

УДК 537.87

ВИПРОМІНЮВАННЯ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО СНАРЯДУ В НЕЛІНІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

О. М. Думін, Р. Д. Ахмедов

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 61022, м. Харків, м. Свободи, 4
E-mail: dumin@karazin.ua

Надійшла до редакції 21 листопада 2017 р.

Розв'язана задача випромінювання нестационарного струму в нелінійний простір. Поле, що породжує ефект електромагнітного снаряду, розглянуто в якості прикладу нелінійного впливу поля самого на себе. Нелінійні властивості враховані в матеріальних рівняннях середовища як додаткова компонента вектору поляризації. Кубічна нелінійність вибрана в якості нелінійної складової вектору поляризації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійність Керра, нестационарне випромінювання, плоский диск, електромагнітний снаряд

The solving of the problem of radiation of transient current into nonlinear medium is carried out. Field that generates electromagnetic missile effect is considered as an example of nonlinear influence of the field to itself. Nonlinear properties are accounted in constitutive relations as additional component of polarization vector. Cubic nonlinearity is chosen as nonlinear term of polarization vector.

KEY WORDS: Kerr nonlinearity, transient radiation, plane disk, electromagnetic missile

Решается задача излучения нестационарного тока в нелинейное пространство. Поле, которое порождает эффект электромагнитного снаряда, рассмотрено в качестве примера нелинейного влияния поля самого на себя. Нелинейные свойства учтены в материальных уравнениях среды как дополнительная компонента вектора поляризации. Кубическая нелинейность выбрана в качестве нелинейной составляющей вектора поляризации.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нелинейность Керра, нестационарное излучение, плоский диск, электромагнитный снаряд

ВСТУП

Ця стаття присвячена дослідженню нестационарного електромагнітного поля, що випромінюється плоским диском, за допомогою методу еволюційних рівнянь із використанням ітеративного підходу для врахування ефектів самодії поля у нелінійному середовищі. В якості нелінійних властивостей середовища вибрано кубічну нелінійність Керра, що також є наближенням п'ятого порядку малості у розкладі Тейлора функції поляризації.

Ефект «електромагнітного снаряду» був відкритий у задачі випромінювання плоского диску з рівномірним розподілом нестационарного електричного струму [1]. Він спостерігається в прожекторній зоні випромінювача і полягає у тому, що енергія поля згасає повільніше ніж зворотно пропорційно квадрату відстані. Наведений в [1] розв'язок у частотній області не підходить для подальшого використання у нелінійних задачах через відсутність явної залежності від часу. Крім того необхідно, щоб лінійний розв'язок задачі плоского диску описував поле для всіх значень просторових координат та для довільних проміжків часу спостереження. Така умова викликана тим, що кожна точка простору, що причинно пов'язана з первинним джерелом поля, стає джерелом наведеного струму через взаємодію потужного випромінювання та середовища. При таких умовах наявні розв'язки лінійної задачі не підходили для аналізу нелінійного випромінювання, тому спочатку було побудовано загальний лінійний розв'язок, що відповідає даним умовам [2].

В цій роботі отримано розв'язок задачі нестационарного випромінювання плоского диску в нелінійному просторі. Хоча сам розв'язок представлений тільки у вигляді кратного інтегралу від циліндричних функцій, це дозволяє проводити числовий розрахунок амплітуд полів.

Через те, що задача розв'язана в часовому просторі, буде зручно використовувати термінологію теоретичної фізики для прив'язки до просторово-часового континууму [3]. Точку у чотиривимірній системі координат, де три – просторові, а одна – час, називаємо подією, а область визначення деякого процесу в цій системі координат – інтервалом.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В якості первинного джерела струму розглянуто плоский диск з постійною рівномірною розподіленою густиною електричного струму, що напрямлений вздовж вісі ОХ. Вважаємо, що струм

вмикається одночасно на всій поверхні диску та має часову залежність в формі функції Хевісайда $H(t)$. Тому з'являється необхідність у застосуванні таких методів розв'язання, які враховують перехідні процеси. Розглянемо задачу випромінювання в циліндричній системі координат і розв'яжемо методом еволюційних рівнянь для нульових початкових за часом і граничних за координатою z умов та стороннього джерела

$$\vec{J}_0(\rho, z, t) = \vec{x}_0 A_0 H(t) \delta(z) \{H(\rho) - H(\rho - R)\}. \quad (1)$$

Метод еволюційних рівнянь – це різновид методу неповного розділення змінних, в якому відділяються залежності шуканих функцій від поперечних координат. Тоді саме залежності цих функцій від поздовжньої координати і часу є еволюційними рівняннями, які доповнюються матеріальними рівняннями середовища. Для розв'язання задачі випромінювання плаского диску у нелінійне середовище використаємо такий вираз для вектору індукції електричного поля у випадку кубічної нелінійності середовища:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} + \epsilon_0 \xi_3 (\vec{E} \cdot \vec{E}) \vec{E}. \quad (2)$$

Перший доданок відповідає лінійному наближенню, а другий, що містить нелінійну частину вектору поляризації, – нелінійній поправці до лінійного розв'язку. Ця нелінійна частина матеріальних рівнянь описує нелінійне керрівське середовище. Як відомо, слабка нелінійність може бути представлена у вигляді розкладу вектору поляризації в ряд Тейлора по степенях вектору напруженості електричного поля, і ми можемо врахувати тільки один його член. Пропонується ітеративний підхід до розв'язання нелінійної задачі, що дозволяє отримати нелінійне поле із заданою похибкою [4].

Перша ітерація методу відповідає використанню тільки лінійної частини матеріальних рівнянь. Розв'язок для амплітуд складових електричного поля має кусково-визначену область значень [5] і записується у вигляді:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{A_0}{z} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} \begin{bmatrix} I_1 \cos^2 \varphi + (I_2 - I_1) \sin^2 \varphi \\ I_1 \sin \varphi \cos \varphi + (I_2 - I_1) \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Кусково-визначена область значень I_1 та I_2 включає всі аргументи крім азимутального кута φ та ілюструє вплив принципу причинності на поле у довільній точці спостереження, що породжується струмом джерела. Відсутність кутової залежності в інтервалах випромінювання S_1 , S_2 , S_3 пояснюється осьовою симетрією форми джерела. Перша область інтервалів описує поле, яке має постійну амплітуду та відповідає за ефект електромагнітного снаряду. Фізично це означає, що область випромінювання на диску, яка досягла точки спостереження, має форму круга для інтервалу

$$S_1 \subset 0 < \frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 < (\rho - R)^2 \quad (4)$$

і завдяки цьому забезпечує постійну амплітуду поля для усіх z .

Область S_1 зустрічається лише в прожекторній зоні випромінювача, де $\rho < R$. Друга область інтервалів відповідає проміжку часу, коли точки спостереження досягає поле точкових джерел на диску у формі сектора кола:

$$S_2 \subset (\rho - R)^2 < \frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 < (\rho + R)^2. \quad (5)$$

Остання область відповідає інтервалам, що починаються з моменту, коли на точку спостереження вплине поле від найвіддаленішої точки джерела:

$$S_3 \subset (\rho + R)^2 < \frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2. \quad (6)$$

Тоді в точці спостереження електричне поле відсутнє, а магнітне – постійна величина [5]. Лінійний кусково-визначений розв'язок \vec{E} буде використаний в новій ітерації для розрахунку нелінійної поправки. Ця ітерація буде виконана з нелінійною частиною вектору електричної індукції \vec{D} , що породжує еквівалентний вторинний електричний струм

$$\vec{J}' = \epsilon_0 \xi_3 \frac{\partial \vec{E}^3}{\partial t} = \epsilon_0 \xi_3 \frac{\partial}{\partial t} \left((\vec{E} \cdot \vec{E}) \begin{bmatrix} E_\rho \\ E_\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad (7)$$

який розглядається як нове джерело. Просторова та часова залежність компоненти E_x електричного поля зображена на рис. 1.

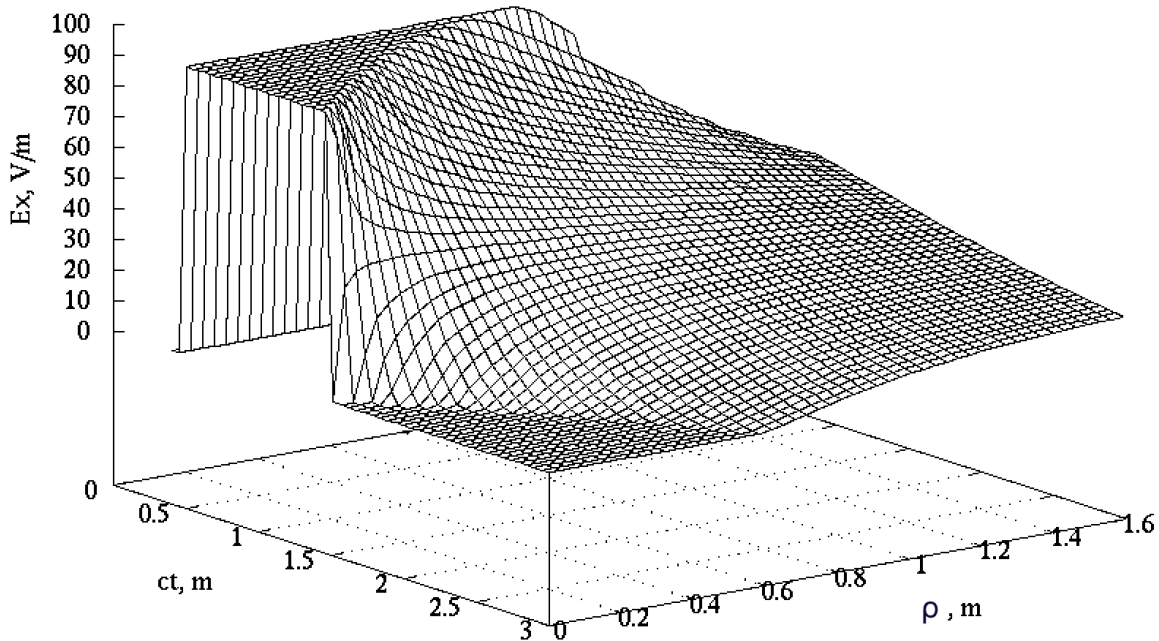


Рис. 1. Залежність амплітуди компоненти OX електричного поля від часу та радіальної координати для відстані $z = R/2$ від диску радіуса R при $\varphi=0$.

По аналогії з розв'язанням лінійної задачі розглянемо процес випромінювання цього струму в циліндричній системі координат методом еволюційних рівнянь. Підставивши до залежності $\vec{j}'(\vec{E})$ вираз для поля \vec{E} , отримаємо векторну функцію

$$\vec{j}' = \begin{bmatrix} j'_\rho \\ j'_\varphi \\ j'_z \end{bmatrix} = \frac{\epsilon_0 \xi_3 A_0^3}{8} \frac{\partial}{\partial t} \left((I_1^2 \cos^2 \varphi + (I_2 - I_1)^2 \sin^2 \varphi) \begin{bmatrix} I_1 \cos \varphi \\ (I_1 - I_2) \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right). \quad (8)$$

Візьмемо похідну за часом аналітично. При цьому необхідно врахувати кусково-визначену область значень I_1 та I_2 , що залежить від часу, записавши їх за допомогою функції Хевісайда

$$I_\alpha = f_\alpha H\left(\frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 - (\rho - R)^2\right) + \left(\frac{1}{\alpha} - f_\alpha\right) H\left(\frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 - (\rho + R)^2\right), \quad (9)$$

де $\alpha = 1$ або 2 , а $f_\alpha = f_\alpha(\rho, t, z)$ – значення I_α в області S_2 [6]. В такому вигляді I_α тепер можна диференціювати за часом:

$$\frac{\partial I_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \left[H\left(\frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 - (\rho - R)^2\right) - H\left(\frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 - (\rho + R)^2\right) \right] + \frac{2}{\alpha} \frac{ct}{\sqrt{\epsilon \mu}} \delta\left(\frac{c^2 t^2}{\epsilon \mu} - z^2 - (\rho + R)^2\right). \quad (10)$$

Побудуємо отриману залежність струму від часу та радіальної координати для тих же інтервалів, як на рис. 1.

На рис. 2 бачимо розподіл густини електричного струму, що породжується полем у лінійному наближенні, яке проілюстровано на рис. 1. Варто відзначити, що максимальне значення вторинного струму зліва менше в 8 разів, хоча амплітуда вихідного джерела струму на диску менше лише в 2 рази, що є ознакою нелінійних явищ. Для побудови струму використовувались формули похідної для I_α , яка містить дельта-функцію, що не побудована на графіку, однак ми нехтувати нею не будемо.

НЕЛІНІЙНЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ

Наступні кроки будуть спрямовані на отримання поправки до лінійного поля \vec{E} , що викликано врахуванням нелінійних ефектів. Давайме позначимо \vec{E}' як нелінійну поправку для електричного поля. Аналогічно до розв'язання лінійної задачі випромінювання запишемо джерело через базисні функції $\Psi_m = \Psi_m(\rho', \varphi')$ [6]

$$j_m(v|t', z') = -\frac{\sqrt{\mu_0}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty \rho' d\rho' \vec{j} [\nabla_\perp \Psi_m^* \times \vec{z}_0]. \quad (11)$$

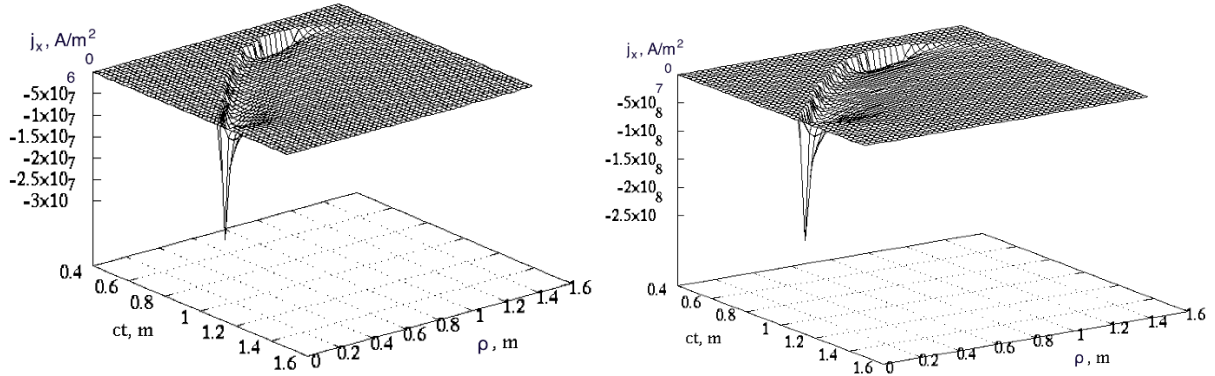


Рис. 2. Амплітуди струму вторинного джерела для вихідної амплітуди 1А (зліва) або 2А (справа) на відстані $z = R/2$ від джерела при $\varphi=0$.

Моди азимутального кута мають дискретну область визначення, а поле визначається сумою модів джерела. Область визначення дискретних кутових мод нескінченна [7]. Інтегруючи по азимутальному куту φ , отримаємо чотири ненульові моди поля нелінійної поправки

$$j_m(v|t', z') = \epsilon_0 \xi_3 \frac{iA_0^3 \sqrt{\mu_0}}{4^3 \sqrt{v}} \left(\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}\right)^{3/2} \int_0^\infty N_m^{sum}(v|r') d\rho', \quad (12)$$

де $m \in (-\infty, \infty)$. Кутова мода джерела j_m є функцією безперервного модового спектру v та просторових координат r' , що позначені штрихом. Під інтегралом знаходиться функція $N_m^{sum}(v|r')$, яка відмінна від нуля лише для $m \in \{\pm 1, \pm 3\}$:

$$\begin{aligned} N_{-1}^{sum}(v|r') &= -3N_1(-1) - N_2(-1) + 3N_3(-1) + N_4(-1); \\ N_1^{sum}(v|r') &= -3N_1(1) - N_2(1) + 3N_3(1) - N_4(1); \\ N_{-3}^{sum}(v|r') &= -N_1(-3) + N_2(-3) - N_3(-3) + N_4(-3); \\ N_3^{sum}(v|r') &= N_1(3) + N_2(3) - N_3(3) + N_4(3). \end{aligned} \quad (13)$$

Тут через $N_n(m)$ визначено деякі плавні функції від аргументів m, v, ct', ρ', z' :

$$\begin{aligned} N_1(m) &= 3mJ_m(v\rho')I_1^2 \frac{\partial I_1}{\partial t}; \\ N_2(m) &= mJ_m(v\rho')(I_2 - I_1) \left(\frac{\partial I_1}{\partial t} (I_2 - I_1) + 2I_1 \left(\frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial t} \right) \right); \\ N_3(m) &= -3v\rho' \frac{J_{m-1}(v\rho') - J_{m+1}(v\rho')}{2} (I_2 - I_1)^2 \left(\frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial t} \right); \\ N_4(m) &= -v\rho' \frac{J_{m-1}(v\rho') - J_{m+1}(v\rho')}{2} I_1 \left(I_1 \left(\frac{\partial I_2}{\partial t} - \frac{\partial I_1}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial I_1}{\partial t} (I_2 - I_1) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Аналітичне інтегрування по радіальній координаті ρ' можна спробувати скориставшись властивістю дистрибутивності інтегралу Рімана. Отримаємо суму 32-х інтегралів такого типу для I_1 та I_2 :

$$j_m(v|t', z') \sim \sum A_{\alpha\beta\alpha} \int_0^\infty I_\alpha I_\beta \frac{\partial I_\alpha}{\partial t} J_m(v\rho') d\rho', \quad (15)$$

де $A_{\alpha\beta\alpha}$ – деяка функція, що не залежить від ρ' , а I_α – це частина лінійного розв'язку (I_1 або I_2 , причому $\alpha \neq \beta$). На даний момент аналітично знайти значення інтегралів не вдалось, тому майбутній аналіз виразів поля доведеться проводити методами числового розрахунку. Знайдемо еволюційні коефіцієнти, підставимо їх до модового розкладу векторів поля [6] і отримаємо

$$E'_\rho = -\frac{\epsilon_0 \xi_3 A_0^3}{4^3} \left(\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}\right)^2 E_4 \left[\sum_{m=-\infty}^\infty \cos m\varphi N_m^{sum}(v|r') \frac{J_{m-1}(v\rho') + J_{m+1}(v\rho')}{2} \right]. \quad (16)$$

Таким чином, ми одержали вираз для електричної компоненти поля в явному вигляді за допомогою інтегрального оператора E_4 . Після інтегрування не залишаться штрихованих змінних r' та змінної неперервного спектру ν . Інтегральний оператор E_4 є кратним чотиривимірним невластним інтегралом, що містить похідну від функції Рімана [6]:

$$E_4[f(\nu|t', \rho', z')] = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\rho' \int_0^\infty dz' [H(\Delta\tau - \Delta z) J_0(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2})]'_\tau f(\nu|t', \rho', z'), \quad (17)$$

де $\tau = \frac{ct}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ – добуток часу на швидкість світла в середовищі, що вимірюється в метрах. Сумування по азимутальним поперечним модам поля винесено під кратний інтеграл для прискорення числового розрахунку:

$$E'_x = -\frac{\epsilon_0 \xi_3 A_0^3}{2 \cdot 4^3} \left(\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}\right)^2 E_4[\sum_{m=-\infty}^\infty e_m^x(\nu|r) \cdot N_m^{sum}(\nu|r')], \quad (18)$$

де

$$e_m^x(\nu|r) = \cos \varphi \cos m\varphi (J_{m-1}(\nu\rho) + J_{m+1}(\nu\rho)) + \sin \varphi \sin m\varphi (J_{m-1}(\nu\rho) - J_{m+1}(\nu\rho)). \quad (19)$$

Аналізуючи графіки на рис. 1 та 2 легко побачити, що знак наведеного струму є протилежним до вихідного струму джерел, таким чином нелінійність середовища забирає енергію поля та зменшує амплітуду нестационарного сигналу. Нагадаємо, що поле E'_x – це не повний вираз, а поправка до поля, отриманого в лінійному наближенні. Напруженість електричного поля з нелінійною поправкою має вигляд:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x + E'_x \\ E_y + E'_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Компоненту E'_y можна знайти, підставивши до (18) замість $e_m^x(\nu|r)$ функцію

$$e_m^y(\nu|r) = -\sin \varphi \cos m\varphi (J_{m-1}(\nu\rho) + J_{m+1}(\nu\rho)) - \cos \varphi \sin m\varphi (J_{m-1}(\nu\rho) - J_{m+1}(\nu\rho)). \quad (21)$$

Ітеративний підхід до врахування нелінійності дозволяє отримати розв'язок з необхідною точністю для узагальненої слабкої нелінійності врахувавши відповідну кількість доданків ряду Тейлора, тобто

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x + E'_x + E''_x + \dots \\ E_y + E'_y + E''_y + \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Для числового розрахунку поля необхідно виконати оцінку кратного невластного інтегралу від швидкоосцилюючої функції з кусково-визначеною областю значень, тобто застосувати оператор

$$E_4 = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\tau' \int_0^\infty d\rho' \int_0^\infty dz' [H(\Delta\tau - \Delta z) J_0(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2})]'_\tau. \quad (23)$$

Похідну по τ від функції Рімана можна розрахувати аналітично, тоді інтегральний оператор матиме такий вигляд

$$E_4 \left[\sum_{m=-\infty}^\infty f_m(\beta) \right] = \int_0^\infty d\nu \int_0^\infty d\rho' \int_0^\infty dz' \left(\sum_{m=-\infty}^\infty f_m(\alpha) - \int_0^{\tau-z+z'} \nu^2 \Delta\tau \frac{J_1(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2})}{\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2}} \sum_{m=-\infty}^\infty f_m(\beta) d\tau' \right),$$

де набір аргументів $\alpha = \{\nu| \rho', \tau - z + z', z'\}$ та $\beta = \{\nu| \rho', \tau', z'\}$.

Застосування методу еволюційних рівнянь можливе лише при кінцевому значенні випроміненої енергії. Вторинне джерело випромінювання не суперечить цьому обмеженню навіть на невластних областях інтегрування через залежність від добутку $I_\alpha I'_\beta$, що затухає на нескінченності. Але для числового розрахунку значень поля все ж необхідно вибрати скінченні межі інтегрування.

Межі інтегрування по τ' визначаються принципом причинності, а межі інтегрування по відстані від джерела до точки спостереження можна обмежити значенням $2R$, де R – розмір випромінювача. Такий вибір пояснюється тим, що випромінювана енергія в лінійному наближенні сильно згасає при віддаленні від джерела, як видно із рис. 2, тому внесок в амплітуду нелінійної поправки суттєвий тільки поблизу плаского диску. Зазначимо, що під інтегралом функція семи змінних, які впливають на періоди осциляцій підінтегральної функції. Область визначення змінної ν необхідно вибрати відповідно до найменшої частоти осциляцій підінтегральної функції та необхідної точності розрахунку. Найвища частота осциляцій задає кількість вузлових точок підінтегральної функції. Для кожної точки спостереження область інтегрування необхідно підбирати індивідуально для збереження фіксованої точності. Підставивши скінченні межі інтегрування, отримаємо

$$E_4 \left[\sum_{\substack{m=-3 \\ \Delta m=2}}^3 f_m(\beta) \right] = \int_0^{\nu_{max}} d\nu \int_0^{2R} d\rho' \int_0^{2R} dz' \left(\sum_{\substack{m=-3 \\ \Delta m=2}}^3 f_m(\alpha) - \int_0^{\tau-z+z'} \nu^2 \Delta\tau \frac{J_1(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2})}{\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2}} \sum_{\substack{m=-3 \\ \Delta m=2}}^3 f_m(\beta) d\tau' \right).$$

Для числового розрахунку необхідно врахувати сингулярності підінтегральної функції. Для цього треба скористатись властивістю функції Бесселя

$$\frac{J_1(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2})}{\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2}} = \frac{J_0(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2}) + J_2(\nu\sqrt{\Delta\tau^2 - \Delta z^2})}{2} \quad (24)$$

та провести аналіз усіх особливих точок у виразі для поля.

ВИСНОВКИ

Проілюстровані нелінійні властивості джерела індукованого струму у нелінійному середовищі. Отримано розв'язок для поля випромінювання у нелінійне середовище без спрощень умови дальньої зони. В часовій області отримано поле \vec{E} з урахуванням ефектів самодії. Порівнюючи лінійний та нелінійний розв'язки для E_x , бачимо, що врахування нелінійності зменшує результуючу амплітуду поля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Wu T.T. Electromagnetic missiles // J. Appl. Phys. – 1985. – V. 57, N7, P. 2370-2373.
2. Думін О.М., Ахмедов Р.Д. Міжмодове перетворення нестационарного електромагнітного поля в нелінійному необмеженому середовищі // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, Серія "Радіофізика та електроніка" – 2017. – Вип. 26, 42-48 ст.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Том II: Теория поля. – Москва: Физматлит, 2012. – 536 с.
4. Dumin O.M., Tretyakov O.A., Akhmedov R.D., and Dumina O.O. Evolutionary approach for the problem of electromagnetic field propagation through nonlinear medium // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Радіофізика та електроніка. – 2014. – Вип. 24. – №1115. – С.23–28.
5. Dumin O.M., Akhmedov R.D., Katrich V.A., Dumina O.O. Transient Radiation of Circle with Uniform Current Distribution // 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), May 29-June 2, 2017, Kyiv, Ukraine. - P. 261-265.
6. Tretyakov O., Dumin A., Dumina O., Katrich V. Modal basis method in radiation problems // Proc. International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET–2004). – Dnepropetrovsk (Ukraine). – 2004. – P.312–314.
7. Dumin O.M., Katrich V.A., Akhmedov R.D., Tretyakov O.A., Dumina O.O. Evolutionary Approach for the Problems of Transient Electromagnetic Field Propagation in Nonlinear Medium // Proc. XV International Conf. on Math. Methods in Electromagnetic Theory (MMET–2014). – Dnepropetrovsk (Ukraine, Aug. 26-28). – 2014. – P. 57-60.