ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ | VISNYK LVIV UNIV.
Серія мех.-мат. 2009. | Ser. Mech. Math. 2009.
Вип. 70. С. 103–121 | Is. 70. P. 103–121

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ

Сергій ЛАВРЕНЮК, **Галина ТОРГАН**

Львівський національний університет імені Івана Франка, 79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

Розглянуто мішану задачу для рівняння

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i})_{x_i} + b_0(x)u_t -$$
$$-a_0(x)|u|^{p-2}u = 0$$

в обмеженій області. Одержано достатні умови існування локального розв'язку та неіснування глобального розв'язку.

Ключові слова: рівняння типу коливання пластинки, мішана задача.

1. Вступ. У праці [1] доведено існування локального розв'язку та досліджено асимптотичну поведінку розв'язку задачі для нелінійного рівняння пластинки типу Кірхгофа, яке має вигляд

$$u_{tt} + \triangle^2 u + a(x)u_t + f(u) = 0.$$

У лінійному випадку це рівняння добре вивчене. Однак у випадку наявності нелінійних доданків мішані задачі для цього рівняння досліджені недостатньо. У працях [2-12] досліджено умови існування та єдиності глобального розв'язку задачі Коші та мішаних задач для рівняння зазначеного вигляду, досліджено експоненціальне спадання розв'язку нелінійної системи рівнянь балки типу Кірхгофа з пам'яттю і слабким затуханням при t прямуючому до нескінченності, деякі властивості розв'язків рівняння коливань балки.

У праці [13] доведено існування двох нетривіальних розв'язків мішаної задачі для рівняння

$$u_{tt} + u_{xxxx} + b[u]^+ = c,$$

яке моделює коливання корабля.

В останні десятиліття значний інтерес становили дослідження задач для еволюційних рівнянь, розв'язки яких стають необмеженими у скінченний момент часу. У цьому напрямі сьогодні можна знайти сотні статей. Зазначимо лише деякі праці, присвячені дослідженню "вибуховості" розв'язків нелінійних параболічних рівнянь з першою похідною за часом. Це [14-20], у яких, зокрема, можна знайти достатньо повний огляд літератури зі згаданого питання.

У цій праці розглянуто мішану задачу для нелінійного рівняння типу коливання пластинки в обмеженій області. Знайдено деякі достатні умови існування узагальненого розв'язку на часовому інтервалі, довжина якого залежить від початкових збурень, міри області та коефіцієнтів рівняння. Також доведено, що за певних умов глобальний розв'язок задачі не існує.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$. В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} + b_0(x) u_t - a_0(x)|u|^{p-2} u = 0 \quad (1)$$

з початковими умовами

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{S_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{S_T} = 0, \quad (3)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні S_T.

У цій праці використовують такі простори: $L^r((0,T);B)$ ([21, с. 154, 157]), $C((0,T);B)$ ([21, с. 148]), де $r \in [1,+\infty)$, а B – деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ([21, с. 44]); $W_0^{1,r}(\Omega)$, $r \in (1,+\infty)$ ([21, с. 44]).

Нехай $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \in \{1,...,n\}$. Говоритимемо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови (A) і (B), якщо:

(A): $D^\alpha a_{ij}^{sl} \in L^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leqslant 2$, a_i, a_{ix_i}, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $i,j,s,l \in \{1,...,n\}$,

$$a_{ij}^{sl}(x) = a_{sl}^{ij}(x) \text{ майже для всіх } x \in \Omega \text{ і всіх } i,j,s,l \in \{1,...,n\},$$

$$\sum_{i,j,s,l=i}^{n} a_{ij}^{sl}(x)\xi_{ij}\xi_{sl} \geqslant A_0 \sum_{i,j=1}^{n} |\xi_{ij}|^2, \ A_0 = const > 0,$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$ таких, що $\xi_{ij} = \xi_{ji}$,

$$\gamma_0 \leqslant a_i(x) \leqslant \gamma_1, \quad i \in \{1,...,n\},$$

$$\gamma_2 \leqslant a_0(x) \leqslant \gamma_3$$

для майже всіх $x \in \Omega$, $\gamma_0 > 0$, $\gamma_2 > 0$;

(B): $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 < \varrho_0 \leqslant b_0(x) \leqslant \varrho_1$ для майже всіх $x \in \Omega$;

Крім того, нехай параметри p і q задовольняють умову **(P)** :

$$q \in [3,+\infty), \ p \in (q,+\infty) \text{ при } n \in \{1,2\},$$

$$q \in \left[3, \frac{2n}{n-2}\right),\ p \in (q, +\infty) \ \text{ при } \ n \in \{3, 4\},$$

$$q \in [3, 5),\ p \in \left(q, \frac{7q-10}{q}\right] \ \text{ при } \ n = 5.$$

Означення 1. *Функцію $u \in C([0,T_1]; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T_1); W_0^{1,q}(\Omega) \cap L^p(\Omega))$ таку, що $u_t \in C([0,T_1]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty((0,T_1); H_0^2(\Omega))$, $u_{tt} \in L^\infty((0,T_1); L^2(\Omega))$, $|u_{x_i}|^{q-2} u_{tx_i}^2 \in L^\infty((0,T_1); L^1(\Omega))$, $i \in \{1, ..., n\}$ і u задовольняє початкові умови (2) та рівність*

$$\int\limits_{\Omega_t} \Bigg[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$
$$+ b_0(x) u_t v - a_0(x) |u|^{p-2} u v \Bigg] dx = 0 \tag{4}$$

для майже всіх $t \in (0, T_1)$, всіх $T_1 \in [0, T)$ і всіх $v \in H_0^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)) \cap L^p(\Omega)$, називаємо узагальненим розв'язком задачі (1)–(3). Якщо $T = +\infty$, то розв'язок будемо називати глобальним.

Зауваження 1. Легко переконатися, що при $n \leqslant 6$ і $p \leqslant \dfrac{2n-4}{n-4}$ для $n > 4$

$$\int\limits_{\Omega} \left[|u_0|^{2(p-1)} + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}|^{2(q-1)} + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}|^{2(q-1)} |u_{0x_i x_i}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}|^{q-2} |u_{1x_i}|^2 \right] dx < \infty,$$

якщо $u_0 \in H^4(\Omega)$, $u_1 \in H^2(\Omega)$. Для цього достатньо використати теорему вкладення Соболєва ([21, с. 47]).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (B), (P), $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega)$. Тоді знайдеться таке число $T > 0$, що узагальнений розв'язок задачі (1)-(3) існує.*

Доведення. Для доведення існування розв'язку використаємо метод Фаедо-Гальоркіна. Оскільки простір $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ – сепарабельний банахів, то в ньому існує така зліченна множина $\{\omega^k\}$, що будь-яка скінченна кількість елементів цієї множини лінійно незалежна і замикання її лінійної оболонки в $H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ збігається з цим простором. Можемо прийняти, що $\{\omega^k\}$ ортонормована в $L^2(\Omega)$. Розглянемо функції $u^N(x,t) = \sum\limits_{k=1}^N c_k^N(t) \omega^k(x)$, $N = 1, 2...$, де $c_1^N, c_2^N, ... c_N^N$ – розв'язки відповідних задач Коші

$$\int\limits_{\Omega} \Bigg[u_{tt}^N \omega^k + \sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^N \omega_{x_s x_l}^k + \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_{x_i}^N|^{q-2} u_{x_i}^N \omega_{x_i}^k +$$
$$+ b_0(x) u_t^N \omega^k - a_0(x) |u^N|^{p-2} u^N \omega^k \Bigg] dx = 0, \quad t \in [0, T], \tag{5}$$

$$c_k^N(0) = u_{0,k}^N, \quad c_{kt}^N(0) = u_{1,k}^N, \quad k = 1, ..., N, \tag{6}$$

де

$$u_0^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{0,k}^N\omega^k(x),\quad \|u_0^N-u_0\|_{H_0^2(\Omega)\cap H^4(\Omega)}\to 0,$$

$$u_1^N(x)=\sum_{k=1}^{N}u_{1,k}^N\omega^k(x),\quad \|u_1^N-u_1\|_{H_0^2(\Omega)}\to 0 \ \text{ при } \ N\to\infty. \tag{7}$$

На підставі теореми Каратеодорі [22, с. 54] існує розв'язок задачі (5), (6), який має абсолютно неперервну похідну на проміжку $[0,t_N)$. З оцінок, одержаних нижче, випливає, що $t_N=T$, де додатне число T залежить від початкових даних задачі і коефіцієнтів рівняння.

Домножимо (5) на c_{kt}^N, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,T)$. Одержимо рівність

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[u_{tt}^N u_t^N+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^N u_{tx_sx_l}^N+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^N u_{tx_i}^N+$$

$$+b_0(x)|u_t^N|^2-a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N u_t^N\Bigg]dxdt=0. \tag{8}$$

Очевидно,

$$J_1:=\int_{Q_\tau}u_{tt}^N u_t^N dxdt=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}|u_t^N|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}|u_1^N|^2dx.$$

Згідно з умовою (A)

$$J_2:=\int_{Q_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^N u_{tx_sx_l}^N dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}^N u_{x_sx_l}^N dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N u_{0x_sx_l}^N dx\geqslant$$

$$\geqslant\frac{A_0}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{x_ix_j}^N|^2dx-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{0x_ix_j}^N u_{0x_sx_l}^N dx;$$

$$J_3:=\int_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^N u_{tx_i}^N dxdt=\frac{1}{q}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}^N|^q dx-$$

$$-\frac{1}{q}\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{0x_i}^N|^q dx\geqslant\frac{\gamma_0}{q}\int_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}^N|^q dx-\frac{1}{q}\int_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{0x_i}^N|^q dxdt;$$

$$J_4:=\int_{Q_\tau}a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N u_t^N dxdt\leqslant\frac{\gamma_3}{2}\int_{Q_\tau}\left[\delta|u_t^N|^2+\frac{1}{\delta}|u^N|^{2(p-1)}\right]dxdt,\quad \delta>0.$$

На підставі теореми вкладення [21, с. 47] для майже всіх $t \in (0,\tau)$

$$\int\limits_{\Omega_t} |u^N|^{2(p-1)}dx \leqslant C_0\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\Bigg)^{p-1},$$

причому $p \leqslant \dfrac{2n-4}{n-4}$ при $n>4$, C_0 – деяка додатна константа. Отже,

$$J_4 \leqslant \frac{\gamma_3\delta}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt + \frac{\gamma_3 C_0}{2\delta}\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\Bigg)^{p-1}dt.$$

За умовою (B) маємо

$$J_5 := \int\limits_{Q_\tau} b_0(x)|u^N_t|^2dxdt \geqslant \rho_0\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_1 - J_5$, з (8) отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Bigg[\frac{1}{2}|u^N_t|^2 + \frac{A_0}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2 + \frac{\gamma_0}{q}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^q\Bigg]dx + \Big(\rho_0 - \frac{\gamma_3\delta}{2}\Big)\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^2dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_3 C_0}{2\delta}\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\Bigg)^{p-1}dt + F^N, \qquad (9)$$

де

$$F^N = \int\limits_{\Omega_0}\Bigg[\frac{1}{2}|u^N_1|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u^N_{0x_ix_j}u^N_{0x_sx_l} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{0x_i}|^q\Bigg]dx.$$

Нехай $\delta = \dfrac{2\rho_0}{\gamma_3}$. Згідно з умовами на u_0 і u_1 існує таке N_0, що $F^N \leqslant 2F_0$ при $N \geqslant N_0$, де

$$F_0 = \int\limits_{\Omega_0}\Bigg[\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a^{sl}_{ij}(x)u_{0x_ix_j}u_{0x_sx_l} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{0x_i}|^q\Bigg]dx.$$

Тоді з (9) випливає нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx \leqslant \mu_1\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\Bigg)^{p-1}dt + \mu_2, \qquad (10)$$

де $\mu_1 = \dfrac{\gamma_3^2 C_0}{2A_0}$, $\mu_2 = \dfrac{4F_0}{A_0}$.

Застосовуючи до (10) лему Біхарі [23, с. 110], одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx \leqslant \frac{\mu_2}{[1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau]^{1/(p-2)}}.$$

Нехай τ таке, що $1-(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1\tau>0$. Тоді з (9) матимемо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u_t^N|^2+\sum_{i,j=1}^n|u^N_{x_ix_j}|^2+\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^q\Big]dx\leqslant\mu_3, \tag{11}$$

при $\tau\in[0,T_0],\ T_0<\dfrac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1}$.

Отже,

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_0);L^2(\Omega))}\leqslant\mu_3,\ ||u^N||_{L^\infty((0,T_0);H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega))}\leqslant\mu_3. \tag{12}$$

Продиференціюємо за t рівність (5) (це можливо на підставі умов теореми). Будемо мати

$$\int\limits_{\Omega}\Big[u^N_{ttt}\omega^k+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{tx_ix_j}\omega^k_{x_sx_l}+(q-1)\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}u^N_{tx_i}\omega^k_{x_i}+$$
$$+b_0(x)u^N_{tt}\omega^k-(p-1)a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N_t\omega^k\Big]dx=0.$$

Домножимо останню рівність на c^N_{ktt}, підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau\in(0,T_0]$. Матимемо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^N_{ttt}u^N_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{tx_ix_j}u^N_{ttx_sx_l}+(q-1)\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}u^N_{tx_i}u^N_{ttx_i}+$$
$$+b_0(x)|u^N_{tt}|^2-(p-1)a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N_tu^N_{tt}\Big]dxdt=0. \tag{13}$$

Подібно як для $J_1,\ J_2$ маємо

$$J_6:=\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^N_{ttt}u^N_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{tx_ix_j}u^N_{ttx_sx_l}\Big]dxdt\geqslant$$
$$\geqslant\frac12\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^N_{tt}|^2+A_0\sum_{i,j=1}^n|u^N_{tx_ix_j}|^2\Big]dx-\frac12\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u^N_{tt}|^2+\sum_{i,j,s,l=1}^n a_{ij}^{sl}(x)u^N_{1x_ix_j}u^N_{1x_sx_l}\Big]dx.$$

Згідно з умовою (A)

$$J_7:=\frac{q-1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}[(u^N_{tx_i})^2]_tdxdt=\frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2dx-$$
$$-\frac{(q-1)(q-2)}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{x_i}|^{q-3}(u^N_{tx_i})^3\mathrm{sign}(u^N_{tx_i})dxdt-$$
$$-\frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}|u^N_{1x_j}|^2dx\geqslant\frac{(q-1)\gamma_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n|u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2dx-$$

$$-\frac{(q-1)(q-2)\gamma_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{q-3}(u^N_{tx_i})^3dxdt-\frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}|u^N_{1x_j}|^2dx.$$

Нехай $q>3$, тоді

$$J_7^2:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{q-3}|u^N_{tx_i}|^3dxdt\leqslant\frac{(q-3)\delta_1^{\frac{q}{q-3}}}{q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^q dxdt+\frac{3}{q\delta_1^{\frac{q}{3}}}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^q dxdt,$$

де $\delta_1>0$. За теоремою вкладення [21, с. 47]

$$\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^q dxdt\leqslant C_1\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\right)^{q/2}dt,$$

якщо $q\leqslant\dfrac{2n}{n-2}$ і $n>2$ ($q>2$ при $n\in\{1,2\}$).

При $q=3$ маємо

$$J_7:=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{x_i}|[(u^N_{tx_i})^2]_t dxdt=\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{x_i}||u^N_{tx_i}|^2dx-$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)(u^N_{tx_i})^3\mathrm{sign}(u^N_{tx_i})dxdt-\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^N_{0x_i}||u^N_{1x_j}|^2dx\geqslant-\frac{\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^q dx-$$

$$-\frac{2\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_\tau}|u^N_{tx_i}|^q dx-\gamma_1\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{tx_i}|^q dxdt-\frac{\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^q dx-\frac{2\gamma_1}{3}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tx_i}|^q dx.$$

Далі

$$J_8:=(p-1)\int\limits_{Q_\tau}a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N_t u^N_{tt}dxdt\leqslant(p-1)\gamma_3\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{p-2}u^N_t u^N_{tt}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant(p-1)\gamma_3\left[\frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_{tt}|^2dxdt+\frac{q-2}{2q\delta_2^{\frac{2q}{q-2}}}\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{\frac{(p-2)2q}{q-2}}dxdt+\frac{1}{q\delta_2^q}\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^q dxdt\right],\quad\delta_2>0.$$

На підставі теореми вкладення [21, с. 47] і (12)

$$J_8^2:=\int\limits_{Q_\tau}|u^N|^{\frac{(p-2)2q}{q-2}}dxdt\leqslant C_2\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{x_ix_j}|^2dx\right)^{\frac{(p-2)q}{q-2}}dt\leqslant\mu_4,$$

при $\tau\in[0,T_0]$ і $p\leqslant\dfrac{3nq-2n-8q}{nq-4q}$, якщо $n>4$, а також

$$J_8^3:=\int\limits_{Q_\tau}|u^N_t|^q dxdt\leqslant C_3\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\right)^{\frac{q}{2}}dt$$

при $q\leqslant\dfrac{2n}{n-4}$ і $n>4$ (при $n\leqslant4$ маємо $q\geqslant3$).

За умовою (B)

$$J_9 := \int\limits_{Q_\tau} b_0(x)|u^N_{tt}|^2 dxdt \geqslant \rho_0 \int\limits_{Q_\tau} |u^N_{tt}|^2 dxdt.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_6 - J_9$, з (13), отримаємо нерівність (при q>3)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u^N_{tt}|^2 + A_0\sum_{i,j=1}^n |u^N_{tx_ix_j}|^2\right]dx + \frac{(q-1)\gamma_0}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2 dx+$$
$$+\left(\rho_0 - (p-1)\gamma_3\frac{\delta_2^2}{2}\right)\int\limits_{Q_\tau}|u^N_{tt}|^2 dxdt \leqslant \left(\frac{3C_1(q-1)(q-2)\gamma_1}{2q\delta_1^{\frac{q}{3}}} + \frac{(p-1)\gamma_3 C_3}{q\delta_2^q}\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n |u^N_{tx_ix_j}|^2 dx\right)^{\frac{q}{2}} dt + \frac{C_2(q-2)(p-1)\gamma_3}{2q\delta_2^{\frac{2q}{q-2}}}\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^n |u^N_{x_ix_j}|^2 dx\right)^{\frac{(p-2)q}{q-2}} dt+$$
$$+\frac{(q-1)(q-2)(q-3)\gamma_1\delta_1^{\frac{q}{q-3}}}{2q}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u^N_{x_i}|^q dxdt+$$
$$+\int\limits_{\Omega_0}\left[\frac{1}{2}|u^N_{tt}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j,s,l=1}^n u^N_{1x_ix_j}u^N_{1x_sx_l}\right]dx + \frac{q-1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n |u^N_{0x_i}|^{q-2}|u^N_{1x_i}|^2 dx, \qquad (14)$$

$\tau \in [0, T_0]$. Виберемо $\delta_2 = \left[\dfrac{2\rho_0}{\gamma_3(p-1)}\right]^{1/2}$, тоді підінтегральний вираз лівої частини останньої нерівності буде додатним.

Оцінимо $\int\limits_{\Omega_0} |u^N_{tt}|^2 dz$. Домножимо (5) на $c^N_{ktt}(0)$ і підсумуємо за k від 1 до N. Отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u^N_{tt}(0)|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^n (a^{sl}_{ij}(x)u^N_{0x_ix_j})_{x_sx_l}u^N_{tt} - \sum_{i=1}^n (a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}u^N_{0x_i})_{x_i}u^N_{tt} -$$
$$-a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0 u^N_{tt} + b_0(x)u^N_1 u^N_{tt}\Bigg]dx = 0. \qquad (15)$$

Згідно з умовою (A)

$$J_{10} := \int\limits_{\Omega_0}\sum_{i,j,s,l=1}^n (a^{sl}_{ij}(x)u^N_{0x_ix_j})_{x_sx_l}u^N_{tt} dx \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\left[\sum_{i,j,s,l=1}^n (a^{sl}_{ij}(x)u^N_{0x_ix_j})_{x_sx_l}\right]^2 dx - \frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2 dx,$$

де $\delta_3 > 0$;

$$J_{11} := -\int\limits_{\Omega_0}\sum_{i=1}^n (a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}u^N_{0x_i})_{x_i}u^N_{tt} dx \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}u^N_{0x_i})_{x_i}\Big]^2dx-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^N dx;$$

$$J_{12}:=-\int\limits_{\Omega_0}a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0u^N_{tt}dx\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\big[a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0\big]^2dx-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^N dx.$$

З умови (B) будемо мати

$$J_{13}:=\int\limits_{\Omega_0}b_0(x)u^N_1u^N_{tt}dx\geqslant -\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\big[b_0(x)u^N_1\big]^2dx-\frac{\delta_3}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2dx.$$

Враховуючи одержані оцінки інтегралів $J_{10}-J_{13}$, з (15) отримаємо

$$(1-2\delta_3)\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2dx\leqslant\frac{1}{2\delta_3}\int\limits_{\Omega_0}\Bigg(\Big[\sum_{i,j,s,l=1}^{n}(a^{sl}_{ij}(x)u^N_{0x_ix_j})_{x_sx_l}\Big]^2+\Big[b_0(x)u^N_1\Big]^2+$$

$$+\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i(x)|u^N_{0x_i}|^{q-2}u^N_{0x_i})_{x_i}\Big]^2+\Big[a_0(x)|u^N_0|^{p-2}u^N_0\Big]^2\Bigg)dx,$$

де $0<\delta_3<\frac{1}{2}$.

Враховуючи умови на $u_0,\ u_1$ і коефіцієнти рівняння (1), одержимо

$$\int\limits_{\Omega_0}|u^N_{tt}|^2dx\leqslant\mu_5,\tag{16}$$

де μ_5 – деяка константа, яка не залежить від N.

Отож, з (14) одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\leqslant\mu_6+\mu_7\int\limits_0^\tau\Bigg(\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\Bigg)^{q/2}dt,\quad \tau\in[0,T_0],\tag{17}$$

де $\mu_6,\ \mu_7$ - деякі константи, які не залежать від N. До нерівності (17) знову застосуємо лему Біхарі [23, с. 110]

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2dx\leqslant\frac{\mu_6}{\Big[1-\big(\frac{q}{2}-1\big)\mu_6^{q/2-1}\mu_7\tau\Big]^{\frac{1}{q-2}}},\tag{18}$$

де $\tau\in[0,T_1],\ T_1\leqslant T_0$ і $T_1<\dfrac{2}{(q-2)\mu_6^{q/2-1}\mu_7}$. Виберемо δ_1, мінімізуючи добуток $\mu_7\mu_6^{(q-2)/2}$. Тоді на проміжку $[0,T_1],\ T_1<T$ з (14), (16) і (18) одержимо оцінку

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[|u^N_{tt}|^2+\sum_{i,j=1}^{n}|u^N_{tx_ix_j}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u^N_{x_i}|^{q-2}|u^N_{tx_i}|^2\Big]dx\leqslant\mu_8.$$

Зазначимо, що $T = \min\left\{\dfrac{1}{(p-2)\mu_2^{p-2}\mu_1}, \dfrac{2}{(q-2)\mu_7\mu_6^{(q-2)/2}}\right\}$. Отже,

$$||u_t^N||_{L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega))} \leqslant \mu_8,\ ||u_{tt}^N||_{L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega))} \leqslant \mu_8,$$

$$||\,|u_{x_i}^N|^{q-2}|u_{tx_i}^N|^2||_{L^\infty((0,T_1);L^1(\Omega))} \leqslant \mu_8, \tag{19}$$

де стала μ_8 не залежить від N. Аналогічні оцінки одержимо і для $q=3$. На підставі (12), (19) існує підпослідовність $\{u^{N_k}\} \subset \{u^N\}$ така, що

$$u^{N_k} \to u \quad * \text{- слабко в} \quad L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega)\cap W_0^{1,q}(\Omega)),$$

$$u_t^{N_k} \to u_t \quad * \text{- слабко в} \quad L^\infty((0,T_1);H_0^2(\Omega)),$$

$$u_{tt}^{N_k} \to u_{tt} \quad * \text{- слабко в} \quad L^\infty((0,T_1);L^2(\Omega)) \ \text{ при } \ N_k \to \infty. \tag{20}$$

Крім того,

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left|\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^N|^{q-2}u_{x_i}^N\right|^{q'} dxdt \leqslant \mu_9,$$

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \left|a_0(x)|u^N|^{p-2}u^N\right|^{p'} dxdt \leqslant \mu_{10}.$$

Тому

$$\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^{N_k}|^{q-2}u_{x_i}^{N_k} \to \chi_1 \ \text{ слабко в } \ L^{q'}(Q_{T_1}),$$

$$a_0(x)|u^{N_k}|^{p-2}u^{N_k} \to \chi_0 \ \text{ слабко в } \ L^{p'}(Q_{T_1}).$$

Зазначимо, що послідовність $\{u^N\}$ обмежена в $L^q((0,T_1);H_0^2(\Omega))$, а послідовність $\{u_t^N\}$ обмежена в $L^q((0,T_1);L^2(\Omega))$. Оскільки $H_0^2(\Omega) \subset W_0^{1,q}(\Omega)$ компактно при $q \in \left[3, \dfrac{2n}{n-2}\right)$, $n \in \{3,4,5\}$ і при $q \in [3,+\infty)$, $n \in \{1,2\}$, то на підставі теореми 5.1 [24, с. 70] можемо вважати, що

$$u^{N_k} \to u \ \text{ сильно в } \ L^q((0,T_1);W_0^{1,q}(\Omega))$$

і майже всюди в Q_{T_1}. Тому

$$\chi_1 = \sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}.$$

Аналогічно, враховуючи те, що за умовою теореми (при вибраних параметрах p і n) $H_0^2(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ компактно, одержимо рівність

$$\chi_0 = a_0(x)|u|^{p-2}u$$

майже всюди в Q_{T_1}. Крім того, для функції u виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{q-2}|u_{tx_i}|^2 dx \leqslant \mu_{11}$$

майже для всіх $t \in [0, T_1]$. Отож,

$$\int\limits_{\Omega_t} \Big[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} +$$

$$+ b_0(x) u_t v - a_0(x) |u|^{p-2} u v \Big] dx = 0 \qquad (21)$$

майже для всіх $t \in (0, T_1)$, всіх $T_1 \in (0, T)$ і всіх $v \in H_0^2(\Omega)$.

Залишилося показати, що виконуються початкові умови. Підставимо в (21) $v = v(x,t)$, $v \in C^2([0, T_1]; H_0^2(\Omega))$, $v(x, T_1) = 0$, $v_t(x, T_1) = 0$. Очевидно, що

$$\int\limits_{Q_{T_1}} u_{tt} v dx dt = \int\limits_{\Omega_t} u_t v dx \Big|_0^{T_1} - \int\limits_{Q_{T_1}} u_t v_t dx dt = - \int\limits_{\Omega_0} u_t(x,0) v(x,0) dx - \int\limits_{\Omega_t} u v_t dx \Big|_0^{T_1} +$$

$$+ \int\limits_{Q_{T_1}} u v_{tt} dx dt = - \int\limits_{\Omega_0} u_t v dx + \int\limits_{\Omega_0} u v_t dx + \int\limits_{Q_{T_1}} u v_{tt} dx dt.$$

Будемо мати

$$\int\limits_{Q_{T_1}} \Big[u v_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} + b_0(x) u_t v -$$

$$- a_0(x) |u|^{p-2} u v \Big] dx dt = \int\limits_{\Omega_0} u_t v dx - \int\limits_{\Omega_0} u v_t dx. \qquad (22)$$

Домножимо (5) на $d_k^{N_0} \in C^2([0, T_1])$, $d_k^{N_0}(T_1) = 0$, $d_{kt}^{N_0}(T_1) = 0$. Отриману рівність підсумуємо за k від 1 до N і проінтегруємо за t від 0 до τ, де $\tau \in (0, T_1]$. Позначимо $v^{N_0}(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N_0} d_k^{N_0}(t) \omega^k(x)$. Одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[u^{Nk} v_{tt}^{N_0} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j}^{N_k} v_{x_s x_l}^{N_0} + b_0(x) u_t^{N_k} v^{N_0} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} -$$

$$- a_0(x) |u^{N_k}|^{p-2} u^{N_k} v^{N_0} \Big] dx dt = \int\limits_{\Omega_0} u_1^{N_k} v^{N_0} dx - \int\limits_{\Omega_0} u_0^{N_k} v_t^{N_0} dx.$$

В останній рівності перейдемо до границі при $N_k \to \infty$, $N_k > N_0$. Сукупність всіх v^{N_0} позначимо через $\mathbb{M}_N$. Оскільки $\bigcup \mathbb{M}_N$ щільне в $H_0^2(Q_{T_1}) \cap$ $\cap L^p((0, T_1); W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^q(Q_{T_1})$, то можемо перейти до границі і при $N_0 \to \infty$. Одержимо рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[u v_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_l} + b_0(x) u_t v + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i} v_{x_i} -$$

$$- a_0(x) |u|^{p-2} u v \Big] dx dt = \int\limits_{\Omega_0} u_1 v dx - \int\limits_{\Omega_0} u_0 v_t dx, \qquad (23)$$

яка виконується для довільного $v \in C^2([0,T_1]; H_0^2(\Omega))$. Віднявши від (22) рівність (23), матимемо

$$\int\limits_{\Omega_0} (u_t - u_1) v(x,0) dx - \int\limits_{\Omega_0} (u - u_0) v_t(x,0) dx = 0. \tag{24}$$

Нехай

$$v(x,t) = w(x)(T_1 - t)^2 t, \qquad w \in H_0^2(\Omega).$$

Тоді

$$v_t(x,t) = -2w(x)(T_1 - t)t + w(x)(T_1 - t)^2, \quad v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = w(x)T_1^2.$$

Оскільки w – довільне, то з (24) одержимо, що

$$u_t(x,0) = u_1(x).$$

Аналогічно, взявши $v(x,t) = w(x)(1 - t^2)$, з (24) отримуємо, що

$$u(x,0) = u_0(x).$$

□

Зауваження 2. Функція

$$g(t) := \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q dx \in C([0,T_1])$$

при виконанні теореми 1. Справді,

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q \right)_t dx = q \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-1} u_{tx_i} \operatorname{sign}(u_{x_i}) dx.$$

Але

$$\int\limits_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^{q-1} u_{tx_i} \operatorname{sign}(u_{x_i}) \right| dx \leqslant \frac{\gamma_1}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left[|u_{x_i}|^q + |u_{x_i}|^{q-2} |u_{tx_i}|^2 \right] dx \leqslant \mu_{12}$$

майже для всіх $t \in (0,T_1)$. Отже, $g \in C([0,T_1])$. Крім того, $u_t \in C([0,T_1]; L^2(\Omega))$, $u \in C([0,T_1]; H_0^2(\Omega))$, $\int\limits_{\Omega} a_0(x) |u|^{p-2} u dx \in C([0,T_1])$.

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left[|u_t|^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} \right] dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega_t} \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - \frac{1}{p} a_0(x) |u|^p \right] dx. \tag{25}$$

Теорема 2. *Нехай виконується умова (A) і, крім того, $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leqslant b_0(x) \leqslant \rho_1$ майже для всіх $x \in \Omega$, $p > q > 2$, причому $p \leqslant \dfrac{2n}{n-4}$, якщо $n > 4$, $E(0) = -\lambda < 0$. Тоді не існує глобального узагальненого розв'язку задачі (1)-(3).*

Доведення. Припустимо, що існує глобальний узагальнений розв'язок u задачі (1)-(3). Спочатку покажемо, що $E(t)<0$ для всіх $t>0$. Продиференціюємо рівність (25) за t. Зазначимо, що на підставі означення узагальненого розв'язку та зауваження 2, похідна E' існує майже для всіх $t\in(0,T)$. Отже,

$$E'(t)=\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_tu_{tt}+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}\Big]dx+$$
$$+\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}u_{tx_i}-a_0(x)|u|^{p-2}uu_t\Big]dx. \tag{26}$$

Приймемо в (4) $v=u_t$

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u_t+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx_l}+b_0(x)|u_t|^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2}u_{x_i}u_{tx_i}-a_0(x)|u|^{p-2}uu_t\Big]dx=0. \tag{27}$$

Віднявши рівності (26) і (27), одержимо

$$E'(t)=-\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)u_t^2dx\leqslant 0$$

майже для всіх $t>0$. Оскільки $E(0)<0$, то $E(t)<0$ для всіх $t>0$.

Введемо

$$H(t)=-E(t),\quad L(t)=[H(t)]^{1-\alpha}+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}uu_tdx,\quad \varepsilon>0,\quad \alpha\in(0,1).$$

Тоді

$$L'(t)=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_t^2+uu_{tt}\Big]dx.$$

Але правильна рівність (4) з $v=u$

$$\int\limits_{\Omega_t}\Big[u_{tt}u+\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}|^{q}+b_0(x)uu_t-a_0(x)|u|^{p}\Big]dx=0,$$

тому

$$L'(t)=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)u_t^2dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\Big[u_t^2-\sum_{i,j,s,l=1}^{n}a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}|^{q}+a_0(x)|u|^{p}-b_0(x)uu_t\Big]dx.$$

Очевидно

$$-\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)uu_tdx\geqslant-\frac{\delta_4}{2}\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)u_t^2dx-\frac{1}{2\delta_4}\int\limits_{\Omega_t}b_0(x)u^2dx=$$

$$= -\frac{1}{4\delta_5} H^{-\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u_t^2 dx - \delta_5 H^{\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u^2 dx$$

при $\delta_5 > 0,\ \delta_4 = \dfrac{H^{-\alpha}(t)}{2\delta_5}$. Розглянемо інтеграл

$$J_{14} := \delta_5 H^{\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u^2 dx.$$

Оскільки

$$H(t) \leqslant \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_t} a_0(x) |u|^p dx,$$

тому

$$J_{14} \leqslant \rho_1 \delta_5 \left(\frac{\gamma_3}{p} \right)^{\alpha} \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\alpha} \int\limits_{\Omega_t} u^2 dx \leqslant \rho_1 \delta_5 \left(\frac{\gamma_3}{p} \right)^{\alpha} (\mathrm{mes}\, \Omega)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{\chi}{p}},$$

де $\chi = 2 + \dfrac{\alpha}{p}$. Виберемо α з умови $\chi \leqslant p$. Якщо $\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \geqslant 1$, то

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{\chi}{p}} \leqslant \int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx.$$

Нехай $\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx < 1$. Тоді, враховуючи умову на p,

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{\chi}{p}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{2}{p}} \leqslant \mu_{13} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mu_{13}}{A_0} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx,$$

де μ_{13} – стала з теореми вкладення Соболєва [21. С. 47].

Отже,

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx \right)^{\frac{\chi}{p}} \leqslant \int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx + \frac{\mu_{13}}{A_0} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx \tag{28}$$

і

$$-J_{14} \geqslant \delta_5 \mu_{14} \int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx - \delta_5 \mu_{15} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx,$$

причому $\mu_{14} = \rho_1 \left(\dfrac{\gamma_3}{p} \right)^{\alpha} (\mathrm{mes}\, \Omega)^{(p-2)/p}$, $\mu_{15} = \dfrac{\mu_{14}\mu_{13}}{A_0}$. Отож,

$$L'(t) \geqslant \left(1 - \alpha - \frac{\varepsilon}{4\delta_5}\right) H^{-\alpha}(t) \int\limits_{\Omega_t} b_0(x) u_t^2 dx - \delta_5 \varepsilon \mu_{15} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx -$$

$$- \delta_5 \varepsilon \mu_{14} \int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - a_0(x)|u|^p - u_t^2 \right] dx. \tag{29}$$

Нехай $\varepsilon \leqslant 4(1-\alpha)\delta_5$. Додамо до правої частини (29) $\delta_6 \varepsilon H(t) - \delta_6 \varepsilon H(t)$, де $\delta_6 > 0$. Тоді

$$L'(t) \geqslant \delta_6 \varepsilon H(t) + \frac{\delta_6 \varepsilon}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} \right] dx + \delta_6 \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - \right.$$

$$\left. - \frac{a_0(x)}{p} |u|^p \right] dx - \frac{\varepsilon \delta_5 \mu_{14}}{\gamma_2} \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx - \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[(\delta_5 \mu_{15} + 1) \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} - a_0(x)|u|^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) |u_{x_i}|^q - u_t^2 \right] dx = \delta_6 \varepsilon H(t) + \varepsilon \left(\frac{\delta_6}{2} + 1 \right) \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \varepsilon \left(\frac{\delta_6}{q} - 1 \right) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^q dx +$$

$$+ \varepsilon \left(1 - \frac{\delta_6}{p} - \frac{\delta_5 \mu_{14}}{\gamma_2} \right) \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx + \varepsilon \left(\frac{\delta_6}{2} - \delta_5 \mu_{15} - 1 \right) \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx.$$

Нехай $q < \delta_6 < p$. Тоді існують такі $\delta_5 > 0$ і $\delta_7 \in (0,1)$, що виконуються нерівності

$$\frac{\delta_6}{q} - 1 \geqslant \delta_7, \qquad 1 - \frac{\delta_6}{p} - \frac{\delta_5 \mu_{13}}{\gamma_2} \geqslant \delta_7, \qquad \frac{\delta_6}{2} - \delta_5 \mu_{15} - 1 \geqslant \delta_7.$$

Отже,

$$L'(t) \geqslant \varepsilon \delta_7 \left[H(t) + \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx + \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx \right]. \tag{30}$$

Розглянемо $[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Маємо

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mu_{16} \left(H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} \left| \int\limits_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right), \quad \mu_{16} = 2^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Очевидно

$$\left| \int\limits_{\Omega} u u_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left(\int\limits_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{r_0} \left(\int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx \right)^{\frac{r_0}{2(1-\alpha)}} + \frac{1}{r_1} \left(\int\limits_{\Omega_t} u^2 dx \right)^{\frac{r_1}{2(1-\alpha)}},$$

де $r_0 = 2(1-\alpha) > 1,\ r_1 = \dfrac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$ при $\alpha < \dfrac{1}{2}$.
Тоді

$$\left|\int\limits_{\Omega_t} u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \frac{1}{r_0}\int\limits_{\Omega_t} |u_t|^2 dx + \frac{1}{r_1}\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}},$$

$$\left|\int\limits_{\Omega} u^2 dx\right|^{\frac{1}{1-2\alpha}} \leqslant (\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\left(\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx\right)^{\frac{2}{p(1-2\alpha)}}.$$

Аналогічно до (28) одержуємо оцінку

$$\left(\int\limits_{\Omega_t} u^2 dx\right)^{\frac{2}{p(1-2\alpha)}} \leqslant \mu_{17}\int\limits_{\Omega_t} |u|^p dx + \mu_{18}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j=1}^{n} u^2_{x_i x_j} dx$$

при $\dfrac{2}{1-2\alpha} \leqslant p$, де $\mu_{17},\ \mu_{18}$ – залежать від n і Ω. Отож,

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mu_{16}\Bigg[H(t) + \frac{1}{r_0}\int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{17}}{r_1\gamma_2}\int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx +$$

$$+\frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{18}}{r_1 A_0}\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx\Bigg],$$

оскільки можемо прийняти, що $\varepsilon < 1$. Нехай

$$\mu_{19} = \max\left\{1;\quad \frac{1}{r_0};\quad \frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{17}}{r_1\gamma_2};\quad \frac{(\mathrm{mes}\,\Omega)^{\frac{p-2}{p(1-2\alpha)}}\mu_{18}}{r_1 A_0}\right\}.$$

Тоді

$$[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leqslant \mu_{16}\mu_{19}\Bigg[H(t) + \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega_t}\sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_l} dx\Bigg]. \tag{31}$$

Врахувавши нерівності (30) і (31), одержимо

$$L'(t) \geqslant \mu_{20}[L(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{32}$$

де $\mu_{20} = \dfrac{\varepsilon\delta_7}{\mu_{16}\mu_{19}}$. Крім того, $L(0) = [H(0)]^{1-\alpha} + \varepsilon\int\limits_{\Omega_0} u_0 u_1 dx$. Оскільки $H(0) = \lambda > 0$, то зменшивши у разі потреби ε можемо вважати, що $L(0) \geqslant \left(\dfrac{\lambda}{2}\right)^{1-\alpha} > 0$.

Нехай $\sigma = \dfrac{1}{1-\alpha}$ $(\sigma > 1)$. Тоді нерівність (32) можемо записати у вигляді

$$\frac{dL}{L^\sigma} \geqslant \mu_{20}. \tag{33}$$

Проінтегруємо обидві частини нерівності (33) від 0 до t. Будемо мати

$$L^{\sigma-1}(t) \geqslant \frac{1}{L^{1-\sigma}(0) - \mu_{20}t(\sigma-1)}. \tag{34}$$

Оскільки

$$H(t) \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega_t} a_0(x)|u|^p dx,$$

то врахувавши нерівності (31) і (34), одержимо таке: існує скінченне $T > 0$, для якого

$$\lim_{t\to T-0}\int\limits_{\Omega_t}\left[u_t^2 + |u|^p + \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j}^2\right]dx = +\infty.$$

Одержане протиріччя завершує доведення теореми. □

1. *Jaime E. Muñoz Rivera.* Smoothing Effect and Propagations of Singularities for Viscoelastic Plates / *Jaime E. Muñoz Rivera, Luci Harue Fatori.* // Journal of mathematical analysis and applications. – 1997. – Vol. 206. – P. 397-427.
2. *Похожаев С.И.* О краевых задачах для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений / *Похожаев С.И.* // Математический сборник. – 1975. – Т. 96, №1. – С. 152-166.
3. *Максудов Ф.Г.* Об одной задаче для нелинейного гиперболического уравнения высокого порядка с диссипациями на границе области / *Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А.* // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 321, №4. – С. 673-676.
4. *Максудов Ф.Г.* Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении / *Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А.* // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 300, №6. – С. 1312-1315.
5. *Максудов Ф.Г.* Исследование многомерной смешанной задачи для одного класса нелинейных гиперболических уравнений / *Максудов Ф.Г., Худавердиев Ф.К.* // Докл. АН СССР. – 1990. – Т. 310, №3. – С. 539-542.
6. *Yoshida Norio.* On the zeros of solutions of beam equations / *Yoshida Norio.* // Ann. mat. pura ed appl. – 1988. – Vol. 151. – P. 389-398.
7. *Narazaki Takashi.* Global classical solutions of semilinear evolution equation / *Narazaki Takashi.* // Saitama Math. J. – 1986. – Vol. 4. – P. 11-34.
8. *Tsutsumi Masayoshi.* On the global solution of a certain nonlinear partial differential equations / *Tsutsumi Masayoshi, Lino Riichi.* // Proc. Japan. Acad. – 1969. – Vol. 45, №6. – P. 466-469.
9. *Ramos Oswaldo Ch.* Regularity property for the nonlinear beam operator / *Ramos Oswaldo Ch.* // Ann. Acad. bras. ciena. – 1989. – Vol. 61, №1 – P. 15-25.
10. *Nakao Mitsuhiro.* Global existence of classical solutions to the initial-boundary value problem of the semilinear wave equations with a degenerate dissipative term / *Nakao Mitsuhiro.* // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. – 1990. – Vol. 15, №2 – P. 115-140.
11. *Pecher Hartmut.* Existenzsatze fur regular Losungen semilinearer Wellengleichungen / *Pecher Hartmut.* // Nachr. Akad. Wiss. Gottingen. 2. Math.-Phys. KL. – 1979. – Vol. 7. – P. 129-151.
12. *Santos M.L.* Global solutions and exponential decay for a nonlinear coupled system of beam equations of Kirchhoff type with memory in a domain with moving boundary / *Santos M.L., Soares U.R.* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. – 2007. – Vol. 9. – P. 1-24.

13. *Micheletti A.M.* Multiple Nontrivial Solutions for a Floating Beam Equation via Critical Point Theory / *Micheletti A.M., Saccon C.* // Jurnal of Differential Equations. – 2001. – Vol. 170. – P. 157-179.
14. *Shishkov A.E.* Boundary blow-up for energy solutions of general multidimensional parabolic equations / *Shishkov A.E.* // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1998. – Vol. 8. – P. 229-237.
15. *Шишков А.Е.* Граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений в многомерных областях / *Шишков А.Е., Щелков А.Г.* // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, №3. – С. 129-160.
16. *Шишков А.Е.* Локализованные граничные режимы с обострением для общих квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка / *Шишков А.Е.* // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова. – 2002. – Т. 236. – С. 354-370.
17. *Shishkov A.E.* Saint-Venant principle in blow-up for higher order quasilinear parabolic equations / *Shishkov A.E., Galaktionov V.A.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2003. – Vol. 133 (A). – P. 1075-1119.
18. *Galaktionov V.A.* Boundary blow-up localization for higher-order quasilinear parabolic equations: Hamilton-Jacobi asymptotics / *Galaktionov V.A., Shishkov A.E.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2003. – Vol. 133 (A). – P. 1075-1119.
19. *Shishkov A.E.* Structure of boundary blow-up for higher order quasilinear parabolic PDE / *Shishkov A.E., Galaktionov V.A.* // Proc. Roy. Soc. London. A – 2004. – Vol. 460. – P. 3299-3325.
20. *Shishkov A.E.* Self-similar boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations / *Shishkov A.E., Galaktionov V.A.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 2005. – Vol. 135 (A). – P. 1195-1227.
21. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* – М., 1978.
22. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных краевых задач / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М., 1958.
23. *Демидович Б.П.* Леции по математической теории устойчивости / *Демидович Б.П.* – М., 1967.
24. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.

AN INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PLATE TYPE EQUATION

$\boxed{\text{Serhij LAVRENYUK}}$, Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

In the article there is considered the initial boundary value problem for the equation

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} + b_0(x) u_t -$$

$$-a_0(x)|u|^{p-2} u = 0$$

in a bounded domain. There obtained sufficient conditions the existence of a local solution and the nonexistence of a global solution.

Key words: plate type equation, mixed problem.

СМЕШАНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ

Сергей ЛАВРЕНЮК, **Галина ТОРГАН**

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: torgan_g@yahoo.com

Рассмотрена смешаная задача для уравнения

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_l} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x)|u_{x_i}|^{q-2} u_{x_i})_{x_i} + b_0(x) u_t -$$

$$-a_0(x)|u|^{p-2} u = 0$$

в ограниченной области. Получены достаточные условия существования локального решения и несуществование глобального решения.

Ключевые слова: уравнение типа колебания пластинки, смешаная задача.

Стаття надійшла до редколегії 27.03.2009

Прийнята до друку 12.06.2009