ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2007. Вип. 67. С.104-118 Ser. Mech.-Math. 2007. Vol. 67. P.104-118

УДК 517.95

НЕЛІНІЙНІ ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ В КВАЗІЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Олена ДОМАНСЬКА

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Доведено існування та єдиність розв'язків крайових задач для деякого класу нелінійних еліптичних рівнянь, який охоплює лінійні рівняння, заданих у необмежених квазіциліндричних областях за певних умов на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності.

Ключові слова: нелінійні еліптичні рівняння, узагальнений розв'язок, узагальнені простори Лебега-Соболєва, квазіциліндрична область.

1. Крайові задачі для різних класів стаціонарних рівнянь, модельними прикладами яких є рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(|u_{x_i}(x)|^{p_i-2}u_{x_i}(x)\Big)_{x_i} - |u(x)|^{p_0-2}u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

при відповідних значеннях $p_i > 1$, $i = \overline{0,n}$, в необмежених областях вивчали у багатьох працях. У випадку лінійних і близьких до них квазілінійних рівнянь (модельним прикладом яких є рівняння (1) при $p_i = 2$, $i = \overline{0,n}$) для єдиності розв'язку крайової задачі треба вимагати його певну поведінку на нескінченності, а існування розв'язку доводиться при відповідних обмеженнях на зростання вихідних даних на нескінченності [1], [2]. Для одного класу майже лінійних еліптичних рівнянь, які містять рівняння (1) за умови, що $p_0 > 2$, $p_i = 2$, $i = \overline{1,n}$, доведено [3]-[5], що крайові задачі мають єдиний розв'язок без обмежень на його поведінку на нескінченності і припущень на зростання вихідних даних на нескінченності. У [6], [7] аналогічні результати отримано у випадку крайових задач для нелінійних еліптичних рівнянь, модельним прикладом яких є (1) при $p_0 > p_i$, $1 < p_i \leqslant 2$, $i = \overline{1,n}$.

Мета нашої праці – розглянути крайові задачі для узагальнень рівняння (1) при $p_0 = p_i = 2$, $i = \overline{1,k}$, $p_i > 1$, $i = \overline{k+1,n}$ (серед них є лінійні рівняння) з граничними умовами мішаного типу, а область задання за змінними $x_1, \ldots, x_k$ є необмеженою, а за рештою – обмеженою.

Знайдено класи існування та єдиності узагальненого розв'язку досліджуваних задач. Використовують комбінацію методу, який ґрунтується на аналозі відомого в теорії пружності принципу Сен-Венана [1],[2] та методу монотонності [8].

2. Основні позначення. Нехай n – натуральне число, а $\mathbb{R}^n$ – лінійний простір, складений з елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_n)$, де $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$.

Всі функції, які тут розглядають, визначені на відповідних множинах просторів $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^{n+1}$ і набувають значення в $\mathbb{R}$. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D}$, – яка-небудь функція, то під $v|_D$ розумітимемо її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Нехай Ω – необмежена *квазіциліндрична* область у просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, тобто для деякого натурального $s < n$ існують числа $1 \leqslant l_1 < \ldots < l_s \leqslant n$ такі, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_{l_1}^2 + \ldots + x_{l_s}^2 < R^2\}$ — обмежена для будь-якого $R > 0$. Позначимо через k найменше з таких чисел s і вважатимемо, що $l_1 = 1, \ldots, l_k = k$, тобто множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_k^2 < R^2\}$ — обмежена для кожного $R > 0$ і для будь-якого $j \in \{1, \ldots, k\}$ множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=\overline{1,k}, i \neq j} x_i^2 < R^2\}$ — необмежена хоча б для одного $R > 0$. Крім того, припускатимемо, що 0 належить Ω. Через Ω_τ для довільного $\tau > 0$ позначатимемо зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2} < 1 + \tau\}$, що містить 0. Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω кусково-гладка і така, що для будь-якої неперервної на $\overline{\Omega}$ функції v виконується рівність

$$\frac{d}{d\tau} \int\limits_{\Omega_\tau} v(x)\,d\,x = \int\limits_{S_\tau} v(s)h(s)\,d\,s, \quad \tau > 0, \tag{2}$$

де $S_\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial\Omega_\tau \backslash \partial\Omega$, $h \in C(\overline{\Omega})$, $h > 0$, $d\,s$ – елемент площі поверхні S_τ. (Для виконання умови (2) достатньо вимагати, щоб межа області Ω була гладкою).

Зауважимо, що будь-яка циліндрична область вигляду $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$ з гладкою межею, а Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, є квазіциліндричною і задовольняє зазначену умову.

Нехай $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \bigcup \overline{\Gamma_2}$, де Γ_1, Γ_2 – відкриті множини на $\partial\Omega$ (одна з них може бути порожньою) і $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$. Під $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ розумітимемо одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі $\partial\Omega$ $(\partial\Omega_\tau)$ області Ω (Ω_τ).

Через $C(\overline{\Omega})$ позначатимемо простір неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій, а через $C^1(\overline{\Omega})$ – простір неперервно диференційовних в Ω функцій, які разом з похідними до першого порядку допускають неперервне продовження на $\overline{\Omega}$. Нехай $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких обмежені, а $C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, елементами якого є невід'ємні в $\overline{\Omega}$ функції. Позначатимемо через $C^1_0(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ підпростір простору $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$, елементами якого є функції, які набувають нульові значення в околі Γ_1.

Приймемо $L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = \{v(x),\, x \in \Omega : v|_{\Omega_\tau} \in L_q(\Omega_\tau) \quad \forall\, \tau > 0\}$, де $q \in [1, \infty]$. На просторі $L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ вводиться стандартна лінійна структура і сім'я півнорм $\|\cdot\|_{L_q(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$, з якою він стає локально опуклим простором, якщо ототожнити функції, які рівні майже всюди (див., наприклад, [9]). Отож, збіжність послідовності елементів простору $L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ означає, що для кожного $\tau > 0$ послідовність звужень на Ω_τ членів заданої послідовності є збіжною в $L_q(\Omega_\tau)$.

Нехай $r \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\Omega)$, причому $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. На просторі $C(\overline{\Omega_\tau})$, де $\tau > 0$ – довільне число, введемо норму

$\|v\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf\{\lambda > 0 : \rho_{r,\tau}(v/\lambda) \leqslant 1\}$, де $\rho_{r,\tau}(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\Omega_\tau} |v(x)|^{r(x)}\, d\,x.$

Поповнення лінійного простору $C(\overline{\Omega_\tau})$ за цією нормою позначимо через $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ (див. [13]). Множина $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_\tau)$ і називається узагальненим простором Лебега. Під $L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм $\|\cdot\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$. Приймемо $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega) = \bigl\{v \in L_{r(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) : \sup_{\tau>0} \|v|_{\Omega_\tau}\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} < \infty\bigr\}$.

Нехай $\mathbb{P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) : p_i \in L_\infty(\Omega),\ p_i(x) > 1$ для м. в. $x \in \Omega\}$. Для $p \in \mathbb{P}$ через $p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots, p_n^*)$ позначимо векторну функцію, компоненти якої задовольняють умову $\frac{1}{p_i(x)} + \frac{1}{p_i^*(x)} = 1$, $i = \overline{0, n}$, для м. в. $x \in \Omega$. Для кожного $\tau > 0$ під $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $C^1(\overline{\Omega_\tau})$ за нормою $\|v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|v\|_{L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} + \sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$. Очевидно, що $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)$ є підпростором простору $\bigl\{v(x),\ x \in \Omega_\tau :\ v \in L_{p_0(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau),\ v_{x_i} \in L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau),\ i = \overline{1, n}\bigr\}$.

На лінійному просторі $C^1_0(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ введемо топологію (лінійного опуклого простору) за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)}$, $\tau > 0$. Замикання цього простору за введеною топологією позначимо через $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, а замикання $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ за цією самою топологією позначатимемо $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ є збіжною до v в цих просторах, якщо $\|v_k - v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_\tau)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для кожного $\tau > 0$. Під $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$ розумітимемо підпростір простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, що складається з функцій, носії яких обмежені.

3. Формулювання задачі й основних результатів. Розглянемо задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, u, \nabla u) - a_0(x, u, \nabla u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) - f_0(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u)\, \nu_i\big|_{\Gamma_2} = 0, \tag{4}$$

де $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. Припустимо, що вихідні дані задовольняють такі умови:

1) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ функція $a_i(x, s, \xi)$, $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $x \in \Omega$ функція $a_i(x, \cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна і для будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ функція $a_i(\cdot, s, \xi) : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна;

1′) $a_i(x, 0, 0) = 0$ для м. в. $x \in \overline{\Omega}$, $i = \overline{0, n}$;

2) для кожного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, м. в. $x \in \Omega$ і будь-яких $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$|a_i(x, s, \xi)| \leqslant h_{1i}(x) \Bigl(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)} + |s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} \Bigr) + h_{2i}(x),$$

де $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{P}$, $h_{1i} \in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_{2i} \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

3) $f_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i = \overline{0, n}$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (3), (4) назвемо функцію* $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, *яка задовольняє інтегральну рівність*

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, \nabla u)\, v_{x_i} + a_0(x, u, \nabla u)\, v \Big\}\, d\,x = \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, v_{x_i} + f_0\, v \Big\}\, d\,x \tag{5}$$

для будь-якої функції $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,c}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$.

Зауваження 1. Умова $\mathbf{1}'$) не є принциповою, оскільки інакше, ввівши позначення $\widetilde{a}_i(x,s,\xi) \overset{\text{def}}{=} a_i(x,s,\xi) - a_i(x,0,0)$, $\widetilde{f}_i(x) \overset{\text{def}}{=} f_i(x) - a_i(x,0,0)$ для м. в. $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n})$, рівність (5) можна записати з $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{f}_i$ замість відповідно a_i, f_i, причому $\widetilde{a}_i(x,0,0) = 0$ $(i = \overline{0,n})$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Вважаючи, що:

4) $p_0(x) = 2$, $p_1(x) = 2, \ldots, p_k(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$ (очевидно, що $p_0^*(x) = 2$, $p_1^*(x) = 2, \ldots, p_k^*(x) = 2$ для майже всіх $x \in \Omega$),

шукатимемо додаткові умови на вихідні дані, при яких узагальнений розв'язок задачі (3), (4) існує та єдиний у класі функцій з певною поведінкою на нескінченності.

Нехай виконуються ще такі умови:

5) для майже всіх $x \in \Omega$ та будь-яких $s, r \in \mathbb{R}$ і $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$

$$a_0(x,s,\xi) = \sum_{i=1}^{k} b_i(x)\xi_i + c(x,s,\xi), \tag{6}$$

де $b_i, b_{i,x_i} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i|_{\Gamma_2} = 0$, $i = \overline{1,k}$, і

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x,s,\xi) - a_i(x,r,\eta))(\xi_i - \eta_i) + (c(x,s,\xi) - c(x,r,\eta))(s-r) \geqslant$$

$$\geqslant q_1(x) \sum_{i=1}^{k} |\xi_i - \eta_i|^2 + q_2(x)|s-r|^2, \tag{7}$$

де $q_1, q_2 \in C(\overline{\Omega})$, $\min\limits_{x \in \overline{\Omega_\tau}} q_1(x) > 0$ $\forall \tau > 0$,

$$q_2(x) - 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}(x) > 0 \quad \forall\, x \in \Omega; \tag{8}$$

6) для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$, м. в. $x \in \Omega$ та будь-яких $s, r \in \mathbb{R}$ і $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ правильна нерівність

$$|a_i(x,s,\xi)-a_i(x,r,\eta)|\leqslant g_{1i}(x)\sum_{j=1}^{k}|\xi_j-\eta_j|+g_{2i}(x)|s-r|, \tag{9}$$

де g_{1i}, g_{2i} – деякі неперервні та невід'ємні на $\overline{\Omega}$ функції, причому

$$2\sum_{i=1}^{k}(g_{2i}(x))^2\geqslant\sum_{j=1}^{k}b_j(x)\frac{x_j}{|x|}\quad\forall x\in S_\tau,\quad\forall\tau>0; \tag{10}$$

7) існує неперервна додатна функція $A(\tau)$, $\tau\geqslant 0$, така, що

$$d_1(\tau)\lambda^{-1/2}(\tau)+d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau)\leqslant A(\tau)\quad\forall\tau>0\quad\text{і}\quad\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\,z}{A(z)}=+\infty, \tag{11}$$

де $d_1(\tau)=\sup\limits_{s\in S_\tau}\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}g_{1i}^2(s)/(q_1(s)h(s))\Big)^{1/2}$; $d_2(\tau)=\sup\limits_{s\in S_\tau}\Big(\Big(\sum\limits_{i=1}^{k}g_{2i}^2(s)\Big)^{1/2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{k}b_i\dfrac{x_i}{|x|}\Big)$;

$$\lambda(\tau)=\inf_v\Big\{\Big[\int\limits_{S_\tau}E(v)\,h\,d\,s\Big]\Big[\int\limits_{S_\tau}v^2\,d\,s\Big]^{-1}\Big\}.$$

Тут інфімум беремо по всіх неперервно диференційовних в околі S_τ функціях, які зануляються на $\partial S_\tau\cap\Gamma_1$; $E(v)\overset{\text{def}}{=}q_1\sum\limits_{i=1}^{k}v_{x_i}^2+(q_2-2^{-1}\sum\limits_{i=1}^{k}b_{i,x_i})v^2$.

Зауваження 2. З умови **6**), зокрема, випливає, що при її виконанні функції $a_i(x,s,\xi)$, $(x,s,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,k}$, явно не залежать від змінних $\xi_{k+1},\ldots,\xi_n$.

Розглянемо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{d\,\tau}{d\,\alpha}=A(\tau),\qquad\tau(0)=0. \tag{12}$$

Очевидно, що розв'язок $\tau(\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$, цієї задачі визначається рівністю $\int_0^{\tau(\alpha)}\frac{d\,z}{A(z)}=\alpha$. Звідси та умови (11), зокрема, випливає, що $\tau(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$.

Приймемо $\Omega^\alpha\overset{\text{def}}{=}\Omega_{\tau(\alpha)}$, $\Gamma_1^\alpha\overset{\text{def}}{=}\Gamma_{1,\tau(\alpha)}$, $\Gamma_2^\alpha\overset{\text{def}}{=}\Gamma_{2,\tau(\alpha)}$, $S^\alpha\overset{\text{def}}{=}S_{\tau(\alpha)}$,
$\langle v\rangle_\alpha\overset{\text{def}}{=}(\int_{\Omega^\alpha}E(v)\,d\,x)^{1/2}$, $\alpha\geqslant 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* **1**)–**7**). *Тоді задача (3), (4) в класі функцій з* $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, *які задовольняють умову*

$$\int\limits_{\Omega^R}E(v)\,d\,x=o(1)e^R\quad\text{\textit{при}}\quad R\to+\infty, \tag{13}$$

може мати не більше одного узагальненого розв'язку.

Для кожного натурального l приймемо $\Lambda_l\overset{\text{def}}{=}\inf\limits_v\Big\{\Big[\int_{\Omega^l}E(v)\,d\,x\Big]\Big[\int_{\Omega^l}v^2\,d\,x\Big]^{-1}\Big\}$, де інфімум береться по всіх функціях v з простору $C^1(\overline{\Omega^l})$, які дорівнюють нулеві на $\partial\Omega^l\setminus\Gamma_2$; $q_{1l} \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{\overline{\Omega^l}} q_1(x) > 0$.

Теорема 2. *Нехай, крім умов* **1**)–**7**), *виконуються ще дві умови:*

8) *для м.в.* $x \in \Omega$ *і будь-яких* $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,s,\xi)\xi_i + c(x,s,\xi)s \geqslant q_1(x)\sum_{i=1}^{k}|\xi_i|^2 + q_2(x)|s|^2 + q_3(x)\sum_{i=k+1}^{n}|\xi_i|^{p_i(x)}$$

де $q_3 \in L_\infty(\Omega)$, $q_{3l} \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega^l} q_3(x) > 0\ \forall l \in \mathbb{N}$;

9) *для будь-якого* $l \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_l^{-1}\int_{\Omega^l}|f_0(x)|^2\,dx + q_{1l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=1}^{k}|f_i(x)|^2\,dx + q_{3l}^{-1}\int\limits_{\Omega^l}\sum_{i=k+1}^{n}|f_i(x)|^{p_i^*(x)}\,dx \leqslant C_1 e^{(1-\varepsilon)l},$$

де C_1, $\varepsilon > 0$ *– сталі, які від* l *не залежать.*

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (3), (4), який належить класу єдиності, визначеному в теоремі 1. Цей розв'язок задовольняє оцінку

$$\langle u\rangle_l \leqslant C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}, \qquad l \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

де $C_2 > 0$ *– стала, яка залежить тільки від* C_1 *і* ε.

4. Допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $u_1, u_2 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$ *– функції, для яких виконується рівність (5) (тобто, коли взяти* $u = u_1$, $u = u_2$*) за умови, що* $\operatorname{supp} v$ *лежить в* Ω^{R_*}*, де* $R_* > 0$ *– деяке число. Тоді для будь-яких* R_1, R_2, $0 < R_1 < R_2 \leqslant R_*$, *правильна нерівність*

$$\langle u_1 - u_2\rangle_{R_1} \leqslant e^{(R_1-R_2)/2}\langle u_1 - u_2\rangle_{R_2}. \tag{15}$$

Доведення. Нехай $\{u_{1m}\}_{m=1}^{\infty}$, $\{u_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовності функцій з простору $C_0^1(\overline{\Omega},\Gamma_1)$, які збігаються відповідно до u_1 і u_2 за нормою $\langle\,\cdot\,\rangle_{R_*}$, причому для кожного $m \in \mathbb{N}$ звуження $u_{1m}|_{\Omega^{R_*}}$ та $u_{1m}|_{\Omega^{R_*}}$ належить простору $C^2(\overline{\Omega^{R^*}})$. Приймемо $w \overset{\text{def}}{=} u_1 - u_2$, $w_m = u_{1m} - u_{2m}$, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що $\langle w - w_m\rangle_{R_*} \to 0$ при $m \to +\infty$.

Віднімемо від інтегральної тотожності (5), записаної для u_1, ту саму тотожність, але записану для u_2. Вибравши яке-небудь $\tau \in (0,\tau(R_*))$, приймемо в отриманій після віднімання тотожності $v = w_m\psi_\delta$, де $m \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,\tau)$ – довільне число, ψ_δ – функція з простору $C^1(\mathbb{R}^k)$, для якої виконуються умови: $\psi_\delta(x') = 1$ при $|x'| < \tau - \delta$ (тут і далі прийнято позначення $x' = (x_1,\ldots,x_k)$), $\psi_\delta(x') = 0$ при $|x'| > \tau$ і $0 \leqslant \psi_\delta(x') \leqslant 1$, $|\nabla\psi_\delta(x')| \leqslant C/\delta$ для всіх $x' \in \mathbb{R}^k$, де $C > 0$ – стала, яка не залежить від τ і δ. Тоді матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(u_1) - a_i(u_2))(w_m\psi_\delta)_{x_i} + (a_0(u_1) - a_0(u_2))\,w_m\psi_\delta\Big]\,dx = 0. \tag{16}$$

Тут і далі використовуємо позначення

$$c(v) \overset{\text{def}}{=} c(x, v, \nabla v), \qquad a_i(v) \overset{\text{def}}{=} a_i(x, v, \nabla v), \quad i = \overline{0, n}. \tag{17}$$

Перепишемо рівність (16), враховуючи (6)

$$I_m \equiv \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i(u_{1m}) - a_i(u_{2m})) w_{m,x_i} + (c(u_{1m}) - c(u_{2m}))\, w_m + \sum_{i=1}^{k} b_i\, w_{m,x_i}\, w_m \Big]\, d\,x =$$

$$= \sigma_{m\delta}(\tau) + G_{m\delta}(\tau), \tag{18}$$

де $\sigma_{m\delta}(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} \Big[\sum\limits_{i=1}^{n} \Big\{ (a_i(u_{1m}) - a_i(u_{2m})) w_{m,x_i} - (a_i(u_1) - a_i(u_2))\, w_{m,x_i} \psi_\delta \Big\} +$

$+ (a_0(u_{1m}) - a_0(u_{2m}))\, w_m - (a_0(u_1) - a_0(u_2)) w_m \psi_\delta \Big]\, d\,x,$

$G_{m\delta}(\tau) = -\int\limits_{\Omega_\tau} \sum\limits_{i=1}^{k} (a_i(u_1) - a_i(u_2))\, w_m \psi_{\delta, x_i}\, d\,x.$

Перетворимо $G_{m\delta}$ так. Довизначимо $a_i(u_{jm})$ нулем поза Ω^{R_*} і приймемо

$$a_{i\rho}(u_{jm}(x)) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} a_i(u_{jm}(y))\, \omega_\rho(x - y)\, d\,y, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = 1, 2,$$

де ω_ρ – ядра усереднення, $\rho > 0$. Тоді

$$G_{m\delta}(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^{k} \left[(a_{i\rho}(u_{1m}) - a_i(u_1)) - (a_{i\rho}(u_{2m}) - a_i(u_2)) \right]\, w_m \psi_{\delta, x_i}\, d\,x +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_\tau \setminus \Omega_{\tau-\delta}} \sum_{i=1}^{k} \Big[(a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m \Big]_{x_i} \psi_\delta\, d\,x + \int\limits_{S_{\tau-\delta}} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m \nu_i ds -$$

$$- \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m\, \nu_i\, d\,s + \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m\, \nu_i\, d\,s. \tag{19}$$

Тут $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої щодо області Ω_τ $(\Omega_{\tau-\delta})$ нормалі до S_τ $(S_{\tau-\delta})$, тобто $\nu_i(x) = x_j/|x|$, $j = \overline{1, n}$, $x \in S_\tau$ $(S_{\tau-\delta})$.

З умови **6**) і нерівності Коші – Буняковського випливає

$$\int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (a_{i\rho}(u_{1m}) - a_{i\rho}(u_{2m})) w_m\, \nu_i\, d\,s \leqslant \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} |(g_{1i} |\widetilde{\nabla} w_m| + g_{2i} |w_m|)_\rho -$$

$$- (g_{1i} |\widetilde{\nabla} w_m| + g_{2i} |w_m|)|\, |w_m|\, |\nu_i|\, d\,s + \int\limits_{S_\tau} \sum_{i=1}^{k} (g_{1i} |\widetilde{\nabla} w_m| + g_{2i} |w_m|)\, |w_m|\, |\nu_i|\, d\,s \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int\limits_{S_\tau}\Big(\sum_{i=1}^{k} g_{1i}^2\Big)\,|\widetilde{\nabla} w_m|^2\,d\,s\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{S_\tau}|w_m|^2\,d\,s\Big)^{1/2}+\int\limits_{S_\tau}\Big(\sum_{i=1}^{k} g_{2i}^2\Big)^{1/2}|w_m|^2\,d\,s+L_{m\rho}(\tau), \tag{20}$$

де $L_{m\rho}(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{S_\tau} b_{m\rho}(s)\,d\,s$, $b_{m\rho}(x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum\limits_{i=1}^{k}|(g_{1i}|\widetilde{\nabla} w_m|+g_{2i}|w_m|)_\rho-(g_{1i}|\widetilde{\nabla} w_m|+g_{2i}|w_m|)|\times$ $\times\,|w_m|$, $\widetilde{\nabla} w_m=(w_{m,x_1},\dots,w_{m,x_k})$.

Перетворимо й оцінимо знизу ліву частину рівності (18), використовуючи нерівність (7) та формулу інтегрування частинами

$$I_m \geqslant \int\limits_{\Omega_\tau} E(w_m)\,d\,x+\frac{1}{2}\int\limits_{S_\tau}\sum_{i=1}^{k} b_i\,\nu_i\,w_m^2\,d\,s. \tag{21}$$

Отож, з (18) на підставі (19)–(21), використовуючи введені в умові **7**) позначення, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} E(w_m)dx \leqslant \Big[d_1(\tau)\lambda^{-1/2}(\tau)+d_2(\tau)\lambda^{-1}(\tau)\Big]\int\limits_{S_\tau} E(w_m)hds+\sigma_{m\delta}(\tau)+G^*_{m\rho\delta}(\tau)+L_{m\rho}(\tau), \tag{22}$$

$\tau>0$, де $G^*_{m\rho\delta}$ – сума всіх членів правої частини (19), за винятком останнього.

Позначимо $F_m(\tau)\stackrel{\text{def}}{=}\int_{\Omega_\tau} E(w_m)\,d\,x$. З (22), враховуючи умову **7**) і (12), матимемо

$$F_m(\tau)\leqslant \frac{dF(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{d\alpha}+\sigma_{m\delta}(\tau)+G^*_{m\rho\delta}(\tau)+L_{m\rho}(\tau), \quad \tau>0,$$

звідки

$$0\leqslant -F_m+\frac{dF_m}{d\alpha}+\sigma_{m\delta}+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}. \tag{23}$$

Домноживши (23) на $e^{-\alpha}$ і проінтегрувавши одержану нерівність за α від R_1 до R_2, отримаємо

$$F_m(\tau(R_1))\leqslant e^{R_1-R_2}F_m(\tau(R_2))+\int\limits_{R_1}^{R_2}[\sigma_{m\delta}+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}]e^{R_1-\alpha}\,d\,\alpha. \tag{24}$$

Аналогічно як в [1] і [14] можна показати, що інтеграл $\int_{R_1}^{R_2}[\sigma_{m\delta}+G^*_{m\rho\delta}+L_{m\rho}]e^{R_1-\alpha}\,d\,\alpha$ як завгодно малий, якщо $m\in\mathbb{N}$ достатньо велике, $\rho=\rho(m)>0$ достатньо мале і $\delta=\delta(m,\rho)$ достатньо мале. Враховуючи зазначене, з (24) одержимо оцінку (15).

5. Доведення основних результатів. *Доведення теореми 1.* Нехай u_1, u_2 – два узагальнених розв'язки задачі (3), (4), які задовольняють умову (13). Тоді $\langle u_1-u_2\rangle_R=o(1)e^{R/2}$ при $R\to+\infty$. Звідси та з оцінки (15) маємо для довільних R_1 і R_2, $R_1<R_2$, нерівність

$$\langle u_1-u_2\rangle_{R_1}\leqslant\gamma(R_2), \tag{25}$$

де $\gamma(R_2) \to 0$ при $R_2 \to +\infty$. Фіксуючи R_1 і спрямувавши R_2 до $+\infty$, з (25) отримаємо рівність $\langle u_1 - u_2\rangle_{R_1} = 0$, тобто $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω^{R_1}. На підставі довільності R_1 отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Ω. $\square$

Доведення теореми 2. Нехай $l \in \mathbb{N}$. Розглянемо крайову задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, u_l, \nabla u_l) - a_0(x, u_l, \nabla u_l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) - f_0(x), \qquad x \in \Omega^l, \tag{26}$$

$$u_l\big|_{\Gamma_1^l \cup S^l} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_l, \nabla u_l)\, \nu_i\big|_{\Gamma_2^l} = 0. \tag{27}$$

Під U_l розумітимемо поповнення простору функцій з $C^1(\overline{\Omega^l})$, які занулюються в околі $\Gamma_1^l \cup S^l$, за нормою простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega^l)$. Очевидно, що $U_l \subset W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega^l)$.

Узагальненим розв'язком задачі (26), (27) називається функція u_l з простору U_l, яка задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_l, \nabla u_l)\, v_{x_i} + a_0(x, u_l, \nabla u_l)\, v \Big\}\, d\,x = \int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, v_{x_i} + f_0\, v \Big\}\, d\,x \tag{28}$$

для будь-якої функції $v \in U_l$.

Доведення існування узагальненого розв'язку u_l задачі (26), (27) проводиться методом Гальоркіна (див., наприклад, [8, с. 22]), а його єдиність легко отримати, використовуючи умову **5**).

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ функцію u_l продовжимо нулем на Ω, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Покажемо, що отримана послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збіжна в певному сенсі до узагальненого розв'язку (3), (4).

Спочатку оцінимо $\langle u_l\rangle_l$. Для цього приймемо в інтегральній тотожності (28) $v = u_l$. Тоді, враховуючи (17), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(u_l)\, u_{l,x_i} + a_0(u_l)\, u_l \Big\}\, d\,x = \int\limits_{\Omega^l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} f_i\, u_{l,x_i} + f_0\, u_l \Big\}\, d\,x. \tag{29}$$

Використовуючи умови на вихідні дані, формулу інтегрування частинами і нерівність Коші – Буняковського, з (29) матимемо

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ q_1 \sum_{i=1}^{k} |u_{l,x_i}|^2 + (q_2 - 2^{-1} \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i}) |u_l|^2 + q_3 \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)} \Big\}\, d\,x \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon_1}{2} \int\limits_{\Omega^l} |u_l|^2\, d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int\limits_{\Omega^l} |f_0|^2\, d\,x + \frac{\varepsilon_2}{2} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} |u_{l,x_i}|^2\, d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} |f_i|^2\, d\,x +$$
$$+ \frac{\varepsilon_3}{2} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\, d\,x + \frac{1}{2\varepsilon_3} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)}\, d\,x, \tag{30}$$

де ε_1, ε_2, ε_3 – довільні додатні сталі.

Прийнявши в нерівності (30) $\varepsilon_1 = 2^{-1}\Lambda_l$, $\varepsilon_2 = 2^{-1}q_{1l}$, $\varepsilon_3 = 2^{-1}q_{3l}$, одержимо

$$\int\limits_{\Omega^l} \Big\{ E(u_l) + q_3 \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)} \Big\}\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant 2\Lambda_l^{-1} \int\limits_{\Omega^l} |f_0|^2\, d\,x + 2q_{1l}^{-1} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=1}^{k} |f_i|^2\, d\,x + 2q_{3l}^{-1} \int\limits_{\Omega^l} \sum_{i=k+1}^{n} |f_i(x)|^{p_i^*(x)}\, d\,x.$$

Звідси та з умови **9**) випливає оцінка

$$\langle u_l \rangle_l \leqslant C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}. \tag{31}$$

Нехай $m \in \mathbb{N}$ – фіксоване число. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}$ є фундаментальною за нормою $\langle\,\cdot\,\rangle_m$. Візьмемо будь-які натуральні числа l, r, причому $l \geqslant m$. Маємо

$$\langle\, u_{l+r} - u_l \rangle_m \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} \langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m. \tag{32}$$

Оскільки u_{l+i+1}, u_{l+i} справджують умови леми 1 при $R_* = l + i$, то з цього твердження випливає оцінка

$$\langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m \leqslant e^{-1/2} \langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant e^{-(l+i-m)/2} \langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i}. \tag{33}$$

З (31) отримаємо

$$\langle\, u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i} \leqslant \langle\, u_{l+i+1} \rangle_{l+i+1} + \langle\, u_{l+i} \rangle_{l+i} \leqslant C_3 e^{(1-\varepsilon)(l+i)/2}, \tag{34}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка від l та i не залежить. На підставі (32)-(34) одержимо

$$\langle\, u_{l+r} - u_l \rangle_m \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} C_3 e^{m/2} e^{-\varepsilon(l+i)/2} \leqslant C_4 e^{(m-\varepsilon l)/2}. \tag{35}$$

Тут $C_4 > 0$ – стала, яка від l і r не залежить.

З (35) випливає, що $\langle\, u_{l+r} - u_l \rangle_m \to 0$ при $l \to \infty$ для будь-яких $r \in \mathbb{N}$, тобто послідовності $\{u_l\}$, $\{u_{l,x_i}\}$, $i = \overline{1,k}$, фундаментальні в просторі $L_2(\Omega^m)$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Тому існує функція $u \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ така, що $u_{x_i} \in L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $i = \overline{1,k}$, і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в } L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{36}$$

$$u_{l,x_i} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{сильно в } L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{37}$$

На підставі умови **6**) з (36), (37) маємо

$$a_i(u_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} a_i(u) \quad \text{сильно в } L_{2,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad i = \overline{1,k}. \tag{38}$$

Нехай $R > 0$ – довільне число, $\zeta(x') = \psi_1(x')$, $x' \in \mathbb{R}^k$, де функція ψ_1 така сама як у доведенні леми 1 при $\tau = R + 1$, $\delta = 1$. Візьмемо в (28) $v = u_l\zeta$. Нехай число

l_0 таке, що для довільного $l \geqslant l_0$ маємо $\Omega^l \supset \Omega_{R+1}$. Тоді для $l > l_0$ після простих перетворень отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i(u_l)u_{l,x_i} + a_0(u_l)u_l\Big]\,\zeta\,d\,x = \int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[f_0 u_l + \sum_{i=1}^{n} f_i u_{l,x_i}\Big]\,\zeta\,d\,x +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} f_i\,u_l\,\zeta_{x_i}\,d\,x - \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k} a_i(u_l)\,u_l\,\zeta_{x_i}\,d\,x. \tag{39}$$

Оцінимо доданки рівності (39), використовуючи умову **8**), нерівності Коші – Буняковського та Юнга. У результаті, врахувавши, що $|\nabla\zeta| \leqslant C$ на $\mathbb{R}^k$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[q_1(x)\sum_{i=1}^{k}|u_{l,x_i}(x)|^2 + (q_2(x) - 2^{-1}\sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i})|u_l(x)|^2 + q_3(x)\sum_{i=k+1}^{n}|u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\Big]\zeta d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[|u_l|^2 + \sum_{i=1}^{k}|u_{l,x_i}|^2\Big]\zeta\,d\,x + \int\limits_{\Omega_{R+1}} \Big[|f_0(x)|^2 + \sum_{i=1}^{k}|f_i(x)|^2\Big]\zeta\,d\,x +$$

$$+\eta \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\zeta\,d\,x + C_5(\eta)\int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=k+1}^{n}|f_i(x)|^{p^*_i(x)}\zeta\,d\,x +$$

$$+C_6 \int\limits_{\Omega_{R+1}} \sum_{i=1}^{k}\Big\{|a_i(u_l)|^2 + (1 + |b_i(x)|)|u_l|^2 + |f_i|^2\Big\}|\zeta_{x_i}|\,d\,x, \tag{40}$$

де $\eta > 0$ – довільна стала, $C_5(\eta) > 0, C_6 > 0$ – деякі сталі.

На підставі (36)–(38) з (40), вибираючи значення η досить малим, одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{i=k+1}^{n} |u_{l,x_i}(x)|^{p_i(x)}\,d\,x \leqslant C_7(R). \tag{41}$$

Тут $C_7(R) > 0$ – стала, яка від l не залежить. Згідно з умовою **2**) та на підставі (36), (37) і (41) для кожного $i = 0, k+1, \ldots, n$ маємо

$$\int\limits_{\Omega_R} |a_i(u_l)|^{p^*_i(x)} d\,x \leqslant C_8 \int\limits_{\Omega_R} \Big\{\sum_{j=1}^{k}|u_{l,x_j}|^2 + \sum_{j=k+1}^{n}|u_{l,x_j}|^{p_j(x)} + |u_l|^2\Big\} d\,x + C_9(R) \leqslant C_{10}(R), \tag{42}$$

де $C_8, C_9(R), C_{10}(R) > 0$ – деякі сталі, які від l не залежать (але можуть залежати від R).

З (36), (37), (41), (42) і умови **1**), врахувавши рефлексивність просторів $L_{p_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$, $i = \overline{k+1, n}$, та $L_{p^*_i(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$, $i = 0, k+1, \ldots, n$, $R > 0$, отримаємо існування підпослідовності $\{u_{l_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ (за якою залишимо те саме позначення) та функцій $\chi_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $i=0,k+1,\dots,n$, таких, що

$$u_{l_j,x_i} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \qquad i=\overline{k+1,n}, \tag{43}$$

$$c\big(u_{l_j}\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0(\,\cdot\,) \quad \text{слабко в} \quad L_{p_0^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{44}$$

$$a_i\big(u_{l_j}\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i(\,\cdot\,) \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i=k+1,\dots,n. \tag{45}$$

Покажемо, що

$$\chi_0 = c(u), \tag{46}$$

$$\chi_i(\,\cdot\,) = a_i\big(u\big), \qquad i=k+1,\dots,n. \tag{47}$$

Нехай $w \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\psi \in C_c^{1,+}(\mathbb{R}^k)$. Згідно з нерівністю (7) маємо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(u_{l_j})-a_i(w)\big)\big(u_{l_j,x_i}-w_{x_i}\big)+$$

$$+\big(c(u_{l_j})-c(w)\big)\big(u_{l_j}-w\big)-2^{-1}\sum_{i=1}^{k}b_{i,x_i}(u_{l_j}-w)^2\Big\}\psi\,dx \geqslant 0 \tag{48}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$, звідки

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}a_i(u_{l_j})u_{l_j,x_i}\,\psi\,dx-\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(u_{l_j})w_{x_i}+a_i(w)(u_{l_j,x_i}-w_{x_i})\big)-$$

$$-\big(c(u_{l_j})-c(w)\big)\big(u_{l_j}-w\big)+2^{-1}\sum_{i=1}^{k}b_{i,x_i}(u_{l_j}-w)^2\Big\}\psi\,dx \geqslant 0 \tag{49}$$

для всіх $j \in \mathbb{N}$.

Врахуємо, що для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ правильна рівність

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}a_i(u_{l_j})v_{x_i}+a_0(u_{l_j})v-f_0v-\sum_{i=1}^{n}f_iv_{x_i}\Big\}\,dx=0 \tag{50}$$

для будь-яких $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\overline{\Omega},\Gamma_1)$ таких, що supp v лежить в $\overline{\Omega^{l_j}}$.

З рівності (50), взявши у ній $v=u_{l_j}\,\psi$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}a_i(u_{l_j})u_{l_j,x_i}\,\psi\,dx=-\int\limits_{\Omega}\Big\{a_0(u_{l_j})u_{l_j}\,\psi-f_0\,u_{l_j}\,\psi-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}f_i\,u_{l_j,x_i}\,\psi+\sum_{i=1}^{k}a_i(u_{l_j})\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}-\sum_{i=1}^{k}f_i(x)\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}\Big\}\,dx. \tag{51}$$

З (49) та (51) одержимо

$$-\int\limits_{\Omega}\Big\{a_0(u_{l_j})u_{l_j}\,\psi-f_0\,u_{l_j}\,\psi-\sum_{i=1}^{n}f_i\,u_{l_j,x_i}\,\psi+\sum_{i=1}^{k}a_i(u_{l_j})\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}-\sum_{i=1}^{k}f_i(x)\,u_{l_j}\,\psi_{x_i}\Big\}\,d\,x-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(u_{l_j})w_{x_i}+a_i(w)(u_{l_j,x_i}-w_{x_i})\big)-$$

$$-\big(c(u_{l_j})-c(w)\big)\big(u_{l_j}-w\big)+2^{-1}\sum_{i=1}^{k}b_{i,x_i}(u_{l_j}-w)^2\Big\}\,\psi\,d\,x\geqslant 0. \tag{52}$$

Перейдемо в (52) до границі при $j\to\infty$, врахувавши (6), (36), (37), (38), (43), (44) та (45). У результаті отримаємо

$$-\int\limits_{\Omega}\Big\{(\chi_0+\sum_{i=1}^{k}b_iu_{x_i})u\,\psi-f_0\,u\,\psi-\sum_{i=1}^{n}f_i\,u_{x_i}\,\psi+\sum_{i=1}^{k}a_i(u)\,u\,\psi_{x_i}+$$

$$-\sum_{i=1}^{k}f_i(x)\,u\,\psi_{x_i}\Big\}\,d\,x-\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k}a_i(u)w_{x_i}+\sum_{i=k+1}^{n}\chi_iw_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}a_i(w)(u_{x_i}-w_{x_i})-$$

$$-(\chi_0-c(w))(u-w)+2^{-1}\sum_{i=1}^{k}b_{i,x_i}(u-w)^2\Big\}\,\psi\,d\,x\geqslant 0. \tag{53}$$

Нехай $\nu\in\mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp}\psi\subset\Omega^{l_\nu}$. Приймемо при $j>\nu$ в рівності (50) $v=u\,\psi$ і перейшовши до границі при $j\to\infty$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k}a_i(u)u_{x_i}+\sum_{i=k+1}^{n}\chi_i\,u_{x_i}\Big\}\,\psi\,d\,x=-\int\limits_{\Omega}\Big\{(\chi_0+\sum_{i=1}^{k}b_iu_{x_i})u\,\psi-$$

$$-f_0\,u\,\psi-\sum_{i=1}^{n}f_i\,u_{x_i}\,\psi+\sum_{i=1}^{k}a_i(u)\,u\,\psi_{x_i}-\sum_{i=1}^{k}f_i\,u\,\psi_{x_i}\Big\}\,d\,x. \tag{54}$$

З (53) та (54) одержимо

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\sum_{i=1}^{k}(a_i(w)-a_i(u))\,(u_{x_i}-w_{x_i})+\sum_{i=k+1}^{n}(a_i(w)-\chi_i)\,(u_{x_i}-w_{x_i})+$$

$$+(c(w)-\chi_0)\,(u-w)-2^{-1}\sum_{i=1}^{k}b_{i,x_i}(u-w)^2\Big\}\,\psi\,d\,x\leqslant 0 \tag{55}$$

для довільного $w\in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\psi\in C_c^{1,+}(\overline{\Omega})$.

Взявши в (55) $w = u - \lambda g$, $\lambda > 0$, $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, матимемо

$$\lambda \int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=1}^{k} (a_i(u-\lambda g) - a_i(u))\, g_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u-\lambda g) - \chi_i)\, g_{x_i} + (c(u-\lambda g) - \chi_0)g - 2^{-1}\lambda \sum_{i=1}^{k} b_{i,x_i} g^2 \Big\} \psi\, dx \leqslant 0 \qquad (56)$$

для довільних $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Поділимо праву і ліву частини нерівності (56) на λ, і в отриманій нерівності спрямуємо λ до 0. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega} \Big\{ \sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u) - \chi_i)\, g_{x_i} + (c(u) - \chi_0)g \Big\} \psi\, dx \leqslant 0 \quad \forall g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (57)$$

З (57) беручи по черзі спочатку $g(x) = 1$, а потім $g(x) = -1$, отримаємо (46). Врахувавши (46), з (57) одержимо

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=k+1}^{n} (a_i(u) - \chi_i)\, g_{x_i}\, \psi\, dx \leqslant 0 \quad \forall g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \qquad (58)$$

Оскільки (58) виконується для довільної $g \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то вибираючи спочатку $g(x) = x_l$, $l = \overline{k+1,n}$, а потім $g(x) = -x_l$, $l = \overline{k+1,n}$, отримаємо (47).

Нехай $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$. Для кожного $j \geqslant \nu$, де $\nu \in \mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega^{l_\nu}}$, з означення u_{l_j} маємо рівність (28). Перейдемо в ній до границі при $j \to +\infty$, врахувавши (6), (37), (38), (44)–(47). У результаті отримаємо рівність (5) для заданої функції v. Оскільки v – довільна, і u належить простору $\overset{\circ}{W}{}^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}, \Gamma_1)$, то u є узагальненим розв'язком задачі (3), (4). Оцінку (14) одержуємо з (31) і (35) так: $\langle u \rangle_l \leqslant \langle u - u_l \rangle_l + \langle u_l \rangle_l = \lim\limits_{m\to\infty} \langle u_m - u_l \rangle_l + \langle u_l \rangle_l \leqslant C_2 e^{(1-\varepsilon)l/2}$. $\square$

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – Т. 31. – №6. – С. 142-166.
2. *Шишков А. Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47. – №2. – С. 277-289.
3. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. and Optim. – Vol. 12. – 1984. – P. 271-282.
4. *Diaz J. I. and Oleinik O. A.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in unbounded domains and the asymptotic behaviour of its solution // C. R. Acad. Sci. Paris. – Vol. 315, Serie I. (1992). – P. 787-792.
5. *Бокало М. М., Кушнір О. В.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях // Математичні студії. – 2005. – Т. 24. – №1. – С. 69-82.

6. *Медвідь І.* Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 149-166.
7. *Bendahmane M., Karlsen H.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^n$ with advection and lower order terms and locally integrable data // Potential Anal. – Vol. 22 (2002). – P. 207-227.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения – М., 1978.
10. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М., 1964.
11. *Bernis F.* Elliptic and Parabolic Semilinear Problems without Conditions at infinity // Arch. Ration Mech. and Anal. – Vol. 106, №3 (1989). – P. 217-241.
12. *Antontsev S. and Shmarev S.* Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear analysis Serie A: Theory & Methods. – Vol. 65, №4 (2004). – P. 728-761.
13. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,\,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – Vol. 41, №4 (1991). – P. 592-618.
14. *Бокало Н. М.* Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – №8. – С. 1325-1334.

NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS IN QUASICYLINDRICAL DOMAIN

Olena DOMANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1

It is proved the existence and uniqueness of solutions to boundary problems for some class of nonlinear elliptic equations, containing linear elliptic equations, given in unbounded quasicylindric domains under some conditions on the behaviour of solution and growth of the initial data at infinity.

Key words: nonlinear elliptic equations, weak solution, general Lebesgue-Sobolev spaces, quasicylindric domain.

Стаття надійшла до редколегії 31.08.2007

Прийнята до друку 24.10.2007