Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
Том 89, 2019, с. 21–32

Visnyk of V.N.Karazin Kharkiv National University
Ser. "Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics"
Vol. 89, 2019, p. 21–32
DOI: 10.26565/2221-5646-2019-89-03

УДК 517.954

Частичная параболичность краевой задачи для псевдодифференциальных уравнений в слое

Макаров А. А., Николенко И. Г.

Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина, пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
natvasmak@ukr.net, nig@ukr.net

В работе рассматривается нелокальная краевая задача для эволюционных псевдодифференциальных уравнений в бесконечном слое. Вводится понятие частично параболической краевой задачи, когда разрешающая функция экспоненциально убывает лишь по части пространственных переменных. Получены необходимые и достаточные условия на символ псевдодифференциального оператора, при которых существуют частично параболические краевые задачи. Исследовано также возмущенное псевдодифференциальное уравнение с символом, зависящим от пространственных и временных переменных.
Ключевые слова: краевая задача; псевдодифференциальные уравнения; преобразование Фурье; параболичность; гипоэллиптичность.

Макаров О. А., Ніколенко І. Г. **Часткова параболічність крайової задачі для псевдодиференціальних рівнянь у шарі.** У роботі розглядається нелокальна крайова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у нескінченному шарі. Вводиться поняття частково параболічної крайової задачі, коли розв'язувальна функція експоненціально убуває лише по частині просторових змінних. Отримані необхідні та достатні умови на символ псевдодиференціального оператора, при яких існують частково параболічні крайові задачі. Досліджено також збурене псевдодиференціальне рівняння з символом, що залежить від просторових і часових змінних.
Ключові слова: крайова задача; псевдодиференціальні рівняння; перетворення Фур'є; параболічність; гіпоеліптичність.

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko. **Partial parabolicity of the boundary-value problem for pseudodifferential equations in a layer.** A nonlocal boundary-value problem for evolutional pseudodifferential equations in an infinite layer is considered in this paper. The notion of the partially parabolic boundary-value problem is introduced when a solving function decreases exponentially only by the part of space variables. Necessary and sufficient conditions for the pseudodifferential operator symbol are obtained in which partially parabolic boundary-value problems exist. The disturbed (excitated) pseudodifferential equation with a symbol which depends on space and temporal variables is also investigated.
Key words: boundary-value problem; pseudodifferential equations; Fourier transform; parabolicity; hypoellipticity.

2010 Mathematics Subject Classification 35S15.

1. Введение

Ранее в работе [1] автором была исследована параболическая краевая задача для псевдодифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t\in[0,T], \tag{1}$$

$$B\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,T) = \varphi(x). \tag{2}$$

Здесь $A\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big), B\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big), C\Big(\frac{\partial}{i\partial x}\Big)$ — псевдодифференциальные операторы с символами $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ и $C(\sigma)$, принадлежащими пространству $C^{\infty}_{-\infty} = \bigcap\limits_{s}\bigcup\limits_{p} C^s_p$. Условие параболичности означает, что разрешающая функция

$$Q(\sigma,t) = \exp\{t\cdot A(\sigma)\}(B(\sigma) + C(\sigma)\exp\{T\cdot A(\sigma)\})^{-1}$$

удовлетворяет оценке $|Q(\sigma,t)| \le c(1+|\sigma|)^p\exp\{-\rho(t)\, b|\sigma|^h\}$ с некоторыми положительными b и h, где $\rho(t) = \min\{t, T-t\}$.

Было выяснено, что параболическая краевая задача указанного вида всегда существует для псевдодифференциальных уравнений, символ которых удовлетворяет оценке $|\operatorname{Re} A(\sigma)| \ge b|\sigma|^h - b_0$ с $b,\,h>0$, а решения параболической краевой задачи будут бесконечно дифференцируемыми при $\varphi(x)\in L^2$, причем свойство повышения гладкости характеризует параболические краевые задачи.

Оказалось также, что параболическую краевую задачу можно возмущать подчиненными псевдодифференциальными операторами с достаточно малыми коэффициентами, и полученная краевая задача будет корректной, причем это свойство также характерно для параболических задач.

Целью данной работы является исследование аналогичных вопросов для *частично параболических* задач, то есть когда разрешающая функция убывает лишь по некоторым переменным. Оказалось, что решения будут гладкими по соответствующим переменным, а сами уравнения можно возмущать подчиненными псевдодифференциальными операторами, содержащими дифференцирование лишь по соответствующим переменным.

Приведены также примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

2. Частично параболические краевые задачи

Приведем некоторые факты, относящиеся к сверткам основных и обобщенных функций. Пусть Φ — пространство основных функций, инвариантное относительно сдвига и оператора отражения, являющееся пространством Фреше, а Φ' — пространство обобщенных функций.

Сверткой основной и обобщенной функций называется функция

$$(f*\varphi)(x) \overset{def}{=} (f,\varphi(x-y)) \quad \forall\, f\in\Phi',\ \ \forall\varphi\in\Phi.$$

Если $\forall\varphi \in \Phi$ свертка $f * \varphi \in \Phi$, то f называется *свертывателем* в пространстве Φ. Соответствующий оператор свертки можно представить как псевдодифференциальный оператор с символом $\widetilde{f}(\sigma)$, являющимся преобразованием Фурье обобщенной функции f. Если в качестве Φ взять пространство Л. Шварца S быстро убывающих функций, то преобразование Фурье свертки будут принадлежать (см. [2]) пространству бесконечно дифференцируемых функций $C^{\infty}_{-\infty}$, удовлетворяющих оценкам

$$|D^k\psi(\sigma)| \le c_k(1+|\sigma|)^{p_k} \quad \forall k=(k_1,\dots,k_n).$$

Если в качестве Φ взять пространство $H^{\infty} = \bigcap\limits_s H^s$, где H^s — пространства Соболева, то символы операторов свертки принадлежат пространству $H^0_{-\infty}$, состоящему из локально интегрируемых функций, растущих не быстрее некоторой степени (см. [2]).

Обозначим $A(\sigma) = FA_1$ — преобразование Фурье от обобщенной функции A_1 , а $A\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\varphi = A_1 * \varphi$.

Определение 1 *Задача (1) – (2) называется корректно разрешимой из пространства Φ в пространство $C^1([0,T],\Phi)$, если $\forall\varphi \in \Phi \quad \exists!\ u \in C^1([0,T],\Phi)$ и если последовательность $\varphi_\nu \to 0$ в пространстве Φ, то и последовательность $u_\nu \to 0$ в топологии соответствующего пространства.*

Критерий корректной разрешимости в указанных выше пространствах, полученный в [3], формулируется следующим образом.

Теорема A. *Пусть $A(\sigma)$, $B(\sigma)$ и $C(\sigma)$ принадлежат пространству $C^{\infty}_{-\infty}$. Задача (1)–(2) корректно разрешима из пространства S (или пространства H^{∞}) в пространство $C^1([0,T],S)$ (или в пространство $C^1([0,T],H^{\infty})$) тогда и только тогда, когда $Q(\cdot,t) \in C^{\infty}_{-\infty}$ $\left(Q(\cdot,t) \in H^0_{-\infty}\right)$* для всех $t \in [0,T]$.

Замечание. Условия данной теоремы обеспечивают также корректную разрешимость в пространствах конечно-гладких функций H^s_l, C^s_l или H^s.

Определение 2 *Задача (1)–(2) называется частично параболической по переменным $x_1,\dots,x_j$ $(1 \le j \le n)$, если разрешающая функция $Q(\sigma,t)$ удовлетворяет оценке*

$$|Q(\sigma,t)| \le c(1+|\sigma|)^p \exp\{-\rho(t)\sum_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\} \quad \forall\sigma \in \mathbb{R}^n, \ \ t \in [0,T]$$

с некоторыми положительными c, b_i, h_i и действительным p.
Здесь $\rho(t) = \min(t, T-t)$.

Теорема 1 *Если краевая задача (1)–(2) частично параболична по переменным $x_1,\dots,x_j$ $(1 \le j \le n)$, то данная задача корректно разрешима из пространства функций, принадлежащих пространству $L^2\left(\mathbb{R}^j\right)$ по переменным $x_1,\dots,x_j$ и принадлежащих пространству $H^{\infty}(\mathbb{R}^{n-j})$ по переменным $x_{j+1},\dots,x_n$, в пространство $C^1\left([0,T],H^{\infty}(\mathbb{R}^n)\right)$.*

Доказательство. Рассмотрим двойственную по Фурье задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{u}(\sigma,t)}{\partial t} = A(\sigma)\widetilde{u}(\sigma,t), \\ B(\sigma)\widetilde{u}(\sigma,0) + C(\sigma)\widetilde{u}(\sigma,T) = \widetilde{\varphi}(\sigma). \end{cases}$$

Тогда решение имеет вид $\widetilde{u}(\sigma,t) = \exp\{t\,A(\sigma)\} \cdot K(\sigma)$ с некоторым $K(\sigma)$. Используя краевые условия, получим

$$K(\sigma) = \frac{\widetilde{\varphi}(\sigma)}{B(\sigma) + C(\sigma)\exp\{TA(\sigma)\}}.$$

Откуда $\widetilde{u}(\sigma,t) = Q(\sigma,t)\cdot\widetilde{\varphi}(\sigma)$. Теперь нужно проверить, что полученное решение принадлежит пространству $FH^{\infty} = \bigcap\limits_{s} H_s$. Но последнее следует из того, что для любых положительных s_i

$$\left| \prod_{i=1}^{j} \left(1 + |\sigma_i|^2\right)^{\frac{s_i}{2}} Q(\sigma,t)\cdot\widetilde{\varphi}(\sigma) \right| \le c_{\nu}(1+|\sigma|)^{-\nu}, \quad \forall\,\nu \ge 0 \ \exists c_{\nu} > 0, \ \ \forall \sigma_i \in \mathbb{R}$$

в силу оценки на $Q(\sigma,t)$.
Теорема доказана.

Выясним для каких уравнений существуют частично параболические краевые задачи.

Теорема 2 *Если $A(\sigma) \in C^{\infty}_{-\infty}$ и $|\operatorname{Re} A(\sigma)| \ge \sum\limits_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i} - b_0$ с положительными b_i и h_i, то существует частично параболическая краевая задача с условиями (2).*

Доказательство. Возьмем $B(\sigma) = 1$, а $C(\sigma) = \exp\{-iT \operatorname{Im} A(\sigma)\} \in C^{\infty}_{-\infty}$. Тогда $Q(\sigma,t) = \dfrac{\exp\{tA(\sigma)\}}{1+\exp\{T\operatorname{Re} A(\sigma)\}}$ и удовлетворяет оценке

$$|Q(\sigma,t)| \le \exp\{-\rho(t)|\operatorname{Re} A(\sigma)|\} \le \exp\left\{-\rho(t)\sum_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\right\},$$

то есть краевая задача является частично параболической.
Теорема доказана.

Замечание. Приведенная при доказательстве этой теоремы краевая задача называется *модельной* и будет использована в дальнейшем.

Приведем примеры частично параболических краевых задач.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x_2}, \\ u(x,0) + u(x_1, x_2 - T,\, T) = \varphi(x). \end{cases}$$

Здесь $A(\sigma)=\sigma_1^2+i\sigma_2$; $B(\sigma)=1$; $C(\sigma)=\exp\{-iT\sigma_2\}$.

Разрешающая функция $Q(\sigma,t)=\dfrac{\exp\{t(\sigma_1^2+i\sigma_2)\}}{1+\exp\{T\sigma_1^2\}}$ удовлетворяет оценке $|Q(\sigma,t)|\le\exp\{-\rho(t)\sigma_1^2\}$, то есть задача является частично параболической по x_1.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1\,\partial x_2}+\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_2^2}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x_3}, \\ u(x,0)+u(x_1,x_2,x_3+T,\,T)=\varphi(x). \end{cases}$$

Здесь $A(\sigma)=-\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2-i\sigma_3$; $B(\sigma)=1$; $C(\sigma)=\exp\{-iT\sigma_3\}$.

Разрешающая функция $Q(\sigma,t)=\dfrac{\exp\{t(-\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2-i\sigma_3)\}}{1+\exp\{T(-\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^2)\}}$ допускает оценку $|Q(\sigma,t)|\le\exp\left\{-\dfrac{1}{2}\rho(t)(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right\}$, то есть задача является частично параболической по $x_1,\ x_2$.

Покажем, что любая корректная краевая задача с условием (2) для уравнения (1), удовлетворяющего теореме 2, является параболической.

Теорема 3 *Если задача (1)–(2) корректно разрешима из пространства $S(\mathbb{R}^n)$ в пространство $C^1([0,T],S(\mathbb{R}^n))$, а $A(\sigma)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то такая задача является частично параболической.*

Доказательство. Разрешающая функция задачи (1)–(2) имеет вид

$$Q(\sigma,t)=\frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{B(\sigma)+C(\sigma)\exp\{TA(\sigma)\}}.$$

Ее можно представить через разрешающую функцию

$$Q_0(\sigma,t)=\frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{1+\exp\{T\,\mathrm{Re}\,A(\sigma)\}}$$

модельной краевой задачи из теоремы 2 следующим образом

$$\begin{aligned} Q(\sigma,t)&=Q_0(\sigma,t)\,\frac{1+\exp\{T\,\mathrm{Re}\,A(\sigma)\}}{B(\sigma)+C(\sigma)\exp\{TA(\sigma)\}}=\\ &=Q_0(\sigma,t)(Q(\sigma,0)+Q(\sigma,T)). \end{aligned}$$

Так как $Q(\sigma,0)$ и $Q(\sigma,T)$ в силу теоремы A удовлетворяют степенной оценке, то $Q(\sigma,t)$ удовлетворяет оценке $|Q(\sigma,t)|\le c(1+|\sigma|)^p\exp\{-\rho(t)\sum\limits_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\}$, то есть краевая задача является частично параболической.

Теорема доказана.

Покажем, что условие на $A(\sigma)$ является не только достаточным, но и необходимым для частичной параболичности.

Теорема 4 *Если краевая задача (1)–(2) является частично параболической по x_i $(i \le j)$, то $A(\sigma)$ удовлетворяет оценке*

$$|\operatorname{Re} A(\sigma)| \ge \sum_{i=1}^{j} b_i |\sigma_i|^{h_i} - b_0$$

с некоторыми положительными b_i и h_i.

Доказательство. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} Q_0(\sigma,t) &= Q(\sigma,t)\cdot \frac{B(\sigma)+C(\sigma)\exp(TA(\sigma))}{1+\exp(T\operatorname{Re} A(\sigma))} = \\ &= Q(\sigma,t)(B(\sigma)+C(\sigma)Q_0(\sigma,T)). \end{aligned}$$

Откуда следует $\dfrac{\exp\{t\operatorname{Re} A(\sigma)\}}{1+\exp\{T\operatorname{Re} A(\sigma)\}} \le c(1+|\sigma|)^p \exp\left\{-\rho(t)\sum\limits_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\right\}$.

Но если $\operatorname{Re} A(\sigma) \ge 0$, то $Q_0(\sigma,t)$ эквивалентна $\exp\{(t-T)\operatorname{Re} A(\sigma)\}$, а если $\operatorname{Re} A(\sigma) < 0$, то $Q_0(\sigma,t)$ эквивалентна $\exp\{t\operatorname{Re} A(\sigma)\}$.

Таким образом

$-\rho(t)|\operatorname{Re} A(\sigma)| \le -\rho(t)\left(\sum\limits_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i} - b_0\right)$ или $|\operatorname{Re} A(\sigma)| \ge \sum\limits_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i} - b_0$.

Теорема доказана.

3. Возмущения частично параболических краевых задач

В данном разделе мы будем рассматривать неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t), \tag{3}$$

а также возмущенное уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + \varepsilon R\left(t,x,\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) + f(x,t), \tag{4}$$

где псевдодифференциальный оператор $R\left(t,x,\dfrac{\partial}{i\partial x}\right)$ с символом $R(t,x,\sigma) \in C^{\infty}_{-\infty}$ действует по формуле

$$R\left(t,x,\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = F^{-1}R(t,x,\sigma)\widetilde{u}(\sigma,t) \quad \forall\, u(x,t) \in S \ \ (\forall\, t \in [0,T]).$$

Будем рассматривать нулевое краевое условие

$$B\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,0) + C\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,T) = 0. \tag{5}$$

Определение 3 *Краевая задача (3)–(5) называется корректно разрешимой из пространства $C^0([0,T],\, H^{s_1})$ в пространство $C^1([0,T],\, H^{s_2})$, если $\forall f \in C^0([0,T],\, H^{s_1})\ \exists!\ u \in C^1([0,T],\, H^{s_2})$ и $\|u\| \le c\|f\|$ с некоторой положительной c.*

В работе [4] было показано, что из корректности задачи (1)–(2) следует корректность задачи (3)–(5) и наоборот при условии, что

$$c_1(1+|\sigma|)^{p_1} \le |B(\sigma)| + |C(\sigma)| \le c_2(1+|\sigma|)^{p_2}.$$

Если определить частичную параболичность задачи (3)–(5) по переменным x_i $i \le j$ выполнением следующего условия на функцию Грина двойственной по Фурье задачи

$$|G(\sigma,t,\tau)| \le c(1+|\sigma|)^p \exp\left\{-\rho(|t-\tau|)\sum_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\right\}$$

с некоторыми положительными c, b_i, h_i и действительным p, то в силу равенства

$$G(\sigma,t,\tau) = \begin{cases} -Q(\sigma,t)C(\sigma)\exp\{(T-\tau)A(\sigma)\}, & t \le \tau \\ \quad Q(\sigma,t)B(\sigma)\exp\{(-\tau)A(\sigma)\}, & t > \tau \end{cases}$$

из частичной параболичности задачи (1)–(2) следует частичная параболичность задачи (3)–(5) и наоборот.

Воспользуемся следующим результатом [5].

Теорема В. *Пусть функция Грина задачи (3)–(5) удовлетворяет условию*

$$\int_0^T \sup_{\sigma}\{\,|R(t,x,\sigma)\,| \cdot |G(\sigma,t,\tau)|\,\}d\tau \le c.$$

Тогда задача (3)–(2) корректно разрешима из пространства $C^0([0,T],H^s)$ в пространство $C^1([0,T]H^{s-q})$ при некотором $q \ge 0$, при любом s и достаточно малых ε.

Теорема 5 *Если задача (3)–(5) частично параболична, причем*

$$|G(\sigma,t,\tau)| \le c\prod_{i=1}^{j}(1+|\sigma_i|)^{p_i} \cdot \exp\left\{-\rho(|t-\tau|)\sum_{i=1}^{j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\right\}$$

с некоторыми положительными c, b_i, h_i и действительными p_i, то при достаточно малых по абсолютной величине ε и при

$$|R(t,x,\sigma)| \le c_1\prod_{i=1}^{j}(1+|\sigma_i|)^{m_i},\ \text{где}\ \sum_{i=1}^{j}\frac{m_i+p_i}{h_i} < 1,\ \ c_1 > 0,$$

возмущенная задача (4)–(5) будет корректно разрешима из пространства $C^0([0,T],H^s)$ в пространство $C^1([0,T],H^{s-q})$ при некотором $q \ge 0$.

Доказательство. Применим теорему B.

$$\sup_{\sigma}\{|R(t,x,\sigma)|\cdot|G(\sigma,t,\tau)|\}\le\sup_{\sigma} c_1\cdot\prod_{i\le j}(1+|\sigma_i|)^{p_i+m_i}\cdot\exp\left\{-\rho(|t-\tau|)\sum_{i\le j} b_i|\sigma_i|^{h_i}\right\}$$

Вычислим $\sup\limits_{\sigma}|\sigma|^{\beta}\exp\{-\alpha|\sigma|^h\}$. Для этого найдем стационарные точки функции

$$f(|\sigma|)=|\sigma|^{\beta}\exp\{-\alpha|\sigma|^h\},$$
$$f'(|\sigma|)=\beta|\sigma|^{\beta-1}\exp\{-\alpha|\sigma|^h\}+|\sigma|^{\beta}\exp\{-\alpha|\sigma|^h\}(-\alpha h)|\sigma|^{h-1}=0,$$

откуда

$$|\sigma|=\left(\frac{\beta}{\alpha h}\right)^{1/h},$$
$$\sup_{\sigma}|\sigma|^{\beta}\exp\left\{-\alpha|\sigma|^h\right\}=\left(\frac{\beta}{\alpha h}\right)^{\frac{\beta}{h}}\cdot e^{\frac{\beta}{h}}=\frac{c}{\alpha^{\frac{\beta}{h}}}.$$

Тогда

$$\sup_{\sigma}\{|R(t,x,\sigma)|\cdot|G(\sigma,t,\tau)|\}\le K\prod_{i\le j}\rho(|t-\tau|)^{-\frac{m_i+p_i}{h_i}}=K\rho(|t-\tau|)^{-\sum\limits_{i\le j}\frac{m_i+p_i}{h_i}}.$$

В силу условия теоремы $\sum\limits_{i=1}^{j}\dfrac{m_i+p_i}{h_i}<1$, тогда получим

$$\int_0^T\sup_{\sigma}\{\,|R(t,x,\sigma)\,|\cdot|G(\sigma,t,\tau)|\,\}d\tau<\infty,$$

и, следовательно, возмущенная задача корректна.
Теорема доказана.

Пример 3.

$$P(\sigma)=\sigma_1^2+\sigma_2^4+\sigma_3^3.$$

Если рассмотреть модельную краевую задачу с краевыми условиями как в теореме 2, то $G(\sigma,t,\tau)$ ведет себя как $\exp\left\{-\rho(|t-\tau|)\left(\sigma_1^2+\sigma_2^4\right)\right\}$.

Взяв $R(t,x,\sigma)=\sigma_1^{m_1}\cdot\sigma_2^{m_2}$, получим условие $\dfrac{m_1}{2}+\dfrac{m_2}{4}<1$, то есть возможны целочисленные значения $m_1=1,\ m_2=1$ или $m_1=0,\ m_2=3$. По переменной x_3 возмущать нельзя, так как данная задача частично параболична только по переменным x_1 и x_2.

4. Частичная параболичность и частичная гипоэллиптичность

Поскольку решения параболической краевой задачи будут бесконечно дифференцируемыми при $\varphi(x)\in L^2$, попытаемся сравнить понятие параболичности с понятием гипоэллиптичности.

Определение 4 (см. [6], с.75) Оператор $P\left(\dfrac{\partial}{idx}\right)$ называется *гипоэллиптическим*, если все решения уравнения $P\left(\dfrac{\partial}{idx}\right)u(x,t)=0$ являются бесконечно дифференцируемыми. Полином $P(\sigma)$ в этом случае также называется гипоэллиптическим.

Критерии гипоэллиптичности, приведенные в ([6], с.75), формулируются следующим образом.

Теорема C. *Уравнение $P\left(\dfrac{\partial}{idx}\right)u(x,t)=0$ является гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий*

(1) *из $P(\sigma+i\tau)=0$, $|\sigma|\to\infty$ следует $|\tau|\to\infty$ (критерий гипоэллиптичности по корням многочлена),*

(2) *если $d(\xi)$ – расстояние от точки $\xi\in R^n$ до поверхности $\{\zeta,\zeta\in C^n : P(\zeta)=0\}$, то $d(\xi)\to\infty$ при $\xi\to\infty$,*

(3) *если $\alpha\neq 0$, то $\dfrac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\to 0$ при $\xi\to\infty$ в R^n.*

Рассмотрим вопрос о связи частичной параболичности с частичной гипоэллиптичностью.

Введем некоторые обозначения. Координаты $x=(x_1,\ldots,x_n)$ разобьем на группы $x'=(x_1,\ldots,x_j)$ и $x''=(x_{j+1},\ldots,x_n)$. Аналогично разобьем на части мультииндекс $\alpha=(\alpha',\alpha'')$.

Определение 5 *Дифференциальный оператор $P(D)$ называется частично гипоэллиптическим относительно подпространства $x''=0$, если выполнено одно из следующих (равносильных) условий:*

(1^*). *если $d(\xi)$ – расстояние от точки $\xi\in R^n$ до поверхности $\{\zeta,\zeta\in C^n : P(\zeta)=0\}$, то $d(\xi)\to\infty$ при $\xi''\to\infty$, а ξ' остается ограниченным;*

(2^*). *если $\alpha\neq 0$, то $\dfrac{P^{(\alpha)}(\xi)}{P(\xi)}\to 0$ при $\xi''\to\infty$, а ξ' – ограничена;*

(3^*). *$P(\xi)=\sum\limits_{\alpha''=0}P_\alpha(\xi'')\,\xi'^{\alpha}$, где $P_0(\xi'')$ – гипоэллиптический, а $\dfrac{P_\alpha(\xi'')}{P_0(\xi'')}\to 0$ при $\xi''\to\infty$.*

В работе ([6], с. 87) приведен критерий гипоэллиптичности относительно одной переменной.

Теорема D. *Дифференциальный оператор $P(D)$ частично гипоэллиптичен относительно гиперплоскости $x_n=0$ тогда и только тогда, когда часть полинома $P(\xi)$, имеющая наивысший порядок по ξ_n, не зависит от других переменных.*

Для выяснения связи между понятиями частичной параболичности и частичной гипоэллиптичности рассмотрим ряд примеров.

Пример 4.

$$P\left(\frac{\partial}{idx}\right)u(x,t)=0,\quad \text{где } P(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1^2+i\sigma_2.$$

Тогда $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) = i\lambda - \sigma_1^2 - i\sigma_2$.

Для $P(\sigma_1, \sigma_2)$ существует задача, частично параболическая по x_1 (см. Пример 1), при этом полином $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2)$ является частично гипоэллиптическим по σ_1, так как выполнены условия теоремы D.

Пример 5.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = i\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + i\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) = i\lambda - i\sigma_1^2 - i\sigma_2^2$. Многочлен, очевидно, частично гипоэллиптичен по каждой пространственной переменной, но $\operatorname{Re} P(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, следовательно, для данного уравнения нельзя поставить частично параболическую краевую задачу.

Пример 6.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_2^2}.$$

В данном случае $P_1(\lambda, \sigma_1, \sigma_2) = i\lambda - \sigma_1^2 - \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_2^2$.
Для данного полинома по переменным σ_1 и σ_2 условия теоремы D не выполнены, следовательно, он не является частично гипоэллиптическим. Но

$$|\operatorname{Re} P(\sigma_1, \sigma_2)| = \sigma_1^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^2 \geq \sigma_1^2 + \sigma_2^2,$$

а значит, по теореме 2, существует задача, частично параболическая по σ_1 и σ_2, более того, даже параболическая.

Приведенные выше примеры показывают, что из частичной гиперболичности уравнения не следует существование частично параболической краевой задачи. И наоборот — приведен пример частично параболической краевой задачи для дифференциального уравнения, не являющегося частично гипоэллиптическим.

5. Заключение

В работе исследованы частично параболические краевые задачи для одного уравнения, в которых улучшается гладкость решения по части переменных. Описаны классы псевдодифференциальных уравнений, для которых существуют частично параболические краевые задачи, выяснено какими псевдодифференциальными операторами можно возмущать такие задачи, чтобы сохранилась корректность.

Выяснено также, что операторы, допускающие постановку частично параболических краевых задач, не обязаны быть частично гипоэллиптическими. И наоборот — не для всякого частично гипоэллиптического уравнения можно поставить частично параболическую краевую задачу.

ORCID ID

A. A. Makarov https://orcid.org/0000-0002-9050-4987

I. G. Nikolenko https://orcid.org/0000-0002-2904-6761

REFERENCES

1. A. A. Makarov. Parabolic boundary value problems for systems of pseudodifferential equations in an infinite layer, Differential Equations, 1996. — Vol. **32**, No. 5. — P. 636–642.
2. L. R. Volevich. The Cauchy problem and related problems for convolution type equations, Advances in Mathematical Sciences, — 1972. — Vol. **27**, — Issue 4 (166). — p. 65–143.
3. A. A. Makarov. A criterion for the correct solvability of a boundary value problem in a layer for a system of linear equations in convolutions in topological spaces, Theoretical and applied questions of differential equations and algebra, Sb. scientific works. — Kiev: Naukova Dumka, 1978. — P. 178–180.
4. A. A. Makarov. The existence of a correct two-point boundary value problem in a layer for systems of pseudo-differential equations, Differential Equations, 1994. — Vol. **30**, No. 1. — P. 144–150.
5. A. A. Makarov. General boundary value problem in the infinite layer for systems of pseudo-differential equations with bounded symbols, Theory of functions, functional analysis and their applications, 1986. — Vol. **46**, — p. 72–77.
6. L. Hörmander. The Analysis of linear partial differential operators. II, Differential operators with constant coefficients. — Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983. — 455 p.

Макаров О. А., Ніколенко І. Г. **Часткова параболічність крайової задачі для псевдодиференціальних рівнянь у шарі.** У роботі розглядається нелокальна крайова задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь у нескінченному шарі. Вводиться поняття частково параболічної крайової задачі, коли розв'язувальна функція експоненціально убуває лише по частині просторових змінних. Це поняття узагальнює поняття параболічної крайової задачі, яке було раніше досліджено одним з авторів даної роботи (Макаровим О.А.) Отримані необхідні та достатні умови на символ псевдодиференціального оператора, при яких існують частково параболічні крайові задачі. Виявилося, що реальна частина символу псевдодиференціальних операторів повинна необмежено зростати степеневим чином за частиною просторових змінних. При цьому вказується конкретний вид крайових умов, які залежать від псевдодиференціального рівняння і також є псевдодифференціальними операторами. Показано, що у розв'язків частково параболічних крайових задач підвищується гладкість розв'язку за частиною просторових змінних. Досліджено також збурене псевдодиференціальне рівняння з символом, що залежить від просторових і часових змінних. Для частково параболічних крайових задач з'ясовано якими псевдодиференціальними операторами можна обурювати вихідне рівняння, щоб дана крайова задача залишалася коректної в просторах Соболєва–Слободецького. Показано також, що хоча властивість підвищення гладкості розв'язків по частині змінних для частково параболічних крайових задач аналогічна властивості розв'язків частково гіпоеліптичних рівнянь, введених Л. Хермандером, але наведені приклади показують, що з часткової гіпоелліптічності рівняння не слідує існування частково параболічної крайової задачі; і навпаки — наведено приклад частково параболічної

крайової задачі для диференціального рівняння, що не є частково гіпоелиптічним.
Ключові слова: крайова задача; псевдодиференціальні рівняння; перетворення Фур'є; параболічність; гіпоеліптичність.

A. A. Makarov, I. G. Nikolenko. **Partial parabolicity of the boundary-value problem for pseudodifferential equations in a layer.** A nonlocal boundary-value problem for evolutional pseudodifferential equations in an infinite layer is considered in this paper. The notion of the partially parabolic boundary-value problem is introduced when a solving function decreases exponentially only by the part of space variables. This concept generalizes the concept of a parabolic boundary value problem, which was previously studied by one of the authors of this paper (A. A. Makarov). Necessary and sufficient conditions for the pseudodifferential operator symbol are obtained in which partially parabolic boundary-value problems exist. It turned out that the real part of the symbol of a pseudodifferential operator should increase unboundedly powerfully in some of the spatial variables. In this case, a specific type of boundary conditions is indicated, which depend on a pseudodifferential equation and are also pseudodifferential operators. It is shown that for solutions of partially parabolic boundary-value problems, smoothness in some of the spatial variables increases. The disturbed (excitated) pseudodifferential equation with a symbol which depends on space and temporal variables is also investigated. It has been found for partially parabolic boundary-value problems what pseudodifferential operators are possible to be disturbed in the way that the input equation of this boundary-value problem would remain correct in Sobolev-Slobodetsky spaces.
It is also shown that although the properties of increasing the smoothness of solutions in part of the variables for partially parabolic boundary value problems are similar to the property of solutions of partially hypoelliptic equations introduced by L. Hörmander, these examples show that the partial parabolic boundary value problem does not follow from partial hipoellipticity; and vice versa — an example of a partially parabolic boundary value problem for a differential equation that is not partially hypoelliptic is given.
Key words: boundary-value problem; pseudodifferential equations; Fourier transform; parabolicity; hypoellipticity.

Article history: Received: 17 February 2019; Final form: 12 May 2019;
Accepted: 13 May 2019.