Вісник Харківського національного
університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна
математика і механіка"
Том 87, 2018, с. 61–68

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics
and Mechanics"
Vol. 87, 2018, p. 61–68
DOI: 10.26565/2221-5646-2018-87-05

УДК 517.954

Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions

A.A. Makarov[1], D.A. Levkin[2]

[1] *V.N. Karazin Kharkiv National University*
4, Svobody sqr., 61022, Kharkiv, Ukraine
[2] *Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture,*
44, Alchevskih str., Kharkiv, Ukraine
natvasmak@ukr.net, valoi@i.ua

Boundary-value problems for evolutionary pseudo-differential equations with an integral condition are studied. Necessary and sufficient conditions of well-posedness are obtained for these problems in the Schwartz spaces. Existence of a well-posed boundary-value problem is proved for each evolutionary pseudo-differential equation.
Keywords: pseudo-differential equations; boundary-value problem; Fourier transform; Schwartz space.

Макаров О.А., Левкін Д.А. **Крайова задача в шарі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою.** Розглядається крайова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою. Одержано умов коректності цієї задачі у просторах Л. Шварца, а також доведено існування коректної крайової задачі для будь-якого еволюційного псевдодиференціального рівняння.
Ключові слова: псевдодиференціальні рівняння; крайова задача; перетворення Фурьє, простір Шварца.

Макаров А.А., Левкин Д.А. **Краевая задача в слое для эволюционных псевдодифференциальных уравнений с интегральным условием.** Рассматривается краевая задача для эволюционных псевдодифференциальных уравнений с интегральным условием. Получены условия корректности этой задачи в пространствах Л. Шварца, а также доказано существование корректной краевой задачи для любого еволюционного псевдодифференциального уравнения.
Ключевые слова: псевдодифференциальные уравнения; краевая задача; преобразование Фурье; пространство Шварца.

2010 Mathematics Subject Classification: 35S10.

1. Introduction

Numerous papers are dedicated to nonlocal boundary-value problems for differential and pseudo-differential equations. In monograph [1], existing results are reviewed in details. In papers [2, 3, 4], a two-point boundary-value problem for differential and pseudo-differential equations was studied, and necessary and sufficient conditions of well-posedness were obtained for this problem in various spaces of functions. Moreover, therein, existence of well-posed boundary-value problem was proved for a linear system of differential equations with constant coefficients. In paper [5], these results were extended to multilayer under an additional continuity condition (transmission condition). In the present paper, boundary-value problems for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions are studied. Necessary and sufficient conditions of well-posedness are obtained for this problem in the Schwartz spaces. Existence of a well-posed boundary-value problem is proved for each evolutionary pseudo-differential equation.

2. Main part

Consider the following boundary-value problems

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$\int_0^T B\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)\, d\mu(t) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

and

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) + f(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{3}$$

$$\int_0^T B\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)\, d\mu(t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Here $A\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ and $B\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ are pseudo-differential operators with symbols belonging to the space of infinitely differentiable functions with power growth $C^\infty_{-\infty}$ (see [6]), $\mu(t)$ is a function of bounded variation.

Definition 1 *Problem* (1), (2) *is said to be well posed from S to $C^1([0,T], S)$ if for any function $\varphi \in S$ there exists a unique solution $u \in C^1([0,T], S)$ to this problem, and this solution depends continuously on φ in appropriate topology.*

Definition 2 *Problem* (3), (4) *is said to be well posed from $C([0,T], S)$ to $C^1([0,T], S)$ if for any function $f \in C([0,T], S)$ there exists a unique solution $u \in C^1([0,T], S)$ to this problem, and this solution depends continuously on f in appropriate topology.*

Applying the Fourier transform with respect to space variables, we get the dual boundary-value problems

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t} = A(t,s)\widetilde{u}(s,t), \qquad s \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\int_0^T B(t,s)\widetilde{u}(s,t)\,d\mu(t) = \widetilde{\varphi}(s), \qquad s \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

and

$$\frac{\partial \widetilde{u}(s,t)}{\partial t} = A(t,s)\widetilde{u}(s,t) + \widetilde{f}(s,t), \qquad s \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T], \tag{7}$$

$$\int_0^T B(t,s)\widetilde{u}(s,t)\,d\mu(t) = 0, \qquad s \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

where the Fourier transforms $\widetilde{u}$, $\widetilde{\varphi}$, and $\widetilde{f}$ also belong to S for any $t \in [0,T]$. The function

$$\widetilde{u}(s,t) = \psi(s)\exp\left(\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau\right)$$

is the solution to equation (5), where ψ is an arbitrary function. By substituting this formula into equation (6), we obtain

$$\psi(s)\int_0^T B(t,s)\exp\left(\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau\right)d\mu(t) = \widetilde{\varphi}(s), \quad s \in R^n. \tag{9}$$

The condition

$$\Delta(s) = \int_0^T B(t,s)\exp\left(\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau\right)d\mu(t) \neq 0, \quad s \in R^n, \tag{10}$$

is necessary for solvability of equation (9). Solution $\widetilde{u}$ belongs to $C^1([0,T],\,S)$ if and only if, for the resolving function

$$Q(s,t) = \frac{1}{\Delta(s)}\exp\left(\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau\right),$$

we have $Q(\cdot,t) \in C^{\infty}_{-\infty}$, $t \in [0,T]$ (see [6]). Thus we have the following theorem.

Theorem 1 *The problem* (1), (2) *is well-posed from* S *to* $C^1([0,T],\,S)$ *if* $Q(\cdot,t) \in C^{\infty}_{-\infty}$, $t \in [0,T]$.

To solve problem (7), (8), we consider Green's function.

Definition 3 *The function* $G(s,t,\tau)$ *is called Green's function of the problem* (7), (8) *if it satisfies the following conditions:*

1) $G(s,t,\tau)$ *is continuously differentiable on* $[0,\tau)\cup(\tau,T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0,T]$*;*

2) $G(s,\tau+0,\tau) - D(s,\tau-0,\tau) = 1$ *on* $t \in [0,\tau)\cup(\tau,T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0,T]$*;*

3) $\dfrac{\partial}{\partial t}G(s,t,\tau) = G(s,t,\tau)$ *on* $t \in [0,\tau)\cup(\tau,T]$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0,T]$*;*

4) $\displaystyle\int_0^T B(s,t)G(s,t,\tau)\,d\mu(t) = 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0,T]$.

If Green's function exists, then there exists a unique solution to the problem (7), (8). Due to [7], this solution is defined by the formula

$$\widetilde{u}(s,t) = \int_0^T G(s,t,\tau)\widetilde{f}(s,\tau)\,d\tau.$$

Lemma 1 *If Q is the resolving function of problem* (5)*, then*

$$G(s,t,\tau) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\tau B(\xi,s)Q(s,t-\tau+\xi)\,d\mu(\xi), & \tau \le t,\ \ s \in \mathbb{R}^n, \\ \displaystyle -\int_\tau^T B(\xi,s)Q(s,t-\tau+\xi)\,d\mu(\xi), & \tau > t,\ \ s \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

is Green's function of problem (7), (8).

Proof. Evidently, 1) holds. Let us prove 2). We have

$$\begin{aligned} &G(s,\tau+0,\tau) - G(s,\tau-0,\tau) \\ &\quad = \int_0^\tau B(\xi,s)Q(s,\xi)\,d\mu(\xi) + \int_\tau^T B(\xi,s)Q(s,\xi)\,d\mu(\xi) \\ &\quad = \int_0^T B(\xi,s)Q(s,\xi)\,d\mu(\xi) \\ &\quad = \frac{1}{\Delta(s)}\int_0^T B(\xi,s)\exp\left(\int_0^\xi A(\tau,s)\,d\tau\right)d\mu(\xi) = 1. \end{aligned}$$

Condition 3) is true, because Q satisfies equation (5). Now let us prove 4)

$$\begin{aligned} \int_0^T B(s,t)G(s,t,\tau)d\mu(t) &= -\int_0^\tau B(s,t)\int_\tau^T B(s,\xi)Q(s,t-\tau+\xi)\,d\mu(\xi)\,d\mu(t) \\ &\quad + \int_\tau^T B(s,t)\int_0^\tau B(s,\xi)Q(s,t-\tau+\xi)\,d\mu(\xi)d\,\mu(t) \\ &= -\int_\tau^T\int_0^\tau B(s,t)B(s,\xi)Q(s,t-\tau+\xi)\,d\mu(\xi)\,d\mu(t) \\ &\quad + \int_\tau^T\int_0^\tau B(s,t)B(s,\xi)Q(s,t-\tau+\xi)\,d\mu(\xi)\,d\mu(t) = 0. \end{aligned}$$

The lemma is proved. □

Corollary 1 *If problem* (5), (6) *is well-posed, then problem* (7), (8) *is also well posed.*

Proof. If $Q(\cdot,t) \in C^\infty_{-\infty}$, $t \in [0,T]$, then $G(s,t,\tau) \in C^\infty_{-\infty}$, $t,\tau \in [0,T]$. Hence, $\widetilde{u}(s,t) \in C^1([0,T],S)$. The corollary is proved. □

Theorem 2 *For each symbol $A(t,\cdot) \in C^\infty_{-\infty}$, $t \in [0,T]$, there exists a function $B(t,\cdot) \in C^\infty_{-\infty}$, $t \in [0,T]$, such that problem* (1), (2) *is well-posed from S to $C^1([0,T],S)$.*

Proof. Put
$$B(t,s) = \exp\left(-i\,\mathrm{Im}\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau\right).$$
Then
$$\Delta(s) = \int_0^T \exp\left(\mathrm{Re}\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau\right)\,dt > 0.$$
Let us show that
$$Q(\cdot,t) = \frac{1}{\Delta(\cdot)}\exp\int_0^t A(\tau,\cdot)\,d\tau \in C_{-\infty}^{\infty}, \quad t\in[0,T].$$

Since $A \in C\left([0,T], C_{(l)}^{(k)}\right)$ for all k and l, we can approximate A by functions A_ε, $\varepsilon > 0$, that are stepwise with respect to t and obtain
$$\|A(t,\cdot) - A_0(t,\cdot)\|_{(l)}^{(k)} < \varepsilon,\ t\in[0,T], \quad \left\|\int_0^t A(\tau,s)\,d\tau - \int_0^t A_0(\tau,s)\,d\tau\right\|_{(l)}^{(k)} < \varepsilon T.$$

Thus we have reduced problem (1), (2) to the multi-point boundary-value problem in a multilayer
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_0\left(t_k, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t), \quad t_k \le t \le t_{k+1}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1,$$
$$B_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,0) + B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t_1) + \ldots + B_N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x),$$

where $B_k(x) = \exp\left(-i\int_0^{t_k}\mathrm{Im}\,A_0(\tau,s)\,d\tau\right)$. In [5], it was proved that the resolving function Q^* of this boundary-value problem satisfies the conditions
$$|Q^*(s,t)| \le 1 \quad \text{and} \quad \left|\frac{\partial^k Q^*(s,t)}{\partial s^k}\right| \le C_k(1+|s|)^{p_k}, \quad s\in\mathbb{R}^n,\ \tau\in[0,T],$$

i.e., $Q^*(\cdot,t) \in C_{-\infty}^{\infty}$, $t\in[0,T]$. Therefore, $\|A(t,\cdot) - A_0(t,\cdot)\|_{(l)}^{(k)} < M\varepsilon$, $s\in\mathbb{R}^n$, $\tau\in[0,T]$, i.e., $Q(\cdot,t)\in C_{-\infty}^{\infty}$, $t\in[0,T]$. Thus this problem is well posed from S to $C^1([0,T],S)$. The theorem is proved. □

Corollary 1 yields the following corollary.

Corollary 2 *Problem* (3)*,* (4) *is also well posed from* $C([0,T],S)$ *to* $C^1([0,T],S)$*.*

Example 1 Consider the equation
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = (2t-T)\Delta u(x,t) + c(t)u(x,t), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T].$$
In [2], it was shown that there is no well-posed two-point boundary-value problem in S. Consider this equation under the integral boundary condition
$$\int_0^T u(x,t)\,dt = \varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Then the boundary value condition is well posed from S to $C^1([0,T],S)$, and

$$Q(s,t) = \frac{\exp\left(\left(Tt - t^2\right)|s|^2 + \int_0^t c(\tau)\,d\tau\right)}{\int_0^T \exp\left(\left(Tt - t^2\right)|s|^2 + \int_0^t c(\tau)\,d\tau\right)\,dt}, \quad s \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T].$$

is its resolving function. We use Laplace's method to estimate the denominator [8]. If $f(t)$ and $\sigma(t)$ are real-valued functions, $\sigma''(t_0) < 0$, and σ has a single maximum at the point t_0, then the asymptotic behavior of the function

$$F(\lambda) = \int_a^b f(t)\exp\left(\lambda\sigma(t)\right)\,dt$$

is following

$$F(\lambda) \sim f(t_0)\exp\left(\lambda\sigma(t_0)\right)\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\sigma''(t_0)}} \quad \text{as } \lambda \to +\infty.$$

Therefore,

$$\Delta(s) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{|s|}\exp\left(\int_0^{T/2} c(t)\,dt\right)\exp\left(\frac{T^2|s|^2}{4}\right) \quad \text{as } |s| \to +\infty.$$

Hence,

$$Q(s,t) \sim \frac{|s|}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\int_{T/2}^t c(\tau)\,d\tau\right)\exp\left(-\left(t - \frac{T}{2}\right)^2 |s|^2\right) \quad \text{as } |s| \to +\infty.$$

Thus, $Q(\cdot,t) \in C^{\infty}_{-\infty}$, $t \in [0,T]$, and the problem is well posed from S to $C^1([0,T],S)$.

Example 2 Consider the more general equation

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a(t)\Delta u(x,t) + \sum_{k=1}^n b_k(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_k} + c(t)u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T].$$

where $a(t)$, $b_k(t)$, $c(t)$ are real-valued functions continuous on $[0,T]$. Then by theorem 2 the boundary-value problem with the condition

$$\int_0^T u(x_1 - B_1(t), \ldots, x_n - B_n(t))dt = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

where $B_k(t) = \int_0^t b_k(\tau)d\tau$, $1 \le t \le n$, is well posed from S to $C^1([0,T],S)$.

3. Conclusion

It is proved that, for pseudo-differential time-dependent equations, well-posed boundary-value problems exist if the boundary conditions have an integral form. Some interesting examples of well-posed boundary-value problems are given.

REFERENCES

1. B.J. Ptashnik. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations, [B. J. Ptashnik., V.S. Ilkiv, I.I. Kmit, V.M. Polishchuk]. 2002. K.: Scientific thought, 416 p.

2. A.A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations, 1994. – V.30, No.**1**. – P. 144–150.

3. A.A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, Differential Equations, 1996. – V.32, No.**5**. – P. 636–642.

4. L.V. Fardigola. On nonlocal two-point boundary value problems in a layer for equations with variable coefficients, Siberian Math. J., 1997. – V.38, No.**2**. – P. 424–438.

5. A.A. Makarov, D.A. Levkin. Multipoint boundary value problem for pseudodifferential equations in multilayer, Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University. Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics". – 2014. – No.**1120**. – P. 64–74.

6. L.R. Volevich, S.G. Gindikin. Distributions end convolution equations. 1994. M.: Science, 336 p.

7. M.A. Naimark. Linear differential operators. 1961. M.: Science, 528 p.

8. M.V. Fedoryuk. The saddle-point method. 1977. M.: Science, 366 p.

Макаров О.А., Левкін Д.А. **Крайова задача в шарі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з інтегральною умовою.** У даній роботі розглядається крайова задача для еволюційного псевдодіференціального рівняння з інтегральною умовою в просторі Л. Шварца. Ця задача є узагальненням двоточкової і багатоточкової крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних, які розглядалися раніше рядом авторів і для яких були отримані умови коректності в різних просторах функцій. Макаровим О.А. в попередніх роботах було доведено існування коректної двоточкової крайової задачі для будь-якого рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами. Пізніше автори даної роботи узагальнили цей результат на багатоточкову крайову задачу в полішарі при додатковій умові трансмісії. Розглянута в цій роботі крайова задача під дією перетворення Фур'є по просторових змінних переходить в крайову задачу для звичайних диференціальних рівнянь, що залежать від параметрів. Отримано умови коректності вихідної крайової задачі в термінах оцінок на розв'язувальну функцію двоїстої задачі. Потім в роботі доводиться, що для будь-якого псевдодіференціального рівняння зазначеного типу існує коректна крайова задача з інтегральною умовою, яка визначається по символу псевдодіференціального оператора. Для цього використовується апроксимаційна крайова задача в полішарі, яка виходить при рівномірній апроксимації неперервного символу псевдодіференціального оператора кусково-постійним символом з відповідною йому багатоточковою крайовою умовою. Така апроксимаційна крайова задача є коректною в просторі Л. Шварца, а значить, і гранична крайова задача з інтегральною умовою також є коректною в цьому просторі. В роботі також наведені приклади таких коректних крайових задач.
Ключові слова: псевдодиференціальні рівняння; крайова задача; перетворення Фур'є, простір Шварца.

Article history: Received: 20 August 2018; Final form: 28 October 2018;
Accepted: 29 October 2018.