_i > \frac{1}{2}$ очевидно, что справедливо соотношение (31), причем все интегралы, входящие в (31), сходятся также благодаря финитности ψ_i, $i=1,2$.

Исходя из того, что функции ψ_i, $i=1,2$ выбраны в виде финитных "плато", а именно в виде (15), где вместо φ_i, $i=1,2$ производится подстановка ψ_i, $i=1,2$, и вспоминая обозначения $\mathfrak{D}_{13}$ и $\mathfrak{D}_{23}$, первое слагаемое в (31) может быть оценено сверху следующим образом:

$$\int\limits_{R^4} dtdx \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \overline{v}_i \frac{\partial\psi_i}{\partial x} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\mathfrak{D}_{i3}} dtdx \left[\left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} \right| \overline{\rho}_i + \sum_{k=1}^{3} \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial x^k} \right| \overline{\rho}_i |\overline{v}_i^k| \right]. \tag{40}$$

Опираясь на технику оценивания интегралов, проведенную при доказательстве Теоремы 1 и в работе [16], с учетом (26) и (27), мы получим:

$$\lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}} \lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} \leqslant 2K\sum_{i=1}^{2}\left[\overline{\rho}_i m(G_i^x) + \sum_{k=1}^{3}\overline{\rho}_i|\overline{v}_i^k| m(G_i^k)\right], \tag{41}$$

где $m(G_i^k)$, $i=1,2$ — объем (мера) проекции множества G_i на подпространство $x^k=0$, $(k=1,2,3)$. Следовательно, если предположить, что $m(G_i^x)\to 0$ и $m(G_i^k)|\overline{v}_i^k|\to 0$, то первое слагаемое в (31) стремится к нулю, а второе слагаемое становится бесконечно малым в виду выполнения хотя бы одного из условий (37)–(39). Откуда следует выполнение (36), что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть*

$$\varphi_i(t,x) = \psi_i(t,x)e^{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2},\ i=1,2, \tag{42}$$

где функции ψ_i, $i=1,2$ такие, что произведения величин (30) на множитель $exp\{2\beta_i\overline{u}_i x\}$, $i=1,2$ принадлежат пространству $L_1(R^4)$, а предположение (16) выполняется для $n_1\geqslant 1$.

Тогда существует Δ_1, определенное в соответствии с (9), такое, что выполняется (18), причем конечный предел величины $\Delta_1^{'}$ существует и равняется выражению (31) при $n_i>1$, а при $n_i=1$

$$\begin{gathered}\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty\\ (i=1,2)}} \Delta_1^{'} = \int\limits_{R_4} dtdx\sum_{i=1}^{2}\overline{\rho}_i\left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\psi_i(\overline{u}_{oi},\overline{v}_i) + \overline{v}_i\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right| e^{2\overline{u}_{oi}x} + \\ +4\pi d^2\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2|\overline{v}_1-\overline{v}_2|\int\limits_{R^4} dtdx\psi_1\psi_2 e^{2\overline{u}_{o1}x}e^{2\overline{u}_{o2}x}.\end{gathered} \tag{43}$$

Доказательство. Проведем доказательство аналогично тому, как это было сделано в Теореме 2, при этом, благодаря (42), вместо (32) и (33) будем иметь

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \frac{\partial\psi_i}{\partial x}e^{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\beta_i\psi_i((\overline{u}_i,\overline{v}_i) - t\overline{u}_i^2)\right)e^{-\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2}.$$

Следовательно, справедлив следующий аналог выражения (34), где F_{12} имеет вид (14)

$$\Delta_1' = \int\limits_{R^4} dtdx \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{R^3} \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + 2\beta_i \psi_i \left((\overline{u}_i, \overline{v}_i) - t\overline{u}_i^2 \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t \right) \right| \overline{\rho}_i \pi^{-3/2} e^{2\beta_i \overline{u}_i x} e^{-u^2} du + \tag{44}$$
$$+4 \frac{d^2}{\pi^2} \overline{\rho}_1 \overline{\rho}_2 \int\limits_{R^4} dtdx \psi_1 \psi_2 e^{2\beta_1 \overline{u}_1 x} e^{2\beta_2 \overline{u}_2 x} \int\limits_{R^6} F_{12} e^{-w^2-u^2} dwdu.$$

Дальнейший переход к пределу при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1,2$ (возможность такого предельного перехода была обоснована в доказательстве Теоремы 1) дает следующие результаты:

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} 2\beta_i \psi_i (\overline{u}_i, \overline{v}_i) = \left[\begin{array}{l} 2\psi_i(\overline{u}_{oi}, \overline{v}_i), \ n_i = 1, \\ 0, \ n_i > 1; \end{array} \right. \tag{45}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} 2\beta_i \psi_i \overline{u}_i^2 t = 0 \text{ при } n_i \geqslant 1; \tag{46}$$

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} e^{2\beta_i \overline{u}_i x} = \left[\begin{array}{l} e^{2\overline{u}_{oi} x}, \ n_i = 1, \\ 1, \ n_i > 1. \end{array} \right. \tag{47}$$

Следовательно, предельный переход в (44), с учетом (35), (45)–(47), после интегрирования по u, приводит нас к конечному пределу величины Δ_1', который равняется выражению (31) при $n_i > 1$, а при $n_i = 1$ полностью совпадает с (43). Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть выполнены все предположения Теоремы 3, а также сохраняются предположения Следствия 1 с тем лишь отличием, что (16) справедливо для параметров $n_i \geqslant 1$. Пусть, кроме этого, выполняется дополнительное условие*

$$(\overline{u}_i, \overline{v}_i) = 0, \ i = 1, 2. \tag{48}$$

Тогда утверждение (36) ($\Delta_1 \to 0$) остается в силе.

Доказательство. Легко видеть, что, в силу финитности, функции ψ_i, $i = 1,2$ вида (15), при выполнении предположений данного следствия, удовлетворяют требованиям Теоремы 3.

Таким образом, мы можем воспользоваться утверждениями Теоремы 3. Рассмотрим случай, когда $n_i > 1$. Легко видеть, что доказательство этого случая идентично доказательству Следствия 1, где в итоге мы приходим к необходимому результату. Однако, для значения параметров $n_i = 1$, ситуация несколько усложняется. Как было доказано выше, мы можем воспользоваться утверждением (43) Теоремы 3, где выражение $2\psi_i(\overline{u}_{oi}, \overline{v}_i)$ в первом интеграле исчезнет благодаря условию (48), а второй интеграл будет либо равен нулю, либо к нему стремиться вследствии выполнения хотя бы одного из предположений (37)–(39). Дальнейшая оценка оставшихся слагаемых в равенстве (43) выполняется подобно тому, как это было сделано в доказательстве Следствия 1, с той лишь разницей, что в выражении (41) появится множитель $e^{2|\overline{u}_{oi}|q}$, $i = 1, 2$, где $q > 0$ — константа, существование которой описано во втором пункте доказательства Теоремы 1, что приводит к необходимому результату, а именно, к выполнению утверждения (36).

Теорема 4. *Пусть вместо (29) или (42) выполняется следующее равенство:*

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x)e^{-2\beta_i\overline{u}_i x},\ i = 1, 2, \tag{49}$$

и сохраняются предположения (16), (17) для параметров

$$n_i > \frac{1}{2},\ k_i \geqslant \frac{1}{2},\ i = 1, 2. \tag{50}$$

Кроме того, финитные функции ψ_i, $i = 1, 2$ вида "δ-плато" обеспечивают принадлежность пространству $L_1(R^4)$ произведений величин из (30) на множитель $exp\{-2\beta_i\overline{u}_i x\}$, $i = 1, 2$.

Тогда справедливо утверждение (18), где

$$\lim_{\substack{\beta_i\to+\infty \\ (i=1,2)}} \Delta_1' = \int\limits_{R^4} dtdx \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i\sigma_i \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right|, \tag{51}$$

а

$$\sigma_i = \left[\begin{array}{l} 1,\ n_i > \frac{1}{2}, k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{\overline{v}_{oi}^2},\ n_i > \frac{1}{2}, k_i = \frac{1}{2}. \end{array}\right. \tag{52}$$

Доказательство. Очевидно, что при вычислении частных производных от (49) мы получим

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right)\cdot e^{-2\beta_i\overline{u}_i x}, \tag{53}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial\psi_i}{\partial t}\cdot e^{-2\beta_i\overline{u}_i x}, \tag{54}$$

что в свою очередь, при подстановке в (20) даст результат аналогичный (44), а именно:

$$\begin{aligned} \Delta_1' = \int\limits_{R^4} dtdx \sum_{i=1}^{2}\int\limits_{R^3} \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t\right)\cdot\right. \\ \left.\cdot\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i\psi_i\overline{u}_i\right\}\right| \overline{\rho}_i\pi^{-3/2}e^{\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2}e^{-u^2}du+ \\ +4\frac{d^2}{\pi^2}\overline{\rho}_1\overline{\rho}_2\int\limits_{R^4} dtdx\psi_1\psi_2 e^{\beta_1(\overline{v}_1-\overline{u}_1 t)^2}e^{\beta_2(\overline{v}_2-\overline{u}_2 t)^2}\int\limits_{R^6} F_{12}\cdot e^{-w^2-u^2}dwdu. \end{aligned} \tag{55}$$

Далее, предположения (16), (17) и (50) гарантируют существование конечного предела экспоненты, представленной в (55):

$$\lim_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} e^{\beta_i(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2} = \sigma_i,\ i = 1,2 \tag{56}$$

где функции σ_i вида (52).

Ввиду все тех же только что упомянутых условий (16), (17), (50) при предельном переходе в (55) все слагаемые первой части оценки $\Delta_1^{'}$, которые находятся под модулем, кроме $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$, стремятся к нулю при $\beta_i \to +\infty,\ i = 1,2$; вторая же часть равняется нулю, благодаря тому, что $\lim\limits_{\substack{\beta_i \to +\infty \\ (i=1,2)}} F_{12} = 0$.

Все изложенные факты после применения к равенству (55) и дальнейшего вычисления интеграла по переменной u приводят к (51)–(52). Теорема доказана.

Замечание 1. Если в равенстве (49) в качестве функций $\psi_i(t,x)$, $i = 1,2$ рассматривать финитные "плато", описанные в Теореме 1, то мы получим результат, идентичный случаю 1) из доказательства той же Теоремы 1, причем множитель $e^{\overline{v}_{oi}^2}$, вытекающий из (52), существенно ни на что не влияет.

Обсуждение результатов

В данной работе удалось построить ряд бимодальных распределений вида (4)-(8), которые удовлетворяют уравнению Больцмана (1)-(3) лишь приближенно в смысле минимизации невязки (9), тем не менее, имеют достаточно интересный физический смысл.

Так, полученные при доказательстве Следствия 1 условия $m\left(G_i^k\right)|\overline{v}_i^k| \to 0$ значительно расширяют количество возможных вариантов минимизации невязки, по сравнению, например, с условиями $m\left(G_i^k\right) \to 0$ или $|\overline{v}_i^k| \to 0$, благодаря тому, что при разных значениях индекса $k = 1,2,3$ либо мера соответствующей проекции множества G_i, либо соответствующая составляющая массовой скорости стремятся к нулю. Физический смысл всех таких вариантов подробно рассмотрен в работе [16].

Заметим, что в Теореме 2 условие (16) рассматривается только для параметров $n_i > \frac{1}{2}$, так как в случае $n_i = \frac{1}{2}$ в выражении (31) появляется дополнительное слагаемое, минимизация которого приводит к тривиальному результату. То же самое справедливо и для Теоремы 4. А отказ от предположения (17) в Теореме 2 и Теореме 3 позволяет рассмотреть более общий вид решений поставленной в работе задачи.

Также отметим, что в предельных переходах типа (39) использована произвольная малость числа d, что соответствует течению газа близкому к свободномолекулярному (газ близкий к кнудсеновскому); в остальных же случаях рассматривается больцмановский газ при произвольном $d > 0$.

Возможно, в этой работе обнаружены не все распределения вида (4)-(8), что связано с неоднозначностью оценок сверху типа (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов: Пер. с франц. – М.: ИИЛ, 1960. – 118 с.

3. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. – 440 с.

4. Бобылев А.В. О точных решениях уравнения Больцмана. // ДАН СССР, 1975. – Т. 225, **6**. – С. 1296–1299.

5. Бобылев А.В. Об одном классе инвариантных решений уравнения Больцмана. // ДАН СССР, 1976. – Т.231, **3**. – С. 571–574.

6. Krook M., Wu T.T. Exact Solutions of the Boltzmann Equation. // Phys. Fluids, 1977. – Vol 20, **10(1)**. – P. 1589–1595.

7. Петрина Д.Я., Мищенко А.В. О точных решениях одного класса уравнений Больцмана. // ДАН СССР, 1988. – Т. 298, **2**. – С. 338–342.

8. Веденяпин В.В. Анизотропные решения нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул. // ДАН СССР, 1981. – Т. 256, **2**. – С. 338–342.

9. Мищенко А.В., Петрина Д.Я. О линеаризации и точных решениях одного класса уравнений Больцмана. // Теоретическая и математическая физика, 1988. – Т. 77, **1**. – С. 135–153.

10. Гордевский В.Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана. // Теоретическая и математическая физика, 1998. – Т.114, **1**. – С. 126–136.

11. Гордевський В.Д. Деякі класи наближених бімодальних розвязків нелінійного рівняння Больцмана. // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Інститут математики НАН України, 1997. – Вип. 16. – С. 54-64.

12. Гордевский В.Д. Двухпотоковое распределение с винтовыми модами. // Теоретическая и математическая физика, 2001. – Т. 126, **2**. – С. 283–300.

13. Gordevskyy V.D. On the non-stationary Maxwellians. // Math. Meth. Appl. Sci., 2004. – V.27, **2**. – P. 231–247.

14. Gordevskyy V.D., Andriyasheva N.V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas. // Math. Phys., Anal., Geom., 2009. – V.5, **1**. – P. 38–53.

15. Гордевский В.Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер. // Матем. физ., анализ, геом., 1995. – Т.2, **2**. – С. 168–176.

16. Gordevsky V.D. Trimodal Approximate Solutions of the Non–linear Boltzmann Equation. // Math. Meth. Appl. Sci., 1998. – Vol. 21. – P. 1479–1494.

17. Гордевский В.Д. Вихри в газе из твердых сфер. // Теоретическая и математическая физика, 2003. – Т. 135, **2**. – С. 303–314.

Статья получена: 10.10.2014; окончательный вариант: 26.10.2014; принята: 3.11.2014.