ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2009.
Вип. 70. С. 52–67
VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2009.
Is. 70. P. 52–67

УДК 517.95

СИСТЕМИ ЕЛІПТИЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З АНІЗОТРОПНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Олена ДОМАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000, Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: olena.domanska@gmail.com

Доведено однозначну розв'язність систем еліптичних варіаційних нерівностей, які містять степеневі нелінійності та їхні показники нелінійності стосовно різних похідних різні і змінні. У цьому разі не накладаються умови на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності.

Ключові слова: нелінійний оператор, варіаційна нерівність, узагальнений простір Лебега-Соболєва, необмежена область.

1. Вступ. Модельним прикладом задач, які ми розглядаємо, є такий: знайти вектор-функцію $u = (u_1, \ldots, u_N)$ з простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ (означення цього простору подано пізніше), $u \geqslant 0$, яка задовольняє інтегральну нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |u_{j,x_i}|^{p_{ij}(x)-2} u_{j,x_i} \, (w_j\,(v_j - u_j))_{x_i} + a_{0j} |u|^{p_{0j}(x)-2} u_j \, w_j\,(v_j - u_j) -$$

$$- f_j \, w_j\,(v_j - u_j) \Big\}\, dx \geqslant 0, \qquad (1)$$

для довільних $v = (v_1, \ldots, v_N) \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $v \geqslant 0$, та $w = (w_1, \ldots, w_N) \in \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^N$, $w \geqslant 0$, $\operatorname{supp} w_j$ $(j = \overline{1,N})$ – обмежена множина, у припущенні, що Ω – необмежена область в $\mathbb{R}^n$, $a_{ij} > 0$ – деякі сталі, $p_{ij}(x) > 1$, $x \in \Omega$ $(i = \overline{0,n}, \quad j = \overline{1,N})$, f_j $(j = \overline{1,N})$ – задані на Ω функції.

Варіаційні еліптичні нерівності в необмежених областях розглядали у працях [2]-[7]. В [2, 3] доведено існування та єдиність розв'язків варіаційних нерівностей з нелінійним еліптичним оператором вищого порядку в зіркоподібних областях, у цьому разі накладаються умови на поведінку розв'язку та зростання вихідних даних на нескінченності. У [4] доведено існування та єдиність розв'язку деякої варіаційної нерівності з квазілінійним еліптичним оператором четвертого порядку, що містить сталі степеневі нелінійності в молодших членах, і вихідні дані можуть необмежено зростати на нескінченності, а розв'язок єдиний без вимог на його поведінку на нескінченності. У [5] такий результат отримано для систем квазілійних варіаційних нерівностей другого порядку, що узагальнюють (1) при $p_{0j}(x) = p(x) > 2$, $p_{ij}(x) = 2$ $(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N})$, а у праці [6] для деякого класу квазілінійних варіаційних нерівностей вищого порядку. У [7] доведено коректність нелінійних еліптичних нерівностей без умов на нескінченності, модельним прикладом яких є (1) при $N = 1$, $p_{01}(x) \geqslant 2$, $1 < p_{i1}(x) \leqslant 2$ $(i = \overline{1,n})$. Мета нашої праці – провести узагальнення результатів праці [7] на випадок системи варіаційних нерівностей.

2. Основні позначення. Через $\mathbb{R}^k$, де $k \in \mathbb{N}$, позначатимемо лінійний простір, складений із елементів вигляду $x = (x_1, \ldots, x_k)$, де $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$, з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$. Якщо $v(z)$, $z \in \widetilde{D} \subset \mathbb{R}^k$, – яка-небудь функція, то під $v|_D$ розумітиметься її звуження на множину $D \subset \widetilde{D}$.

Нехай $n \geqslant 2$ – натуральне число, Ω – необмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $0 \in \Omega$. Для довільного $R > 0$ позначимо через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x : |x| < R\}$ таку, що $0 \in \Omega_R$.

Нехай r – функція з простору $L_\infty(\Omega)$ така, що $r(x) \geqslant 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Для будь-якого $R > 0$ на лінійному просторі $C(\overline{\Omega_R})$ (неперервних на $\overline{\Omega_R}$ функцій) введемо норму $\|v\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\lambda > 0 : \rho_{r,R}(v/\lambda) \leqslant 1\}$, де $\rho_{r,R}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_R} |v(x)|^{r(x)}\, dx$, і поповнення цього простору за введеною нормою, яке називається *узагальненим простором Лебега*, позначимо через $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ (див., наприклад, [8]). Очевидно, що $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є лінійним підпростором простору $L_1(\Omega_R)$. Під $L_{r(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо замикання простору $C(\overline{\Omega})$ за топологією, породженою системою півнорм: $\|\cdot\|_{L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R > 0$.

Якщо X – банахів (топологічний) простір, то через $(X)^N$ позначатимемо декартів степінь X, наділений відповідною нормою (топологією), і елементи якого записують у вигляді вектор-стовпчиків. Для довільних елементів $u, v \in (X)^N$ позначатимемо через uv добуток Адамара, тобто $uv \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{colon}(u_1v_1, \ldots, u_Nv_N)$.

Під $\mathbb{P}$ розумітимемо множину матричних функцій $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$, $p_k = \operatorname{colon}(p_{k1}, \ldots, p_{kN})$ $(k = \overline{0,n})$ таких, що $p_{kj} \in L_\infty(\overline{\Omega})$ і $p_{kj}(x) > 1$ $(k = \overline{0,n}, j = \overline{1,N})$ для майже всіх $x \in \Omega$. Якщо $p \in \mathbb{P}$, то через $p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots, p_N^*)$, $p_k^* = \operatorname{colon}(p_{k1}^*, \ldots, p_{kN}^*)$ $(k = \overline{0,n})$ позначатимемо матричну функцію таку, що $\frac{1}{p_{kj}(x)} + \frac{1}{p_{kj}^*(x)} = 1$ $(k = \overline{0,n},\ j = \overline{1,N})$ для майже всіх $x \in \Omega$ (очевидно, що $p^* \in \mathbb{P}$). Для кожного $R > 0$ під $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ розумітимемо банахів простір, отриманий поповненням простору $\big(C^1(\overline{\Omega_R})\big)^N$ за нормою

$$\|v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \|\partial_i v_j\|_{L_{p_{ij}(\,\cdot\,)}(\Omega_R)},$$

де $\partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial/\partial x_i$ $(i = \overline{1,n})$, $\partial_0 v = v$. Очевидно, що $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ є підпростором простору $\big\{v(x),\ x \in \Omega_R :\ \partial_i v_j \in L_{p_{ij}(\,\cdot\,)}(\Omega_R)\ (i = \overline{0,n}, j = \overline{1,N})\big\}$.

На просторі $\big(C^1(\overline{\Omega})\big)^N$ введемо топологію лінійного локально опуклого простору за допомогою системи півнорм: $\|\cdot\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}$, $R>0$. Замикання простору $\big(C^1(\overline{\Omega})\big)^N$ за введеною топологією позначимо через $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Очевидно, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ є збіжною до v у цьому просторі, якщо $\|v_k-v\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$ для кожного $R>0$. Зауважимо, що $v\big|_{\Omega_R}\in W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)$ для будь-якого $R>0$, якщо $v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})$ – підпростір простору $C^1(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є обмеженими множинами. Приймемо $C^{1,+}(\overline{\Omega})\overset{\mathrm{def}}{=}\{v\in C^1(\overline{\Omega}) : v\geqslant 0 \text{ на } \Omega\}$, $C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})\overset{\mathrm{def}}{=}\{v\in C^1_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega}) : v\geqslant 0 \text{ на } \Omega\}$.

3. Формулювання задачі та основних результатів. Нехай $p\in\mathbb{P}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину наборів функцій $\{A_{ij}\ :\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{1,N}\}\equiv\{A_{ij}\}$ таких, що для кожних $i\in\{1,\dots,n\}$, $j\in\{1,\dots,N\}$ функція A_{ij} визначена на $\Omega\times\mathbb{R}$, а для кожного $j\in\{1,\dots,N\}$ функція A_{0j} визначена на $\Omega\times\mathbb{R}^N$ і виконуються умови:

1) для майже всіх $x\in\Omega$ функції $A_{ij}(x,\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A_{0j}(x,\cdot):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,N}$) є неперервними, а для будь-яких $\xi\in\mathbb{R}$, $\eta\in\mathbb{R}^N$ функції $A_{ij}(\cdot,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$, $A_{0j}(\cdot,\eta):\Omega\to\mathbb{R}$ ($i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,N}$) – вимірні (умови Каратеодорі);

1′) $A_{ij}(x,0)=0$ ($i=\overline{0,n}, j=\overline{1,N}$) для майже всіх $x\in\Omega$;

2) для майже всіх $x\in\Omega$ виконуються нерівності

$$|A_{0j}(x,\eta)|\leqslant\sum_{k=1}^{N}h_{j\,k}(x)|\eta_k|^{p_{0k}(x)/p^*_{0j}(x)}+h_j(x)\quad\forall\eta\in\mathbb{R}^N,\quad j=\overline{1,N},$$

$$\sum_{j=1}^{N}(A_{0j}(x,\eta^1)-A_{0j}(x,\eta^2))\,(\eta^1_j-\eta^2_j)\geqslant K_0\sum_{j=1}^{N}|\eta^1_j-\eta^2_j|^{p_{0j}(x)}\quad\forall\eta^1,\eta^2\in\mathbb{R}^N,$$

де K_0 – деяка додатна стала, $h_{jk}\in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $h_j\in L_{p^*_{0j}(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ ($j=\overline{1,N}, k=\overline{1,N}$);

3) для кожних $i\in\{1,\dots,n\}$, $j\in\{1,\dots,N\}$ та майже всіх $x\in\Omega$ існує похідна $\partial A_{ij}(x,\,\xi)/\partial\xi$, $\xi\neq0$, і виконуються нерівності

$$K_{ij}|\xi|^{p_{ij}(x)-2}\leqslant\frac{\partial A_{ij}(x,\xi)}{\partial\xi}\leqslant\widetilde{K}_{ij}(1+|x|)^{\sigma_{ij}}|\xi|^{p_{ij}(x)-2},\qquad\xi\neq0,$$

де $K_{ij}>0$, $\widetilde{K}_{ij}>0$, $\sigma_{ij}\geqslant0$ – деякі сталі.

Для кожного $p\in\mathbb{P}$ через $\mathbb{F}_p$ позначатимемо множину, елементами якої є матричні функції $(F_{ij})=(F_0,F_1,\dots,F_n)$, $F_k=\mathrm{colon}(F_{k1},\dots,F_{kN})$ ($k=\overline{0,n}$) такі, що $F_{ij}\in L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ ($i=\overline{0,n}, j=\overline{1,N}$). На $\mathbb{F}_p$ вводиться топологія декартового добутку локально опуклих просторів $L_{p^*_{ij}(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ ($i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,N}$).

Під $\mathbb{O}_p$, де $p\in\mathbb{P}$, розумітимемо множину опуклих замкнених підмножин простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, які містять 0.

Тепер сформулюємо задачу, яку ми далі будемо досліджувати. Нехай $\widetilde{\mathbb{P}}\subset\mathbb{P}$ і для $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ $\widetilde{\mathbb{A}}_p\subset\mathbb{A}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p\subset\mathbb{F}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p\subset\mathbb{O}_p$. Задача $\mathbf{SI}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\ \widetilde{\mathbb{F}}_p,\ \widetilde{\mathbb{O}}_p\ :\ p\in\widetilde{\mathbb{P}}\big)$ (a **s**ystem of variational **i**nequalities) така: для кожного $p\in\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\{A_{ij}\}\in\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F_{ij})\in\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $K\in\widetilde{\mathbb{O}}_p$ знайти множину $\mathbf{SSI}\big(\{A_{ij}\},(F_{ij}),K\big)$ (a **s**et of **s**olutions of **s**ystem of variational

inequalities) функцій $u \in K$ таких, що виконується нерівність

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j)) + A_{0j}(x,u)\, w_j(v_j - u_j) \Big\}\, d\,x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j)) + F_{0j}(x)\, w_j(v_j - u_j) \Big\}\, d\,x \qquad (2)$$

для будь-яких $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$ $(j = \overline{1,N})$ і $v \in K$.

Зауваження 1. Умова $\mathbf{1'}$ не є принциповою (див. [7, с. 4]).

Скажемо, що задача $\mathbf{SI}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p,\, \widetilde{\mathbb{F}}_p,\, \widetilde{\mathbb{O}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ є *розв'язною* (*однозначною*, *однозначно розв'язною*), якщо для кожного $p \in \widetilde{\mathbb{P}}$ і будь-яких $\{A_{ij}\} \in \widetilde{\mathbb{A}}_p$, $(F_{ij}) \in \widetilde{\mathbb{F}}_p$ та $K \in \widetilde{\mathbb{O}}_p$ множина $\mathbf{SSI}\big(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K\big)$ є *непорожньою* (*містить не більше одного елемента*, є *одноелементною*).

Ми шукатимемо множини $\widetilde{\mathbb{P}}$ і $\widetilde{\mathbb{A}}_p$, $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p$ $(p \in \widetilde{\mathbb{P}})$ такі, щоб відповідна задача $\mathbf{SI}\big(\widetilde{\mathbb{A}}_p, \widetilde{\mathbb{F}}_p, \widetilde{\mathbb{O}}_p : p \in \widetilde{\mathbb{P}}\big)$ була або однозначною, або однозначно розв'язною за відсутності якихось умов на зростання елементів множин $\widetilde{\mathbb{F}}_p$, $\widetilde{\mathbb{O}}_p$ $(p \in \widetilde{\mathbb{P}})$ на нескінченності.

Тут пропонуємо такий вибір шуканих множин. Нехай $\mathbb{P}^*$ – множина, яка складається з елементів $p \in \mathbb{P}$ таких, що

$$p_{0j}^{-} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{\,0j}(x) \geqslant 2, \qquad p_{0j}^{+} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_{\,0j}(x) < +\infty, \qquad j = \overline{1,N},$$

$$p_{ij}^{-} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) > 1, \qquad p_{ij}^{+} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_{ij}(x) \leqslant 2, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,N},$$

$$q_{ij}^{-} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q_{ij}(x) > n, \qquad q_{ij}^{+} \overset{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q_{ij}(x) < +\infty, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,N},$$

де $q_{ij}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{p_{0j}(x) p_{ij}(x)}{p_{0j}(x) - p_{ij}(x)}$, $x \in \Omega$ $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,N})$.

Для кожного $p \in \mathbb{P}^*$ введемо множину $\mathbb{A}_p^*$ наборів функцій $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p$, які задовольняють додаткову умову;

4) сталі $\sigma_{1j}, \ldots, \sigma_{nj}$ $(j = \overline{1,N})$ в умові **3** такі, що

$$n - q_{ij}^{-} + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^{+}}{p_{ij}^{-}} < 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,N}.$$

Теорема 1. *Задача* $\mathbf{SI}\big(\mathbb{A}_p^*,\, \mathbb{F}_p,\, \mathbb{O}_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *є однозначною і, якщо* $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K) \neq \varnothing$ *для деяких* $p \in \mathbb{P}^*$ *і* $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$, *то для* $u \in \mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$ *і будь-яких* R_0, R, $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, *виконується нерівність*

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_j(x)|^{p_{ij}(x)} d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s \Big[C_1\, R^{n-\gamma} + C_2 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} |F_{ij}(x)|^{p^*_{ij}(x)}\, d\,x\Big], \tag{3}$$

де $\gamma = \min\big\{q^-_{ij} - \sigma_{ij}\frac{q^+_{ij}}{p^-_{ij}} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N\big\}$; $s > \max\big\{q^+_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N\big\}$; C_1, C_2 *– деякі додатні сталі, які залежать тільки від* n, s, p^-_{ij}, p^+_{ij} $(i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,N})$, q^-_{ij}, q^+_{ij} $(i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,N})$.

Нехай $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ – лінійний підпростір лінійного простору $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, який складається з функцій, носії яких є обмеженими множинами. На просторі $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ збіжність послідовностей визначається так: послідовність $\{f^k\}_{k=1}^{\infty}$ збіжна до f в $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$, якщо існує значення $R > 0$ таке, що носії членів послідовності лежать в $\overline{\Omega_R}$ і $\|f - f^k\|_{W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_R)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Спряжений до $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ простір позначатимемо через $(W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$, а дію елемента $f \in (W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$ на елемент $v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega)$ через $\langle f, v\rangle_*$. Очевидно, що простір $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ можна ототожнити з простором $(W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$.

Для $p \in \mathbb{P}^*$ через $\mathbb{O}^*_p$ позначимо підмножину множини $\mathbb{O}_p$ таку, що складається з елементів K, які є опуклими замкненими конусами з вершиною в нулі (тобто 1) $v + w \in K$ $\forall v, w \in K$; 2) $\lambda v \in K$ $\forall \lambda \geqslant 0$, $v \in K$), і для будь-якого елемента K існує оператор $\beta : W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) \longrightarrow (W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega))'$, який задовольняє умову

$$K = \{v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) : \beta(v) = 0\},$$

$$\langle \beta(u^1) - \beta(u^2), w(u^1 - u^2)\rangle_* \geqslant 0 \quad \forall\, u^1, u^2 \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ w \in \big(C^{1,+}_{\mathrm{c}}(\overline{\Omega})\big)^N. \tag{4}$$

Зауваження 2. Нехай $G \subseteq \Omega$ – підобласть або кусково-гладка $(n-1)$-вимірна поверхня, а K – підмножина множини $W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{G})$, яка складається з невід'ємних на G функцій. Очевидно, що K – опуклий замкнений конус з вершиною в нулі. Для множини K визначимо оператор β, який задовольняє зазначені вище умови, за правилом

$$\langle \beta u, v\rangle_* = \int\limits_G \sum_{j=1}^{N} u_j^{(-)}\, v_j\, d\,\mu \quad \forall\, u \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad v \in W^1_{p(\,\cdot\,),\,\mathrm{c}}(\Omega),$$

де $d\,\mu$ – елемент "об'єму", якщо G – підобласть, і $d\,\mu$ – елемент "площі", якщо G – поверхня; $u^{(-)}(x) = u(x)$ при $u(x) < 0$ і $u^{(-)}(x) = 0$ при $u(x) \geqslant 0$ для майже всіх $x \in G$.

Теорема 2. *Задача* $\mathbf{SI}\big(\mathbb{A}^*_p,\ \mathbb{F}_p,\ \mathbb{O}^*_p : p \in \mathbb{P}^*\big)$ *– однозначно розв'язна.*

4. Допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай* $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p$, *де* $p \in \mathbb{P}^*$. *Для кожних* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$, *майже всіх* $x \in \Omega$ *та довільних* ξ_1, ξ_2 *з* $\mathbb{R}$ *виконуються нерівності*

$$(A_{ij}(x, \xi_1) - A_{ij}(x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geqslant K^-_{ij}\big(|\xi_1|^{p_{ij}(x)-2}\xi_1 - |\xi_2|^{p_{ij}(x)-2}\xi_2\big)\big(\xi_1 - \xi_2\big), \tag{5}$$

$$(A_{ij}(x, \xi_1) - A_{ij}(x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \leqslant K^+_{ij}(1 + |x|)^{\sigma_{ij}}|\xi_1 - \xi_2|^{p_{ij}(x)}, \tag{6}$$

де K^-_{ij}, K^+_{ij} $(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,N})$ *– деякі додатні сталі.*

Доведення. Див. [7, с. 6]. □

Зауваження 3. Для довільних $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu > 1$ з нерівності Юнга [9] ($a\,b \leqslant \frac{a^\nu}{\nu} + \frac{b^{\nu^*}}{\nu^*}$, $\nu^* = \frac{\nu}{\nu-1}$) випливає нерівність

$$a\,b \leqslant \varepsilon a^\nu + \varepsilon^{1-\nu^*}\, b^{\nu^*}. \tag{7}$$

Зауваження 4. З нерівності Юнга [9] ($a\,b\,c \leqslant \frac{a^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{b^{\nu_2}}{\nu_2} + \frac{c^{\nu_3}}{\nu_3}$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 > 1$, $\nu_3 > 1$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$) легко отримати нерівність

$$a\,b\,c \leqslant \varepsilon a^{\nu_1} + \varepsilon b^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3}\, c^{\nu_3}, \quad \varepsilon > 0. \tag{8}$$

Лема 2. *Нехай $R_* \geqslant 1$, $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$ для якого-небудь $p \in \mathbb{P}^*$ і для кожного $l \in \{1,2\}$ функція $u^l \in K$ така, що*

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j^l)\, \partial_i (w_j (v_j - u_j^l)) + A_{0j}(x, u^l)\, w_j (v_j - u_j^l) \Big\}\, d\,x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i (w_j (v_j - u_j^l))\, d\,x \tag{9}$$

для довільних $v \in K$, $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp}\ w_j \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ $(j = \overline{1,N})$.

Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$, $R_0 < R \leqslant R_*$ правильна нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1 - u_j^2|^{p_{0j}(x)}\, d\,x \leqslant C_3 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s R^{\,n-\gamma}, \tag{10}$$

де s і γ – такі ж, як в умові теореми 1, а C_3 – додатна стала, яка від u^l $(l = \overline{1,2})$, F_{ij} $(i = \overline{0,n}, j = \overline{1,N})$ не залежить.

Доведення. Довільно виберемо і зафіксуємо числа R_0, R за умови, що $0 < R_0 < R \leqslant$ $\leqslant R_*$, $R \geqslant 1$. Додавши інтегральні нерівності, отримані з (9) при $l = 1$ і $l = 2$, та прийнявши $v = \frac{1}{2}(u^1 + u^2)$, матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{R_*}} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2))\, \partial_i (w_j (u_j^1 - u_j^2)) +$$

$$+ (A_{0j}(x, u^1) - A_{0j}(x, u^2))\, w_j (u_j^1 - u_j^2) \Big\}\, d\,x \leqslant 0, \tag{11}$$

де $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w_j \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ $(j = \overline{1,N})$.

Приймемо в (11) $w_j = \zeta^s$ $(j = \overline{1,N})$, де

$$\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{R}(R^2 - |x|^2), & |x| < R, \\ 0, & |x| \geqslant R, \end{cases} \tag{12}$$

$s > 1$ – достатньо велике число (значення s уточнимо пізніше). У результаті одержимо нерівність

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)) \partial_i (u_j^1 - u_j^2) + (A_{0j}(x, u^1) - A_{0j}(x, u^2)) \times$$

$$\times (u_j^1 - u_j^2) \Big\} \zeta^s \, dx \leqslant -s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \big(A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2) \big) \, (u_j^1 - u_2^j) \, \zeta^{s-1} \, \partial_i \zeta \, dx. \quad (13)$$

Оцінимо члени нерівності (13). На підставі умови **2** одержуємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} (A_{0j}(x, u^1) - A_{0j}(x, u^2)) \, (u_j^1 - u_j^2) \, \zeta^s \, dx \geqslant$$

$$\geqslant K_0 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)} \, \zeta^s \, dx. \quad (14)$$

Міркуючи так, як у [7, с. 8], для $s > \max\big\{ q_{ij}^+ : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N \big\}$ одержимо

$$-s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)) \, (u_j^1 - u_j^2) \, \zeta^{s-1} \, \partial_i \zeta \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \eta_1 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)) (\partial_i u_j^1 - \partial_i u_j^2) + |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)} \right\} \zeta^s \, dx +$$

$$+ C_4(\eta_1) \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} R^{s - q_{ij}(x) + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)}} dx, \quad (15)$$

де η_1 – довільне число з інтервалу $(0;1)$, $C_4(\eta_1) > 0$ – деяка стала.

З (13)–(15), вибираючи достатньо малим значення η_1, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (A_{ij}(x, \partial_i u_j^1) - A_{ij}(x, \partial_i u_j^2)) (\partial_i u_j^1(x) - \partial_i u_j^2(x)) + |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)} \Big\} \zeta^s \, dx \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} R^{s - q_{ij}(x) + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)}} \, dx, \quad (16)$$

де C_5 – деяка додатна стала.

Зауважимо, що $s - q_{ij}(x) + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)} \leqslant s - q_{ij}^- + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-}$ для майже всіх $x \in \Omega$ і будь-яких $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$. Легко переконатися, що $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant R$, коли

$x \in \mathbb{R}^n$, та $\zeta(x) \geqslant R - R_0$ при $|x| \leqslant R_0$, де $R_0 \in (0, R)$ – яке-небудь число. Врахувавши сказане і, зокрема, те, що $R \geqslant 1$, з (16) на підставі нерівності (5) отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1 - u_j^2|^{p\,_{0j}(x)} d\,x \leqslant C_6 \left(\frac{R}{R - R_0} \right)^s \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} R^{\,n - q_{ij}^- + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-}}, \tag{17}$$

де C_6 – додатна стала, яка залежить тільки від n, s, p_{ij}^-, p_{ij}^+ $(i = \overline{0, n},\, j = \overline{1, N})$, q_{ij}^-, q_{ij}^+ $(i = \overline{1, n},\, j = \overline{1, N})$. З (17), врахувавши, що $n - q_{ij}^- + \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-} \leqslant n - \gamma$ $(i = \overline{1, n},\, j = \overline{1, N})$, де $\gamma = \min\bigl\{ q_{ij}^- - \sigma_{ij} \frac{q_{ij}^+}{p_{ij}^-} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant N \bigr\}$, отримаємо нерівність (10). □

Лема 3. *Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$, $u \in K$ такі, що виконується нерівність (2) для довільних $v \in K$, $w_j \in C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})$, $\operatorname{supp} w_j \subset \overline{\Omega_{R_*}}$ $(j = \overline{1, N})$, де $R_* > 1$ – деяке число. Тоді для будь-яких чисел $R_0 > 0$, $R \geqslant 1$, $R_0 < R \leqslant R_*$, правильна нерівність (3).*

Доведення. Нехай $R \geqslant 1$ – яке-небудь число з проміжку $[1; R_*]$. Приймемо в (2) $w_j = \zeta^s$ $(j = \overline{1, N})$, де ζ визначена в (12), $v = 0$. Після простих перетворень отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, \partial_i u_j + A_{0j}(x, u)\, u_j \Bigr\} \zeta^s\, d\,x \leqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i u_j\, \zeta^s\, d\,x +$$

$$+ s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} F_{ij}\, u_j\, \zeta^{s-1} \partial_i \zeta\, d\,x - s \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, u_j\, \zeta^{s-1} \partial_i \zeta\, d\,x. \tag{18}$$

Оцінимо доданки нерівності (18). Згідно з нерівностями (5) та умовою **2** одержимо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j)\, \partial_i u_j + A_{0j}(x, u)\, u_j \Bigr\} \zeta^s\, d\,x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \Bigl\{ \sum_{i=1}^{n} K_{ij}^- |\partial_i u_j(x)|^{p_{ij}(x)} + K_0 |u_j(x)|^{p_{0j}(x)} \Bigr\} \zeta^s\, d\,x. \tag{19}$$

Використавши нерівність (7), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}\, \partial_i u_j\, \zeta^s\, d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_R} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \Bigl\{ \varepsilon_1 |\partial_i u_j(x)|^{p_{ij}(x)} + C_7(\varepsilon_1) |F_{ij}(x)|^{p_{ij}^*(x)} \Bigr\} \zeta^s\, d\,x, \tag{20}$$

де $\varepsilon_1 \in (0; 1)$ – довільне число; $C_7(\varepsilon_1)$ – деяка додатна стала, залежна від ε_1.

На підставі нерівності (8) маємо

$$s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}F_{ij}\,u_j\,\zeta^{s-1}\partial_i\zeta\,dx\leqslant\varepsilon_2\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}|u_j(x)|^{p_{0j}(x)}\,\zeta^s\,dx+$$

$$+\varepsilon_2\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}|F_{ij}(x)|^{p^*_{ij}(x)}\,\zeta^s\,dx+C_8(\varepsilon_2)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\zeta^{s-q_{ij}(x)}\,dx, \qquad (21)$$

де $\varepsilon_2\in(0;1)$ – довільне число, а $C_8(\varepsilon_2)$ – деяка додатна стала. Прийнявши в (15) $u^1=u$, $u^2=0$, одержимо

$$-s\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_iu_j)\,u_j\,\zeta^{s-1}\partial_i\zeta\,dx\leqslant\varepsilon_3\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_iu_j)\,\partial_iu_j\,\zeta^s\,dx+$$

$$+\varepsilon_3\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}|u_j(x)|^{p_{0j}(x)}\,\zeta^s\,dx+C_9(\varepsilon_3)\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}R^{s-q_{ij}(x)+\sigma_{ij}\frac{q_{ij}(x)}{p_{ij}(x)}}\,dx, \qquad (22)$$

де $\varepsilon_3\in(0;1)$ – довільне число; $C_9(\varepsilon_3)$ – деяка додатна стала.

На підставі (19)-(22) з (18) при достатньо малих значеннях $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}|\partial_iu_j(x)|^{p_{ij}(x)}\,\zeta^s(x)\,dx\leqslant C_{10}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}R^{n+s-q^-_{ij}+\sigma_{ij}\frac{q^+_{ij}}{p^-_{ij}}}+$$

$$+C_{11}\int\limits_{\Omega_R}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n}|F_{ij}(x)|^{p^*_{ij}(x)}\,\zeta^s(x)dx, \qquad (23)$$

де $s>\max\{q^+_{ij}:1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant N\}$ – довільна стала; C_{10}, C_{11} – додатні сталі, які залежать тільки від n, s, p^-_{ij}, p^+_{ij} $(i=\overline{0,n},j=\overline{1,N})$, q^-_{ij}, q^+_{ij}, $(i=\overline{1,n},j=\overline{1,N})$.

Діючи далі так само, як у доведенні леми 2 (див. (17)), отримаємо оцінку (3). $\square$

Нехай $p\in\mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\}\in\mathbb{A}^*_p$, $(F_{ij})\in\mathbb{F}_p$, $K\in\mathbb{O}^*_p$, k – деяке натуральне число. Приймемо $\mathbb{U}_{p,k}\overset{\mathrm{def}}{=}\{v|_{\Omega_k}:v\in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{c}}(\Omega),\ \operatorname{supp}v\subset\overline{\Omega_k}\}$ – лінійний простір, наділений нормою простору $W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$ (очевидно, що $\mathbb{U}_{p,k}\subset W^1_{p(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$). Простір $\mathbb{U}_{p,k}$ є банаховим. Канонічну форму на $(\mathbb{U}_{p,k})'\times\mathbb{U}_{p,k}$ позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$. Під K_k розумітимемо множину $\{v|_{\Omega_k}:v\in K,\ \operatorname{supp}v\subset\Omega_k\}$, яка, на підставі нашого припущення, є опуклою замкненою підмножиною $\mathbb{U}_{p,k}$.

Визначимо оператор $L^k:\mathbb{U}_{p,k}\to(\mathbb{U}_{p,k})'$ за правилом

$$\langle L^kv,\widetilde{v}\rangle_k\overset{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_iv_j)\,\partial_i\widetilde{v}_j+A_{0j}(x,v)\,\widetilde{v}_j\Big\}\,dx\quad\forall v,\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,k}.$$

Легко переконатися, що оператор $L^k:\mathbb{U}_{p,k}\to(\mathbb{U}_{p,k})'$ – строго монотонний, обмежений, коерцитивний і семінеперервний. Доведення цього факту проводять подібно до випадку сталого показника нелінійності, використовуючи зв'язок між нормою простору $L_{r(\,\cdot\,)}(\Omega_k)$ і функціоналом $\rho_{r,k}(v)$.

Тепер визначимо функціонал $\Phi^k \in (\mathbb{U}_{p,k})'$ за правилом

$$\langle \Phi^k, \widetilde{v} \rangle_k \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i \widetilde{v}_j(x)\, dx \qquad \forall \widetilde{v} \in \mathbb{U}_{p,k}.$$

Лема 4. *Існує єдина функція $u^k \in K_k$ така, що*

$$\langle L^k u^k, w(v - u^k) \rangle_k \geqslant \langle \Phi^k, w(v - u^k) \rangle_k \tag{24}$$

для будь-яких $v \in K_k$, $w \in \left(C^{1,+}(\overline{\Omega})\right)^N$.

Доведення. Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ розглянемо задачу: знайти функцію $u^\varepsilon \in \mathbb{U}_{p,k}$, яка задовольняє рівняння

$$L^k u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \beta^k u^\varepsilon = \Phi^k, \tag{25}$$

де β^k – звуження оператора штрафу β, що визначає K, на простір $\mathbb{U}_{p,k}$.

У цьому доведенні, для спрощення записів, всюди опустимо індекс k, крім позначень $\mathbb{U}_{p,k}$, K_k і Ω_k. Використовуючи властивості оператора L, легко переконатися, що оператор $L + \frac{1}{\varepsilon}\beta$ – монотонний, обмежений, семінеперервний і коерцитивний. Враховуючи це, а також те, що простір $\mathbb{U}_{p,k}$ – рефлексивний і сепарабельний, на підставі теореми 2.1 монографії [10, Гл.2, §2] отримаємо існування розв'язку рівняння (25). Його єдиність випливає з сильної монотонності оператора L.

Міркуючи так, як при доведенні теореми 5.2 [10, с.385], одержимо, що множина $\{u^\varepsilon : \varepsilon \in (0;1)\}$ – обмежена в $\mathbb{U}_{p,k}$, множина $\{Lu^\varepsilon : \varepsilon \in (0;1)\}$ – обмежена в $(\mathbb{U}_{p,k})'$, $\|\beta u^\varepsilon\| \leqslant C_{12}\varepsilon$, де C_{12} – деяка додатна стала. Звідси випливає існування функцій $u \in \mathbb{U}_{p,k}$, $\chi \in (\mathbb{U}_{p,k})'$ та послідовності $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ таких, що $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$ і

$$u^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ слабко в } \mathbb{U}_{p,k}, \tag{26}$$

$$Lu^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi \ \text{ слабко в } \ (\mathbb{U}_{p,k})', \tag{27}$$

$$\beta u^{\varepsilon_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ сильно в } (\mathbb{U}_{p,k})', \quad \beta u = 0. \tag{28}$$

З рівняння (25) для довільних $v \in K_k$, $w \in (C^{1,+}(\overline{\Omega}))^N$ маємо

$$\langle Lu^{\varepsilon_m} - \Phi, w(v - u^{\varepsilon_m}) \rangle = \frac{1}{\varepsilon_m} \langle \beta v - \beta u^{\varepsilon_m}, w(v - u^{\varepsilon_m}) \rangle \geqslant 0, \tag{29}$$

звідки випливає нерівність

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, w(v - u^{\varepsilon_m}) \rangle \geqslant \langle \Phi, w(v - u^{\varepsilon_m}) \rangle \quad \forall v \in K_k,\ w \in \left(C^{1,+}(\overline{\Omega})\right)^N,\ m \in \mathbb{N}. \tag{30}$$

Прийнявши в (30) $v = u$, $w_j = 1$ $(j = \overline{1,N})$, одержимо

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, u - u^{\varepsilon_m} \rangle \geqslant \langle \Phi, u - u^{\varepsilon_m} \rangle.$$

Звідси, на підставі (26), отримуємо

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle Lu^{\varepsilon_m}, u - u^{\varepsilon_m} \rangle \geqslant 0. \tag{31}$$

З монотонності оператора L випливає $\langle Lu - Lu^{\varepsilon_m}, u - u^{\varepsilon_m} \rangle \geqslant 0$, тобто

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, u - u^{\varepsilon_m} \rangle \leqslant \langle Lu, u - u^{\varepsilon_m} \rangle,$$

звідки

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle \leqslant 0. \tag{32}$$

З (31) і (32) отримаємо

$$\lim_{m\to\infty}\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle = 0. \tag{33}$$

Врахувавши умову **2** та нерівності (5), отримаємо

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}-Lu, u^{\varepsilon_m}-u\rangle \geqslant K_0\int\limits_{\Omega_k}\sum_{j=1}^{N}|u_j^{\varepsilon_m}-u_j|^{p_{0j}(x)}\,dx \quad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{34}$$

На підставі (26) та (33) з (34) одержимо

$$u_j^{\varepsilon_m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}u_j \ \text{ сильно в } L_{p_{0j}(\,\cdot\,)}(\Omega_k), \qquad j=\overline{1,N}. \tag{35}$$

Покажемо, що

$$\chi = Lu. \tag{36}$$

Для цього використаємо ідею, викладену на сторінці 191 монографії [10]. Нехай $\widetilde{v}$ – довільний елемент з простору $\mathbb{U}_{p,k}$. Приймемо $w^\theta \stackrel{\text{def}}{=} u+\theta(\widetilde{v}-u)$, $\theta\in(0,1)$. На підставі монотонності оператора L отримаємо $\langle Lu^{\varepsilon_m}-Lw^\theta, u^{\varepsilon_m}-w^\theta\rangle\geqslant 0$, тобто

$$\theta\langle Lu^{\varepsilon_m}, u-\widetilde{v}\rangle \geqslant \langle Lu^{\varepsilon_m}, u-u^{\varepsilon_m}\rangle + \langle Lw^\theta, u^{\varepsilon_m}-u\rangle + \theta\langle Lw^\theta, u-\widetilde{v}\rangle.$$

Спрямуємо в цій нерівності m до ∞, врахувавши (26), (33). У результаті отримаємо

$$\langle\chi, u-\widetilde{v}\rangle \geqslant \langle Lw^\theta, u-\widetilde{v}\rangle.$$

Спрямувавши тут θ до 0, і враховуючи, що оператор L – семінеперервний, одержимо

$$\langle\chi - Lu, u-\widetilde{v}\rangle \geqslant 0 \tag{37}$$

для довільних $\widetilde{v}\in\mathbb{U}_{p,k}$. Узявши в (37) $\widetilde{v}=u-\lambda\psi$, де $\lambda>0$, $\psi\in\mathbb{U}_{p,k}$, отримаємо $\langle\chi-Lu,\psi\rangle\geqslant 0$ $\forall\psi\in\mathbb{U}_{p,k}$, звідки легко випливає (36).

Використовуючи означення оператора L, умову **2** та нерівності (5) (див. [7, с. 13]), отримаємо

$$\langle Lu^{\varepsilon_m}, w(u-u^{\varepsilon_m})\rangle \leqslant \int\limits_{\Omega_k}\sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_i u_j^{\varepsilon_m})\,(u_j-u_j^{\varepsilon_m})\,\partial_i w_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}A_{ij}(x,\partial_i u_j)\,\partial_i(u_j-u_j^{\varepsilon_m})\,w_j + A_{0j}(x,u)\,w_j(u_j-u_j^{\varepsilon_m})\Big\}\,dx. \tag{38}$$

Перейшовши в (38) до границі при $m\to\infty$, отримаємо

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\langle Lu^{\varepsilon_m}, w(u-u^{\varepsilon_m})\rangle \leqslant 0. \tag{39}$$

На підставі нерівності (30) одержимо

$$\langle\Phi, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle \leqslant \langle Lu^{\varepsilon_m}, w(v-u^{\varepsilon_m})\rangle = \langle Lu^{\varepsilon_m}, w(v-u)\rangle + \langle Lu^{\varepsilon_m}, w(u-u^{\varepsilon_m})\rangle, \tag{40}$$

для довільних $v\in K_k$, $w\in\big(C^{1,+}(\overline{\Omega})\big)^N$.

Спрямуємо в (40) m до ∞, враховуючи (27), (36), (39). У результаті отримаємо (24) для довільних $v\in K_k$, $w\in\big(C^{1,+}(\overline{\Omega})\big)^N$. □

5. Доведення основних результатів. *Доведення теореми 1.* Припустимо супротивне. Нехай для деяких $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$ множина $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\},(F_{ij}),K)$ складається з понад одного елемента. Виберемо які-небудь два елементи з $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\},(F_{ij}),K)$ і позначимо їх через u^1 та u^2. Згідно з лемою 2 і нашим припущенням маємо для довільних R_0, R таких, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, нерівність

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^1(x) - u_j^2(x)|^{p_{0j}(x)}\, dx \leqslant C_3 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\gamma}, \tag{41}$$

де s і γ – такі самі, як у формулюванні теореми 1, а C_3 – додатна стала, яка від u^l $(l=\overline{1,2})$ не залежить.

Отож, довільно зафіксувавши вибране R_0, перейдемо в (41) до границі при $R \to +\infty$. У результаті отримаємо, що $u^1(x) = u^2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega_{R_0}$. Оскільки R_0 – довільне число, то маємо $u^1(x) = u^2(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, тобто множина $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\},(F_{ij}),K)$ не може містити більше одного елемента.

Нехай $\mathbf{SSI}(\{A_{ij}\},(F_{ij}),K) \neq 0$ для деяких $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p$. Тоді на підставі леми 3 маємо (3). $\square$

Доведення теореми 2. Нехай $p \in \mathbb{P}^*$ і $\{A_{ij}\} \in \mathbb{A}_p^*$, $(F_{ij}) \in \mathbb{F}_p$, $K \in \mathbb{O}_p^*$. Згідно з лемою 4 для кожного натурального числа k, врахувавши означення оператора L^k та функціонала Φ^k, одержуємо існування функції $u^k \in K_k$ такої, що

$$\int\limits_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x, \partial_i u_j^k)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j^k)) + A_{0j}(x, u^k)\, w_j(v_j - u_j^k) \Big\}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_k} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\, \partial_i(w_j(v_j - u_j^k))\, dx, \tag{42}$$

для будь-яких $v \in K$, $w \in \left(C_c^{1,+}(\overline{\Omega})\right)^N$, $\operatorname{supp} w_j \subset \overline{\Omega_k}$ $(j=\overline{1,N})$.

Довизначимо для кожного $k \in \mathbb{N}$ функцію u^k нулем на $\Omega \backslash \overline{\Omega_k}$, залишивши за цим продовженням позначення u^k. Очевидно, що $u^k \in K$. Нехай k і m – довільні натуральні числа, причому $1 < k < m$; R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant k-1$, $R \geqslant 1$. Тоді на підставі леми 2 з (42), узявши $R_* = k-1$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |u_j^k(x) - u_j^m(x)|^{p_{0j}(x)}\, dx \leqslant C_3 \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^s R^{n-\gamma}, \tag{43}$$

де $C_3 > 0$, $s > 0$ – сталі, які від k, m, R_0 та R не залежать, причому значення γ таке, що $n - \gamma < 0$ (його можна таким вибрати на підставі умов теореми 2).

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільне значення $R_0 > 0$ і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (43) була меншою за ε. Тоді для будь-яких $k \geqslant R+1$ і $m > k$ ліва частина нерівності (43) менша за ε. Це означає, що послідовність $\left\{u_j^k\big|_{\Omega_{R_0}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L_{p_{0j}(\cdot)}(\Omega_{R_0})$

$(j=\overline{1,N})$. Оскільки $R_0>0$ – довільне число, то звідси випливає існування функцій $u_j\in L_{p_{0j}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(j=\overline{1,N})$ таких, що

$$u_j^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_j \quad \text{сильно в} \quad L_{p_{0j}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad j=\overline{1,N}. \tag{44}$$

Покажемо, що послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{A_{0j}(\cdot,u^k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$, $\{A_{ij}(\cdot,\partial_i u_j^k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ – обмежені відповідно в $W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p^*_{0j}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{p^*_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N})$. Справді, нехай R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0<R_0<R$, $R\geqslant 1$. На підставі леми **3** для довільного натурального числа $k>R+1$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} |\partial_i u_j^k(x)|^{p_{ij}(x)}\,dx \leqslant C_{13}(R_0), \tag{45}$$

де $C_{13}(R_0)>0$ – стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

Згідно з умовою **2** і нерівностями (6), використавши оцінку (45), одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{R_0}} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}\big(x,\partial_i u_j^k(x)\big)|^{p^*_{ij}(x)}\,dx \leqslant C_{14}(R_0), \quad i=\overline{0,n}, \tag{46}$$

де $C_{14}(R_0)>0$ – стала, яка від k не залежить, але може залежати від R_0.

З (44)–(46) і умови **1** отримаємо існування підпослідовності $\{u^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ послідовності $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ та функцій $v\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, $\chi_{ij}\in L_{p^*_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ $(i=\overline{0,n}, j=\overline{1,N})$ таких, що

$$u^{k_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v \quad \text{слабко в} \quad W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \tag{47}$$

$$u^{k_m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{майже всюди на} \quad \Omega, \tag{48}$$

$$A_{0j}\big(\cdot,u^{k_m}(\cdot)\big) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{0j}(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_{p^*_{0j}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad j=\overline{1,N}, \tag{49}$$

$$A_{0j}\big(x,u^{k_m}(x)\big) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A_{0j}\big(x,u(x)\big) \quad \text{для майже всіх} \quad x\in\Omega, \quad j=\overline{1,N}, \tag{50}$$

$$A_{ij}\big(\cdot,\partial_i u_j^{k_m}(\cdot)\big) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{ij}(\cdot) \quad \text{слабко в} \quad L_{p^*_{ij}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}), \quad i=\overline{1,n}, j=\overline{1,N}.$$

З (47)–(50) і леми 1.3 праці [10, с. 25] одержимо, що

$$v=u, \qquad \chi_{0j}(\cdot)=A_{0j}\big(\cdot,u(\cdot)\big), \quad j=\overline{1,N}.$$

На підставі методу монотонності (див. [7, с. 16]) отримаємо

$$\chi_{ij}(\cdot)=A_{ij}\big(\cdot,\partial_i u_j(\cdot)\big), \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,N}.$$

Нехай $v\in K$, $w\in\Big(C_{\mathrm{c}}^{1,+}(\overline{\Omega})\Big)^N$. Виберемо значення $l\in\mathbb{N}$ таке, що $\operatorname{supp} w_j\subset\Omega_{k_l}$ $(j=\overline{1,N})$. Для всіх $m>l$ виконується нерівність (див. (42))

$$\int\limits_{\Omega_{k_m}} \sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x,\partial_i u_j^{k_m})\,\partial_i(w_j(v_j-u_j^{k_m})) + A_{0j}(x,u^{k_m})\,w_j(v_j-u_j^{k_m})\Big\}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{k_m}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} F_{ij}\,\partial_i(w_j(v_j-u_j^{k_m}))\,d\,x = I_1. \tag{51}$$

Перетворимо ліву частину нерівності (51) так:

$$\int\limits_{\Omega_{k_m}} \sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x,\partial_i u_j^{k_m})\,\partial_i(w_j(v_j-u_j^{k_m})) + A_{0j}(x,u^{k_m})\,w_j(v_j-u_j^{k_m})\Big\}d\,x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}(x,\partial_i u_j^{k_m}) - A_{ij}(x,\partial_i v_j))\,(v_j-u_j^{k_m})\,\partial_i w_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x,\partial_i v_j)\,\partial_i(w_j(v_j-u_j^{k_m})) + A_{0j}(x,v)\,w_j(v_j-u_j^{k_m})\Big\}d\,x = I_2. \tag{52}$$

Стосовно правої частини нерівності (51) маємо

$$I_1 = \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\,\partial_i(w_j(v_j-u_j^{k_m}))d\,x \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\,\partial_i(w_j(v_j-u_j))d\,x. \tag{53}$$

Легко переконатися, що

$$I_2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N}\Big\{\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}(x,\partial_i u_j) - A_{ij}(x,\partial_i v_j))\,(v_j-u_j)\,\partial_i w_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x,\partial_i v_j)\,\partial_i(w_j(v_j-u_j)) + A_{0j}(x,v)\,w_j(v_j-u_j)\Big\}d\,x. \tag{54}$$

Оцінимо ліву частину нерівності (51), використавши (52), і перейдемо в отриманій нерівності до границі при $m \to \infty$, врахувавши (53) і (54). Потім приймемо $v \overset{\text{def}}{=} u + \theta(\widetilde{v} - u)$, $0 < \theta < 1$, $\widetilde{v} \in K$. У результаті одержимо

$$\int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N}\{\sum_{i=1}^{n}\Big(A_{ij}(x,\partial_i u_j) - A_{ij}(x,\partial_i(u_j+\theta(\widetilde{v}_j-u_j)))\Big)\,(\widetilde{v}_j-u_j)\,\partial_i w_j +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} A_{ij}(x,\partial_i(u_j+\theta(\widetilde{v}_j-u_j)))\,\partial_i(w_j(\widetilde{v}_j-u_j)) + A_{0j}(x,u+\theta(\widetilde{v}-u)))\,w_j(\widetilde{v}_j-u_j)\}d\,x \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega_{k_l}} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{n} F_{ij}(x)\,\partial_i(w_j(\widetilde{v}_j-u_j))d\,x. \tag{55}$$

Перейшовши в (55) до границі при $\theta \to 0$, отримаємо (2) для заданої функції $\widetilde{v}$. На підставі довільності функцій $\widetilde{v}$ і w робимо висновок, що $u \in \mathbf{SSI}(\{A_{ij}\}, (F_{ij}), K)$. Отже, ми довели однозначну розв'язність задачі $\mathbf{SI}\big(\mathbb{A}_p^*, \mathbb{F}_p, \mathbb{O}_p^* : p \in \mathbb{P}^*\big)$. $\square$

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952 (March). – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Simon L.* On strongly nonlinear elliptic variational inequalities. / *Simon L.* // Acta Math. Hungar. – 1988. – Vol. 52, №1-2. – P. 147-164.
3. *Simon L.* On uniqueness, regularity and stability of solutions of strongly nonlinear elliptic variational inequalities / *Simon L.* // Acta Math. Hungar. – 1990. – Vol. 55, №3-4. – P. 379-392.
4. *Медвідь І.М.* Еліптична варіаційна нерівність в необмежених областях / *Медвідь І.М.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, №2. – С. 108-116.
5. *Бокало М.М.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності зі змінними показниками нелінійності / *Бокало М.М., Кушнір О.В.* // Наук. Вісник Чернівецького ун-ту. – Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 28-38.
6. *Бокало М.М.* Варіаційні нелінійні еліптичні нерівності вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *Бокало М.М., Кушнір О.В.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – С. 20-35.
7. *Доманська О.В.* Варіаційні еліптичні нерівності в узагальнених анізотропних просторах Лебега-Соболєва / *Доманська О.В.* // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – Вип. 18. – С. 1-19.
8. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kováčik O., Rákosníc J.* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – Vol. 41, №4. – P. 592-618.
9. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. / *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* – М.: Наука, 1964.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М.: Мир, 1972.

SYSTEMS OF ELLIPTIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH ANISOTROPIC NONLINEARITY

Olena DOMANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
79000, L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: olena.domanska@gmail.com

It has been proved the weakly well-posedness of the system of elliptic variational inequalities having polynomial nonlinearities and nonlinearity indices with respect to different derivatives are different and variable. We do not put any conditions on the behaviour of solution and growth of the initial data at infinity.

Key words: nonlinear operator, variational inequality, general Lebesgue-Sobolev space, unbounded domain.

СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С АНИЗОТРОПНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Елена ДОМАНСКАЯ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000, Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: olena.domanska@gmail.com

Доказана однозначная разрешимость систем эллиптических вариационных неравенств, которые содержат степенные нелинейности и их показатели нелинейности относительно разных производных разные и переменные. При этом не налагаются условия на поведение решения и возростание исходных данных на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейный оператор, вариационное неравенство, обобщенное пространство Лебега-Соболева, неограниченная область.

Стаття надійшла до редколегії 09.09.2008

Прийнята до друку 12.06.2009