

УДК 517.95

ПРО НОСІЙ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО 2b-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Олесь КОРКУН, Сергій ЛАВРЕНЮК

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1*

Розглянуто задачу Коші для рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha (a_\alpha(z, t, u, D_x u, D_x^2 u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta (b_\beta(z, t, u, D_z u)) + c(z, t, u) = f.$$

Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку, компактності носія розв'язку.

Ключові слова: 2b-параболічне рівняння, задача Коші.

У 1960 році С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввівши термін “2b-параболічні системи”. У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу стосовно диференціювання за змінною t . Було розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем зазначеного типу (див. праці [2]–[21]).

Мета цієї праці – дослідити задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною, в якому за групою просторових змінних є диференціальний оператор четвертого порядку, і за всіма просторовими змінними – другого порядку. Зазначимо, що на праці, присвячені вивченню нелінійних рівнянь такого типу, ми не натрапляли.

Нехай $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n$, $k + m = n$; $Q_\tau = \mathbb{R}^n \times (0, \tau)$, $0 < \tau < T$. Розглянемо в області Q_T рівняння

$$A(u) \equiv u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha (a_\alpha(z, t, u, D_x u, D_x^2 u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta (b_\beta(z, t, u, D_z u)) + c(z, t, u) = f \quad (1)$$

з початковою умовою

$$u(z, 0) = u_0(z), \quad z \in \mathbb{R}^n. \quad (2)$$

Тут $D_w^j u$ позначає вектор всіх похідних функції u за змінними $w = (w_1, \dots, w_l)$ порядку j ($j = 1, 2$), причому $D_w^1 u \equiv D_w u$,

$$D_w^\gamma = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial w_1^{\gamma_1} \dots \partial w_l^{\gamma_l}}, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_l.$$

Прийmemo

$$|D_x^j u|_p = \left(\sum_{|\alpha|=j} |D_x^\alpha u|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [2, \infty), \quad j = 1, 2;$$

$$|D_z u|_q = \left(\sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^q \right)^{1/q}, \quad q \in [2, \infty).$$

Припускатимемо, що виконуються такі умови:

- (A) функції $a_\alpha(\cdot, \cdot, \xi, \eta, \zeta)$ вимірні в Q_T для всіх $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$, функції $a_\alpha(z, t, \cdot, \cdot, \cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ майже для всіх $(z, t) \in Q_T$, де $N(k)$ – довжина вектора ζ_α , $|\alpha| = 2$; майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ і для всіх $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ правильні такі нерівності:
- $$\sum_{|\alpha|=2} (a_\alpha(z, t, \xi, \eta, \zeta) - a_\alpha(z, t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}))(\zeta_\alpha - \tilde{\zeta}_\alpha) \geq A_0 \sum_{|\alpha|=2} |\zeta_\alpha - \tilde{\zeta}_\alpha|^p,$$
- $$|a_\alpha(z, t, \xi, \eta, \zeta)| \leq A_1 \sum_{|\sigma|=2} |\zeta_\sigma|^{p-1}, \quad \text{де } A_0, A_1 - \text{ додатні сталі, } p \in [2, \infty);$$
- (B) функції $b_\beta(\cdot, \cdot, \xi, \eta)$ вимірні в Q_T для всіх $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{1+m}$, функції $b_\beta(z, t, \cdot, \cdot)$ неперервні в \mathbb{R}^{1+m} майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ та $|\beta| = 1$; майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ і для всіх $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{1+m}$ правильні такі нерівності:
- $$\sum_{|\beta|=1} (b_\beta(z, t, \xi, \eta) - b_\beta(z, t, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}))(\eta_\beta - \tilde{\eta}_\beta) \geq B_0 \sum_{|\beta|=1} |\eta_\beta - \tilde{\eta}_\beta|^q,$$
- $$|b_\beta(z, t, \xi, \eta)| \leq B_1 \sum_{|\sigma|=1} |\eta_\sigma|^{q-1}, \quad \text{де } B_0, B_1 - \text{ додатні сталі, } q \in [2, \infty);$$
- (C) функція $c(\cdot, \cdot, \xi)$ вимірні в Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, функція $c(z, t, \cdot)$ неперервна в \mathbb{R} майже для всіх $(z, t) \in Q_T$; майже для всіх $(z, t) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ правильні такі нерівності:
- $$(c(z, t, \xi) - c(z, t, \tilde{\xi}))(\xi - \tilde{\xi}) \geq C_0 |\xi - \tilde{\xi}|^r, \quad r \in (1, \infty),$$
- $$|c(z, t, \xi)| \leq C_1 |\xi|^{r-1}, \quad \text{де стала } C_0 > 0 \text{ при } r \geq 2 \text{ і } C_0 = 0 \text{ при } r \in (1, 2),$$
- $$C_1 = \text{const} > 0;$$
- (F) $f(z, t) = \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha f_\alpha(z, t) + \sum_{|\beta| \leq 1} (-1)^{|\beta|} D_z^\beta g_\beta(z, t);$
- $$f_\alpha \in L^{p'}(Q_T), \quad |\alpha| = 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \quad g_\beta \in L^{q'}(Q_T), \quad |\beta| = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1;$$
- $$g_0 \in L^{r_0}(Q_T), \quad r_0 = \max\{2; r\};$$
- (U) $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n).$

Позначимо через W_p простір, який є замиканням множини функцій $C([0, T]; C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ у банаховому просторі

$$\{u \in L^{r_0}(Q_T), D_x^\alpha u \in L^p(Q_T), |\alpha| = 2\}, \quad \|u\|_{W_p} = \|u\|_{L^{r_0}(Q_T)} + \|D_x^2 u\|_{L^p(Q_T)};$$

через W_q простір, який є замиканням множини функцій $C([0, T]; C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ у банаховому просторі

$$\{u \in L^{r_0}(Q_T), D_z^\beta u \in L^q(Q_T), |\beta| = 1\}, \quad \|u\|_{W_q} = \|u\|_{L^{r_0}(Q_T)} + \|D_z u\|_{L^q(Q_T)}.$$

Означення 1. Узагальненим розв'язком задачі (1), (2) називатимемо функцію $u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap W_q \cap W_p$, яка задовольняє рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} u(z, \tau) v(z, \tau) dz + \int_{Q_\tau} \left[-uv_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z, t, u, D_x u, D_x^2 u) D_x^\alpha v + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z, t, u, D_z u) D_z^\beta v + c(z, t, u) v \right] dz dt = \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha(z, t) D_x^\alpha v + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta| \leq 1} g_\beta(z, t) D_z^\beta v \right] dz dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(z) v(z, 0) dz \end{aligned} \quad (3)$$

для всіх $\tau \in (0, T]$ і для довільної функції $v \in W_q \cap W_p$ такої, що $v_t \in L^2(Q_T)$.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (А), (В), (С), (F), (U). Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (2).

Доведення. Нехай R – довільне додатне фіксоване число

$$\Pi_x^R = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < R\}, \quad \Pi_y^R = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| < R\},$$

$\Omega^R = \Pi_x^R \times \Pi_y^R$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0, \tau)$, $S_T^R = \partial\Omega^R \times (0, T)$. Розглянемо задачу

$$A(u) = f^R, \quad (z, t) \in Q_T^R, \quad (4)$$

$$u(z, 0) = u_0^R(z), \quad z \in \Omega^R, \quad (5)$$

$$u|_{S_T^R} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\partial\Pi_x^R \times \Pi_y^R \times (0, T)} = 0, \quad (6)$$

де ν – вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Pi_x^R \times \Pi_y^R \times (0, T)$

$$f^R(z, t) = \begin{cases} f(z, t), & (z, t) \in Q_T^R, \\ 0, & (z, t) \in Q_T \setminus Q_T^R, \end{cases} \quad u_0^R(z) = \begin{cases} u_0(z), & z \in \Omega^R, \\ 0, & z \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega^R. \end{cases}$$

На підставі умов теореми виконуються всі умови зауваження 1.13 [22, гл. 2, § 1.7]. Тому задача (4)–(6) має єдиний розв'язок u^R в сенсі розподілів такий, що $u^R \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega^R))$,

$$u^R \in L^q((0, T); W_0^{1,q}(\Omega^R)) \cap L^p((0, T); L^p(\Pi_y^R; W_0^{2,p}(\Pi_x^R))) \cap L^{r_0}(Q_T^R) \equiv V_R(0, T).$$

Зокрема,

$$u_t^R = - \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha (a_\alpha(\cdot, \cdot, u^R, D_x u^R, D_x^2 u^R)) + \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta (b_\beta(\cdot, \cdot, u^R, D_z u^R)) - c(\cdot, \cdot, u^R) + f^R(\cdot, \cdot)$$

і

$$u_t^R \in V_R^*(0, T) \equiv L^{q'}((0, T); W^{-1, q'}(\Omega^R)) + L^{p'}((0, T); L^{p'}(\Pi_y^R; W^{-2, p'}(\Pi_x^R))) + L^{r'_0}(Q_T^R).$$

Тоді на підставі теореми 1.17 [23, с. 177] $u^R \in C([0, T]; L^2(\Omega^R))$, оскільки

$$V_R(0, T) \subset L^2(Q_T^R) \subset V_R^*(0, T)$$

щільно і неперервно. Крім того, правильна формула інтегрування частинами

$$\langle u_t^R, u^R \rangle_{(V_R^*(t_1, t_2), V_R(t_1, t_2))} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^R} |u^R(z, t_2)|^2 dz - \frac{1}{2} \int_{\Omega^R} |u^R(z, t_1)|^2 dz$$

для довільних t_1, t_2 , $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, де через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(V_R^*(t_1, t_2), V_R(t_1, t_2))}$ позначено значення функціонала з простору $V_R^*(t_1, t_2)$ на елементах простору $V_R(t_1, t_2)$.

Продовжимо функцію u^R нулем на область $Q_T \setminus Q_T^R$. Нехай R набуває значення з множини натуральних чисел. Тоді матимемо послідовність функцій $\{u^s\}$. Очевидно, кожна функція $u^{s,l} = u^s - u^l$, $s > l$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u^{s,l}(z, \tau)|^2 dz + 2 \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} (a_\alpha(z, t, u^s, D_x u^s, D_x^2 u^s) - a_\alpha(z, t, u^l, D_x u^l, D_x^2 u^l)) D_x^\alpha u^{s,l} + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta|=1} (b_\beta(z, t, u^s, D_z u^s) - b_\beta(z, t, u^l, D_z u^l)) D_z^\beta u^{s,l} + (c(z, t, u^s) - c(z, t, u^l)) u^{s,l} \right] dz dt = \\ & = \int_{Q_\tau \setminus Q_\tau^l} \left[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha^l(z, t) D_x^\alpha u^{s,l} + \sum_{|\beta| \leq 1} g_\beta^l(z, t) D_z^\beta u^{s,l} \right] dz dt + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^l} |u_0^l(z)|^2 dz, \quad \tau \in (0, T]. \end{aligned} \quad (7)$$

Нехай ε – довільне як завгодно мале додатне фіксоване число. На підставі умов **(F)**, **(U)** існує таке число $N_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $l > N_0$ права частина (7) менша від ε . Тоді, використовуючи умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, з (7) одержимо нерівність

$$\|u^{s,l}\|_{C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))} + \int_{Q_T} \left[A_0 |D_x^2 u^{s,l}|_p^p + B_0 |D_z u^{s,l}|_q^q + v C_0 |u^{s,l}|^{r_0} \right] dz dt < \varepsilon, \quad (8)$$

де $v = 0$ при $r < 2$ і $v = 1$ при $r \geq 2$. З (8) випливає, що послідовність $\{u^s\}$ фундаментальна у просторі $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n)) \cap W_q \cap W_p$. Позначимо через u границю

послідовності $\{u^s\}$ у цьому просторі. Для кожного елемента u^s маємо рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} u^s(z, \tau) v(z, \tau) dz + \int_{Q_\tau} \left[-u^s v_t + \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z, t, u^s, D_x u^s, D_x^2 u^s) D_x^\alpha v + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z, t, u^s, D_z u^s) D_z^\beta v + c(z, t, u^s) v \right] dz dt = \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha^s(z, t) D_x^\alpha v + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta| \leq 1} g_\beta^s(z, t) D_z^\beta v \right] dz dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0^s(z) v(z, 0) dz, \end{aligned} \quad (9)$$

правильну для всіх $\tau \in (0, T]$ і для всіх функцій $v \in W_q \cap W_p$ таких, що $v_t \in L^2(Q_T)$.

Функції a_α ($|\alpha| = 2$), b_β ($|\beta| = 1$) та c задовольняють умови леми 2.2 [23, с. 57]. Тому

$$a_\alpha(\cdot, \cdot, u^s, D_x u^s, D_x^2 u^s) \rightarrow a_\alpha(\cdot, \cdot, u, D_x u, D_x^2 u), \quad |\alpha| = 2$$

слабко в $L^{p'}(Q_T)$,

$$b_\beta(\cdot, \cdot, u^s, D_z u^s) \rightarrow b_\beta(\cdot, \cdot, u, D_z u), \quad |\beta| = 1$$

слабко в $L^{q'}(Q_T)$, $c(\cdot, \cdot, u^s) \rightarrow c(\cdot, \cdot, u)$ слабко в $L^{r'}(Q_T)$ при $s \rightarrow \infty$. Крім того, $u_0^s \rightarrow u_0$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_\alpha^s \rightarrow f_\alpha$ ($|\alpha| = 2$) в $L^{p'}(Q_T)$, $g_\beta^s \rightarrow g_\beta$ ($|\beta| = 1$) в $L^{q'}(Q_T)$, $g_0^s \rightarrow g_0$ в $L^{r'}(Q_T)$ при $s \rightarrow \infty$. Отже, перейшовши в (9) до границі при $s \rightarrow \infty$ одержимо, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1), (2). Крім того, для функції u правильна рівність

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(z, \tau)|^2 dz + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z, t, u, D_x u, D_x^2 u) D_x^\alpha u + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z, t, u, D_z u) D_z^\beta u + c(z, t, u) u \right] dz dt = \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} f_\alpha(z, t) D_x^\alpha u + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta| \leq 1} g_\beta(z, t) D_z^\beta u \right] dz dt + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(z)|^2 dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Для доведення єдиності припускаємо, що існують два узагальнені розв'язки u^1 і u^2 . Тоді аналогічно як (10) одержимо рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u^1(z, \tau) - u^2(z, \tau)|^2 dz + 2 \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} (a_\alpha(z, t, u^1, D_x u^1, D_x^2 u^1) - \right. \\ & \left. - a_\alpha(z, t, u^2, D_x u^2, D_x^2 u^2)) D_x^\alpha (u^1 - u^2) + \sum_{|\beta|=1} (b_\beta(z, t, u^1, D_z u^1) - b_\beta(z, t, u^2, D_z u^2)) \times \right. \\ & \left. \times D_z^\beta (u^1 - u^2) + (c(z, t, u^1) - c(z, t, u^2))(u^1 - u^2) \right] dz dt = 0, \end{aligned}$$

$\tau \in (0, T]$. Враховуючи умови **(A)**, **(D)**, **(C)**, одержуємо, що

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u^1(z, \tau) - u^2(z, \tau)|^2 dz \leq 0, \quad \tau \in [0, T],$$

тобто $u^1(z, t) = u^2(z, t)$ майже всюди в Q_T . Теорему доведено.

Використовуючи методику та ідеї праці [24], дослідимо умови компактності та поведінки носія узагальненого розв'язку задачі Коші.

Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1), (2). Прийmemo

$$\omega_m(T) = \sup_{y_m \in \mathbb{R}} \{z \in \text{supp } u(\cdot, T)\}, \quad S_{m,f}(T) = \sup_{y_m \in \mathbb{R}} \{z \in \text{supp } f, t \in (0, T)\},$$

$$S_m(T) = \sup \{S_{m,f}(T); \omega_m(0)\};$$

$s_0 = 2q$, якщо $q \in \mathbb{N}$ і $s_0 = [q] + q + 1$ у протилежному випадку ($[q]$ – ціла частина q);

$$a_0 = \frac{q-2}{2q} \left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+s_0-q} \right)^{-1}, \quad \vartheta_0 = a_0 + \frac{(1-a_0)q}{2}, \quad \nu_0 = \frac{\vartheta_0 q}{\vartheta_0 - 1}.$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(F)**, **(U)**, $S_m(T) < \infty$. Тоді*

$$\omega_m(T) \leq S_m(T) + MT^{\beta_0} \left(\int_{Q_T} |D_z u|_q^q dz dt \right)^{1/\lambda_0},$$

де

$$\lambda_0 = \frac{1}{\nu_0 - s_0 + q}, \quad \beta_0 = \frac{1 - a_0}{(\vartheta_0 - 1)(\nu_0 - s_0 + q)},$$

а стала M залежить від n, q .

Доведення. Нехай $\rho(y_m) = (y_m - \xi)^{s_0}$ при $y_m \geq \xi$ і $\rho(y_m) = 0$ при $y_m < \xi$, а $\xi \geq S_m(T)$. Повторюючи доведення лема 4.2 [24] для необмеженої області, одержимо рівність

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(z, \tau)|^2 \rho(y_m) dz + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z, t, u, D_x u, D_x^2 u) D_x^\alpha (u\rho) + \right. \\ & \left. + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z, t, u, D_z u) D_z^\beta (u\rho) + c(z, t, u) u\rho \right] dz dt = 0, \quad \tau \in (0, T]. \end{aligned} \quad (11)$$

На підставі умов **(A)**, **(B)**, **(C)** з (11) випливає нерівність

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(z, t)|^2 \rho(y_m) dz + \int_{Q_T} \left[A_0 |D_x^2 u|_p^p + B_0 |D_z u|_q^q + C_0 |u|^r \right] \rho dz dt \leq \\ & \leq s_0 B_1 \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1} |u| (y_m - \xi)^{s_0-1} dz dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Позначимо

$$F_{s_0}(\xi) = \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \cap \{y_m > \xi\}} |u(z, t)|^2 (y_m - \xi)^{s_0} dz,$$

$$E_{s_0}(\xi) = \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} |D_z u|_q^q (y_m - \xi)^{s_0} dz dt.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1} |u| (y_m - \xi)^{s_0-1} dz dt \leq \\ & \leq \frac{\delta}{q'} \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} |D_z u|_q^q (y_m - \xi)^{s_0} dz dt + \frac{n}{q\delta^{q/q'}} \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} |u|^q (y_m - \xi)^{s_0-q} dz dt, \end{aligned}$$

то, вибравши $\delta = \frac{B_0 q'}{2s_0 B_1}$, з (12) одержимо нерівність

$$F_{s_0}(\xi) + E_{s_0}(\xi) \leq M_1 \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} |u|^q (y_m - \xi)^{s_0-q} dz dt, \quad (13)$$

де $M_1 = \frac{2n}{q\delta^{q/q'}}$. На підставі нерівності Харді [24, лема А.2]

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} |u|^q (y_m - \xi)^{s_0-q} dz dt \leq \\ & \left(\frac{q}{s_0 - q + 1} \right)^q \int_{Q_T \cap \{y_m > \xi\}} |D_z u|_q^q (y_m - \xi)^{s_0} dz dt = M_2 E_{s_0}(\xi). \end{aligned}$$

Отже, з (13) випливає оцінка

$$F_{s_0}(\xi) \leq M_1 M_2 E_{s_0}(\xi). \quad (14)$$

Використаємо лему А.1 [24]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \cap \{y_m > \xi\}} |u|^q (y_m - \xi)^{s_0-q} dz \leq M_3 \left(\int_{\mathbb{R}^n \cap \{y_m > \xi\}} |D_z u|_q^q (y_m - \xi)^{s_0-q} dz \right)^{a_0} \times \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^n \cap \{y_m > \xi\}} |u|^2 (y_m - \xi)^{s_0-q} dz \right)^{(1-a_0)q/2}, \quad (15) \end{aligned}$$

де стала M_3 залежить від n, q . Отже, з (13), враховуючи (15) і (14), отримаємо

$$E_{s_0}(\xi) \leq M_1 M_2 M_3 T^{1-a_0} [E_{s_0-q}(\xi)]^{a_0+(1-a_0)q/2}. \quad (16)$$

Тоді на підставі леми А.4 [24] з (16) впливає оцінка

$$\begin{aligned} \omega_m(T) &\leq S_m(T) + (\nu_0 - s_0 + q + 1) M_4^{1/[(\nu_0-1)(\nu_0-s_0+q)]} \times \\ &\times T^{(1-a_0)/[(\nu_0-1)(\nu_0-s_0+q)]} [E_0(0)]^{1/(\nu_0-s_0+q)}, \end{aligned}$$

де $M_4 = M_1 M_2 M_3$. Отже, теорему доведено.

Зауваження 1. Нехай u_0 має обмежений носій за змінною y_m , f_α ($|\alpha| = 2$), g_β ($|\beta| \leq 1$) мають обмежені носії за змінною y_m майже для всіх $t \in (0, T)$. Тоді на підставі теореми 2 $u(\cdot, T)$ має обмежений носій за змінною y_m .

Нехай u – узагальнений розв’язок задачі (1), (2). Прийmemo

$$\omega_k(T) = \sup_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \text{supp } u(\cdot, T)\}, \quad S_{k,f}(T) = \sup_{x_k \in \mathbb{R}} \{z \in \text{supp } f, t \in (0, T)\},$$

$$S_k(T) = \sup \{S_{k,f}(T); \omega_k(0)\} \quad \mathcal{E}_s(\xi) = \int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} (|D_z u|_q^q + |D_x^2 u|_q^q) (x_k - \xi)^s dz dt,$$

$$a = \frac{q-2}{2q} \left(\frac{q-2}{2q} + \frac{1}{n+[q]+1} \right)^{-1}.$$

Теорема 3. Нехай виконуються умови (А), (В), (С), (F), (U), $S_m(T) < \infty$, $p = q$. Тоді існує таке x_k^0 , що

$$\mathcal{E}_0(\xi) \leq \mu \exp \left[-\frac{\xi - x_k^0}{\mu(1 + T^{1-a})^{1/q}} \right]$$

при

$$\xi \geq \max \{(1 + T^{1-a})^{1/q}; x_k^0\},$$

де стала μ залежить від n, q, A_0, A_1, B_0, B_1 . Зокрема, якщо $p = q = 2$, то $x_k^0 = S_k(T)$.

Доведення. Виберемо

$$\rho(x_k) = \begin{cases} (x_k - \xi)^s, & x_k \geq \xi, \\ 0, & x_k < \xi, \end{cases}$$

де $\xi \geq S_k(T)$, $s = [q] + q + 1$. Тоді залишається правильною рівність (11). На підставі

умов (A), (B), (C) з (11) випливає нерівність

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(z, t)|^2 \rho(x_k) dz + \int_{Q_T} \left[A_0 |D_x^2 u|_q^q + B_0 |D_z u|_q^q + C_0 |u|^r \right] \rho dz dt \leq \\ & \leq \int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} \left[s A_1 \sum_{|\alpha|=2} |D_x^\alpha u|^{q-1} |u_{x_k}| (x_k - \xi)^{s-1} + \right. \\ & \left. + s(s-1) A_1 \sum_{|\alpha|=2} |D_x^\alpha u|^{q-1} |u| (x_k - \xi)^{s-2} + s B_1 \sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^{q-1} |u| (x_k - \xi)^{s-1} \right] dz dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} F_s(\xi) &= \sup_{t \in [0, T]} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \cap \{x_k - \xi\}} |u(z, t)|^2 (x_k - \xi)^s dz, \\ E_s(\xi) &= \int_{Q_T \cap \{x_k - \xi\}} |D_z u|_q^q (x_k - \xi)^s dz dt. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Гельдера і нерівність Харді [24, лема A.2], праву частину (17) можна оцінити виразом

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \left[\frac{s^2 \delta_1 A_1}{q'} |D_x^2 u|_q^q + \frac{s \delta_2 B_1}{q'} |D_z u|_q^q \right] \rho dz dt + \\ & + \int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} \left[\left(\frac{s(s-1) k^2 A_1}{q \delta_1^{q/q'}} \left(\frac{q}{s-2q+1} \right)^q + \frac{s k^2 A_1}{q \delta_1^{q/q'}} \right) |D_z u|_q^q + \frac{s B_1}{q \delta_2^{q/q'}} |u|^q \right] \times \\ & \times (x_k - \xi)^{s-q} dz dt, \end{aligned}$$

$\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Виберемо δ_1 і δ_2 з умов $A_0 - \frac{s^2 \delta_1 A_1}{q'} = \frac{A_0}{2}$, $B_0 - \frac{s \delta_2 B_1}{q'} = \frac{B_0}{2}$. Тоді з (17) одержимо нерівність

$$F_s(\xi) + \mathcal{E}_s(\xi) \leq \mu_1 \left[E_{s-q}(\xi) + \int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} |u|^q (x_k - \xi)^{s-q} dz dt \right], \quad (18)$$

де стала μ_1 залежить від A_0 , A_1 , B_0 , B_1 , q , k .

На підставі леми A.1 [24]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n \cap \{x_k > \xi\}} |u|^q (x_k - \xi)^{s-q} dz \leq \mu_2 \left(\int_{\mathbb{R}^n \cap \{x_k > \xi\}} |D_z u|_q^q (x_k - \xi)^{s-q} dz \right)^a \times \\ & \times \left(\int_{\mathbb{R}^n \cap \{x_k > \xi\}} |u|^2 (x_k - \xi)^{s-q} dz \right)^{(1-a)/2}, \end{aligned} \quad (19)$$

причому стала μ_2 залежить від n, q . Інтегруючи (19) за змінною t на проміжку $[0, T]$ і застосовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$\int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} |u|^q (x_k - \xi)^{s-q} dz dt \leq T^{1-a} [E_{s-q}(\xi)]^a [F_{s-q}(\xi)]^{(1-a)q/2}. \quad (20)$$

Крім того, на підставі нерівності Гельдера і нерівності Харді [24, лема А.2] праву частину (17) можна оцінити виразом

$$\mu_3 \int_{Q_T} (|D_x^2 u|_q^q + |D_z u|_q^q) \rho dz dt.$$

Тому з (17) матимемо оцінку

$$F_s(\xi) \leq \mu_4 \mathcal{E}_f(\xi). \quad (21)$$

Сталі μ_3, μ_4 залежать від A_0, A_1, B_0, B_1, q, n . Оскільки $E_s(\xi) \leq \mathcal{E}_s(\xi)$, то згідно з (18), (20), (21) отримаємо

$$\mathcal{E}_s(\xi) \leq \mu_5 \left[\mathcal{E}_{s-q}(\xi) + T^{1-a} (\mathcal{E}_{s-q}(\xi))^{a+(1-a)q/2} \right], \quad (22)$$

де стала μ_5 залежить від A_0, A_1, B_0, B_1, q, n . Зазначимо, що $a + \frac{(1-a)q}{2} \geq 1$ і \mathcal{E}_s спадає при зростанні ξ . Тому існує таке x_k^0 , що

$$(\mathcal{E}_{s-q}(\xi))^{a+(1-a)q/2} \leq \mathcal{E}_s(\xi)$$

для всіх $\xi \geq x_k^0$. Отже, з (22) випливає нерівність

$$\mathcal{E}_s(\xi) \leq \mu_5 (1 + T^{1-a}) \mathcal{E}_{s-q}(\xi), \quad \xi \geq x_k^0. \quad (23)$$

На підставі нерівності Гельдера маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\xi) &\leq \left(\int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} |D_x^2 u|_q^q (x_k - \xi)^s dz dt \right)^{1/s} \left(\int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} |D_x^2 u|_q^q dz dt \right)^{1-1/s} + \\ &+ \left(\int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} |D_z u|_q^q (x_k - \xi)^s dz dt \right)^{1/s} \left(\int_{Q_T \cap \{x_k > \xi\}} |D_z u|_q^q dz dt \right)^{1-1/s} \leq \\ &\leq 2 [\mathcal{E}_s(\xi)]^{1/s} [\mathcal{E}_0(\xi)]^{1-1/s}. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогічно одержимо нерівність

$$\mathcal{E}_{s-q}(\xi) \leq 2 [\mathcal{E}_s(\xi)]^{1-q/s} [\mathcal{E}_0(\xi)]^{q/s}. \quad (25)$$

Отже, враховуючи (25), з (23) матимемо оцінку

$$\mathcal{E}_s(\xi) \leq 2\mu_5 (1 + T^{1-a}) [\mathcal{E}_s(\xi)]^{1-q/s} [\mathcal{E}_0(\xi)]^{q/s},$$

тобто

$$\mathcal{E}_s(\xi) \leq [2\mu_5(1 + T^{1-a})]^{s/q} \mathcal{E}_0(\xi). \quad (26)$$

Тоді на підставі (26) з (24) одержимо

$$\mathcal{E}_1(\xi) \leq \mu_6(1 + T^{1-a})^{1/q} \mathcal{E}_0(\xi), \quad (27)$$

де $\mu_6 = 2(2\mu_5)^{1/q}$.

Оскільки $\mathcal{E}'_1(\xi) = -\mathcal{E}_0(\xi)$, то (27) набуває вигляду

$$\mathcal{E}'_1(\xi) \leq -\frac{1}{\mu_6(1 + T^{1-a})^{1/q}} \mathcal{E}_1(\xi),$$

звідки

$$\mathcal{E}_1(\xi) \leq \mathcal{E}_1(x_k^0) \exp \left[\frac{\xi - x_k^0}{\mu_6(1 + T^{1-a})^{1/q}} \right], \quad \xi \geq x_k^0. \quad (28)$$

Зазначимо, що $\mathcal{E}_1(\xi) \geq \xi \mathcal{E}_0(\xi)$. Тому, враховуючи (27), з (28) одержимо

$$\xi \mathcal{E}_0(\xi) \leq \mu_6(1 + T^{1-a})^{1/q} \mathcal{E}_0(x_k^0) \exp \left[\frac{\xi - x_k^0}{\mu_6(1 + T^{1-a})^{1/q}} \right], \quad \xi \geq x_k^0.$$

Вибираючи $\xi \geq \max \{(1 + T^{1-a})^{1/q}; x_k^0\}$, отримуємо твердження теореми. Зокрема, якщо $p = q = 2$, то $x_k^0 = S_k(T)$.

-
1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133. – N 1. – С. 40-43.
 2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\vec{2b}$ -параболічних і $\vec{2b}$ -еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера // Доп. АН УРСР. – 1964. – N 8. – С. 1010-1013.
 3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., 1964.
 4. *Матійчук М. І., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини // Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.
 5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\vec{2b}$ -параболические системы // Труды семинара по функциональному анализу. – Киев, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.
 6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $\vec{2b}$ -параболические граничные задачи // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – N 12. – С. 2212-2222.
 7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$ -параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 4. – С. 500-506.
 8. *Березан Л. П., Ивасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С. 7-12.
 9. *Березан Л. П., Ивасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\vec{2b}$ -параболічні системи // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С. 73-76.
 10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ, 1999.

11. Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18-22.
12. Пасічник Г. С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $2\vec{b}$ -параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140-151.
13. Пасічник Г. С. Про розв'язність задачі Коші для $2\vec{b}$ -параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42. – N 3. – С. 61-65.
14. Березан Л. П. Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $2\vec{b}$ -параболічної системи // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 46. Математика. – Чернівці, 1999. – С. 13-18.
15. Березан Л. П. Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$ -параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 5-10.
16. Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про задачу Коші для $2\vec{b}$ -параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – Т. 52. – N 11. – С. 1484-1496.
17. Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Зб. наук. праць. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 82-91.
18. Івасишен С. Д., Кондур О. С. Про матрицю Гріна задачі Коші та характеристику деяких класів розв'язків для $2\vec{b}$ -параболічних систем довільного порядку // Мат. студії. – 2000. – Т. 14. – N 1. – С. 73-84.
19. Балабушенко Т. М. Оцінки фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$ -параболічних систем у необмежених відносно часової змінної областях та їх застосування // Вісник національного ун-ту “Львівська політехніка”. – N 411. Прикладна математика. – 2000. – С. 6-11.
20. Балабушенко Т. М. Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $2\vec{b}$ -параболічних систем // Мат. студії. – 2002. – Т. 17. – N 2. – С. 163-174.
21. Балабушенко Т. М., Івасишен С. Д. Про властивості розв'язків $2\vec{b}$ -параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45. – N 4. – С. 19-26.
22. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 2002.
23. Гаевский Х., Греггер К., Захарнас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978.
24. Bernis F. Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Huston J. Mathem. – 1988. – Vol. 14. – N 3. – P. 319-352.

**ON A SUPPORT OF A SOLUTION CAUCHY PROBLEM
FOR THE NONLINEAR 2B-PARABOLIC EQUATION****Oles' KORKUN, Serhiy LAVRENIUK***Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universitetska Str., 1*

There is considered Cauchy problem for the equation

$$u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha (a_\alpha(z, t, u, D_x u, D_x^2 u)) - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta (b_\beta(z, t, u, D_z u)) + c(z, t, u) = f.$$

Conditions of the existence and uniqueness of a generalized solution and compactness of a support are obtained.

Key words: 2b-parabolic equation, Cauchy problem.

Стаття надійшла до редколегії 03.01.2006

Прийнята до друку 24.10.2007