УДК: 539.3

МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В ДИНАМІЧНІЙ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРА

Володимир КОЛОДІЙ, **Ігор ТУРЧИН**

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням методу поліномів Лагерра одержано розв'язок задачі теорії пружності про радіальні коливання неоднорідного циліндра. Подано порівняльний аналіз результатів для однорідного циліндра з результатами одержаними методом інтегрального перетворення Лапласа.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, радіально-шаруватий циліндр, поліноми Лагерра.

Розвиток сучасних наукомістких технологій і потреба в економії енергетичних та сировинних ресурсів потребують широкого використання нових нетрадиційних матеріалів із ускладненою внутрішньою будовою та щораз точнішої відповідності вихідних модельних побудов до реального об'єкта досліджень. Одержані внаслідок такого поглиблення модельних припущень задачі математичної фізики зазвичай не вдається розв'язати класичними аналітичними методами і виникає потреба у розробці нових аналітичних підходів та числово-аналітичних і числових схем, які дають змогу з прогнозованою точністю одержати відповідні розв'язки. Сьогодні у літературі практично немає універсальних узагальнювальних методів, які би допомогли вирішити подібну проблему у повному обсязі: від математичного моделювання до одержання кількісного та якісного аналізу. Тому розробка нових некласичних моделей механіки структурно-неоднорідних тіл та конструкційних елементів і, відповідно, методів їхнього дослідження важлива і актуальна з теоретичного погляду та практичного застосування.

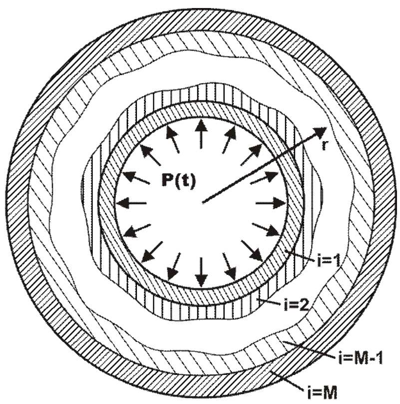

Рис.1

Ми розглядаємо динамічну задачу теорії пружності для композита, що складається з $\boldsymbol{M}$ вкладених циліндричних шарів різної товщини і з різними механічними властивостями. Циліндр з індексом "1" - внутрішній шар композита, а з індексом "$\boldsymbol{M}$" - зовнішній (рис.1). Джерелом нестаціонарних процесів у композиті є високоінтенсивне ударне навантаження його внутрішньої поверхні.

Для визначення поля напружень і деформацій у композиті, в припущенні, що на лінії розподілу шарів виконуються умови ідеального механічного контакту, знайдемо розв'язок такої початково-крайової задачі:

$$\rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}) - \rho^{-2}\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})} - \tilde{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{i}}^2\partial_\tau^2\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})} = 0, \quad \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{M}} \tag{1}$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = -\boldsymbol{p}^*(\tau),\ \rho = \rho_0 \qquad \sigma_{\rho\rho}^{(\boldsymbol{M})} = 0, \quad \rho = 1 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i}+1)},\ \sigma_{\rho\rho}^{(\boldsymbol{i})} = \sigma_{\rho\rho}^{(\boldsymbol{i}+1)} \qquad \rho = \rho_{\boldsymbol{i}}, \qquad \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{M}-1}, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})} = \partial_\tau\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})} = 0, \tau = 0, \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{M}}, \tag{4}$$

де $\rho = \boldsymbol{r} / \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{M}}$ – безрозмірна радіальна змінна циліндричної системи координат; $\rho_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i}} / \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{M}}$, $\boldsymbol{R}_0$, $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{M}}$ – радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь композита; $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i}}$, $\boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{M}-1}$ – радіуси поверхонь спряження між шарами; $\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau)$ – віднесене до $\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{M}}$ радіальне переміщення в тілі; $\tilde{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{i}} = \dfrac{\boldsymbol{c}_1}{\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i},1}}$, $\tau = \dfrac{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{M}}}$ – динамічний час; $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{i},1}$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль у матеріалі $\boldsymbol{i}$-го шару; $\boldsymbol{c}_1$ – швидкість поздовжніх хвиль у деякому матеріалі; $\sigma_{\rho\rho}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau)$ - радіальні напруження в $\boldsymbol{i}$-му шарі, які можна записати за законом Гука

$$\sigma_{\rho\rho}^{(\boldsymbol{i})} = \mu_{\boldsymbol{i}}\left[\chi_{\boldsymbol{i}}^2\partial_\rho\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})} + (\chi_{\boldsymbol{i}}^2 - 2)\frac{\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}}{\rho}\right], \tag{5}$$

де $\chi_{\boldsymbol{i}}^2 = \dfrac{\lambda_{\boldsymbol{i}} + 2\mu_{\boldsymbol{i}}}{\mu_{\boldsymbol{i}}}$, $\lambda_{\boldsymbol{i}}$, $\mu_{\boldsymbol{i}}$ – сталі Ляме.

Розв'язок задачі (1)-(4) шукатимемо в класі функцій, що належать простору $\boldsymbol{L}_2\left(0,\infty;\ \lambda\exp(-\lambda\boldsymbol{t})\right)$, тобто таких, для яких правильна умова

$$\left\|\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}\left(\rho,\tau\right)\right\|^2 = \lambda\int_0^\infty \exp(-\lambda\tau)\left|\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau)\right|^2\boldsymbol{d}\tau < \infty\,,$$

де $\lambda > 0$ деяке число (масштабний множник).

Функції $\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau)$ можна тоді подати у вигляді ряду за ортогональними поліномами Лагерра [5]

$$\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau) = \lambda\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(\rho)\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}(\lambda\tau)\,, \tag{6}$$

де

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{(\boldsymbol{i})}(\rho) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau)\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau)\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}(\lambda\tau)\boldsymbol{d}\tau\,, \tag{7}$$

а $L_n(\lambda\tau)$ - поліноми Лагерра.

Надалі формулу (7) будемо розглядати як інтегральне перетворення функції, а ряд (6) як формулу обернення цього перетворення.

Помножимо рівняння (1) на ядро перетворення $\exp(-\lambda\tau)L_n(\lambda\tau)$ і виконаємо почленне інтегрування отриманого виразу за змінною τ в інтервалі $[0,\infty)$. Враховуючи рівність (7), початкові умови (4) і наслідок формули диференціювання поліномів Лагерра [5]

$$\partial_\tau L_n(\lambda\tau) = -\lambda L^1_{n-1}(\lambda\tau) = -\lambda\sum_{k=0}^{n-1} L_k(\lambda\tau),$$

після інтегрування за частинами, одержимо

$$\rho^{-1}\partial_\rho(\rho\partial_\rho u_n^{(i)}) - \rho^{-2}u_n^{(i)} - \omega_i^2 u_n^{(i)} = \omega_i^2\sum_{m=0}^{n-1}(n-m+1)u_m^{(i)},\ i=\overline{1,M}\,; \tag{8}$$

$$\sigma^{(1)}_{\rho\rho,n} = -p^*,\ \rho=\rho_0 \qquad \sigma^{(M)}_{\rho\rho,n} = 0,\quad \rho = 1\,; \tag{9}$$

$$u_n^{(i)} = u_n^{(i+1)},\quad \sigma^{(i)}_{\rho\rho,n} = \sigma^{(i+1)}_{\rho\rho,n},\ \rho=\rho_i,\qquad i=\overline{1,M-1}\,, \tag{10}$$

де $u_n^{(i)}(\rho)$ - зображення за Лагерром (7), $\omega_i = \lambda/c_i$.

Розв'язок послідовності (8), як відомо [3], можна записати у вигляді алгебричної згортки

$$u_n^{(i)}(\rho) = \sum_{j=0}^{n}\left[C^{(i)}_{n-j}G_j(\rho) + D^{(i)}_{n-j}W_j(\rho)\right]. \tag{11}$$

Тут $G_j(\rho)$, $W_j(\rho)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки послідовності (8), які можна подати у вигляді

$$G_j(\rho) = \sum_{p=0}^{j} a_{j,p}\frac{(\omega_i\rho)^p}{2^p p!}\mathrm{I}_p(\omega_i\rho);\ \ W_j(\rho) = \sum_{p=0}^{j} a_{j,p}\frac{(-\omega_i\rho)^p}{2^p p!}\mathrm{K}_p(\omega_i\rho), \tag{12}$$

де $\mathrm{I}_p(g)$ та $\mathrm{K}_p(g)$ - модифіковані функції Бесселя [1], а коефіцієнти $a_{j,p}$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$a_{j,p+1} = \sum_{k=p}^{j-1}(j-k+1)a_{k,p};\ j=1,2,\ldots;\quad p=\overline{0,j-1}\,. \tag{13}$$

Безпосередня підстановка розв'язку (11) в умови (9)-(10) приводить до співвідношень, які після певних перетворень можна подати у вигляді рекурентної послідовності систем лінійних алгебричних рівнянь

$$(b_{k,l})\left\{C_n^{(1)},D_n^{(1)},\ldots,C_n^{(l)},D_n^{(l)},\ \ldots\ ,C_n^{(M)},D_n^{(M)}\right\}^{\mathrm{T}} = \left\{H_{n,k}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

де структура і коефіцієнти матриці $(b_{k,l})$ не залежать від номера n і набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ...... & ...... \\ 0 & 0 & b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{2i+1,2i-1} & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+1} & 0 & ..... & 0 & 0 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ..... & b_{2n,2M-1} & b_{2n,2M} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

Її ненульові коефіцієнти обчислюють за формулами

$$b_{1,1} = \chi_1^2\omega_1 I_0(\rho_0\omega_1) - \frac{2}{\rho_0} I_1(\rho_0\omega_1);\; b_{1,2} = -\chi_1^2\omega_1 K_0(\rho_0\omega_1) - \frac{2}{\rho_0} K_1(\rho_0\omega_1);$$

$$b_{2i,2i-1} = I_1(\omega_i\rho_i);\; b_{2i,2i} = K_1(\omega_i\rho_i);\; b_{2i,2i+1} = -I_1(\omega_{i+1}\rho_i);$$

$$b_{2i,2i+2} = -K_1(\omega_{i+1}\rho_i);\; b_{2i+1,2i-1} = \mu_i\chi_i^2\omega_i I_0(\omega_i\rho_i) - \frac{2\mu_i}{\rho_i} I_1(\omega_i\rho_i);$$

$$b_{2i+1,2i+1} = -\mu_{i+1}\chi_{i+1}^2\omega_{i+1} I_0(\omega_{i+1}\rho_i) + \frac{2\mu_{i+1}}{\rho_i} I_1(\omega_{i+1}\rho_i);$$

$$b_{2i+1,2i+2} = \mu_{i+1}\chi_{i+1}^2\omega_{1+1} K_0(\omega_{i+1}\rho_i) + \frac{2\mu_{i+1}}{\rho_i} K_1(\omega_{i+1}\rho_i);$$

$$b_{2M,2M-1} = \chi_M^2\omega_M I_0(\omega_M) - 2I_1(\omega_M);\; b_{2M,2M} = -\chi_M^2\omega_M K_0(\omega_M) - 2K_1(\omega_M);$$

Стовпець вільних членів у системах (14) набуває вигляду:

$$H_{1,n} = -\frac{p_{0,n}}{\mu_1} - \chi_1^2\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(1)}G_j'(\omega_0\rho_0) + D_{n-j}^{(1)}W_j'(\omega_0\rho_0)\right] - \\ -\frac{\chi_1^2 - 2}{\rho_0}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(1)}G_j(\omega_0\rho_0) + D_{n-j}^{(1)}W_j(\omega_0\rho_0)\right];$$

$$H_{2i,n} = \sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i+1)}G_j(\omega_{i+1}\rho_i) + D_{n-j}^{(i+1)}W_j(\omega_{i+1}\rho_i)\right] - \\ -\sum_{j=1}^{n}\left[C_{n-j}^{(i)}G_j(\omega_i\rho_i) + D_{n-j}^{(i)}W_j(\omega_i\rho_i)\right];$$

$$\boldsymbol{H}_{2\boldsymbol{i}+1,\boldsymbol{n}} = \mu_{\boldsymbol{i}+1}\chi_{\boldsymbol{i}+1}^{2}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i}+1)}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}'(\omega_{\boldsymbol{i}+1}\rho_{\boldsymbol{i}}) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i}+1)}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}'(\omega_{\boldsymbol{i}+1}\rho_{\boldsymbol{i}})\Big] +$$
$$+\frac{\mu_{\boldsymbol{i}+1}\left(\chi_{\boldsymbol{i}+1}^{2}-2\right)}{\rho_{\boldsymbol{i}}}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i}+1)}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}(\omega_{\boldsymbol{i}+1}\rho_{\boldsymbol{i}}) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i}+1)}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}(\omega_{\boldsymbol{i}+1}\rho_{\boldsymbol{i}})\Big] -$$
$$-\mu_{\boldsymbol{i}}\chi_{\boldsymbol{i}}^{2}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}'(\omega_{\boldsymbol{i}}\rho_{\boldsymbol{i}}) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}'(\omega_{\boldsymbol{i}}\rho_{\boldsymbol{i}})\Big] -$$
$$-\frac{\mu_{\boldsymbol{i}}\left(\chi_{\boldsymbol{i}}^{2}-2\right)}{\rho_{\boldsymbol{i}}}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}(\omega_{\boldsymbol{i}}\rho_{\boldsymbol{i}}) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}(\omega_{\boldsymbol{i}}\rho_{\boldsymbol{i}})\Big];$$

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{M},\boldsymbol{n}} = -\frac{\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{M}}}{\mu_{\boldsymbol{M}}} - \chi_{\boldsymbol{M}}^{2}\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{M})}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}'(1) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{M})}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}'(1)\Big] -$$
$$-\left(\chi_{\boldsymbol{M}}^{2}-2\right)\sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{M})}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}(1) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{M})}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}(1)\Big];$$

Шляхом застосування алгоритму Гаусса до систем (15), їх зведено до трикутних систем рівнянь та одержано точний рекурентний розв'язок для довільного числа складових циліндричного тіла.

Остаточний розв'язок задачі одержано у вигляді

$$\boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{i})}(\rho,\tau) = \lambda\sum_{\boldsymbol{n}=0}^{\infty}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}(\lambda\tau)\sum_{\boldsymbol{j}=0}^{\boldsymbol{n}}\Big[\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{j}}(\omega_{\boldsymbol{i}}\rho) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{j}}^{(\boldsymbol{i})}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{j}}(\omega_{\boldsymbol{i}}\rho)\Big]. \qquad (18)$$

За формулами (18) розраховували переміщення в однорідному порожнистому циліндрі з відносними радіусами внутрішньої поверхні $\rho_0 = 0,5$ та зовнішньої $\rho_1 = 1$.

τ	$\boldsymbol{u}(0.75,\tau)\cdot 10^4$ Лаплас	$\boldsymbol{u}^*(0.75,\tau)\cdot 10^4$, Лагерр					
		N=28	N=34	N=48	N=52	N=56	N=60
0.1	0.0550	0.0856	0.0708	0.0618	0.0576	0.0564	0.0554
0.5	0.4378	0.4367	0.4407	0.4421	0.4405	0.4394	0.4383
1.0	0.6714	0.5810	0.6126	0.6348	0.6533	0.6612	0.6692
1.5	0.4444	0.4530	0.4505	0.4492	0.4474	0.4461	0.4449
2.0	0.1423	0.2346	0.2032	0.1801	0.1604	0.1524	0.1435
2.5	0.0013	0.0600	0.0345	0.0175	0.0048	0.0029	0.0013

У табл. подано результати обчислення зазначених переміщень у середині циліндра $\rho = 0,75$ для різних значень τ та різної кількості членів ряду за Лагерром порівняно з результатами розрахованими в порожнистому циліндрі з використанням інтегрального перетворення Лапласа [4]. З наведеного видно, що хороша збіжність двох методів простежується при утриманні 60 членів ряду за поліномами Лагерра. В подальших дослідженнях утримували саме стільки членів ряду.

За результатами, отриманими для неоднорідного циліндра, було проведено числове дослідження напруженого стану в тришаровому компо–

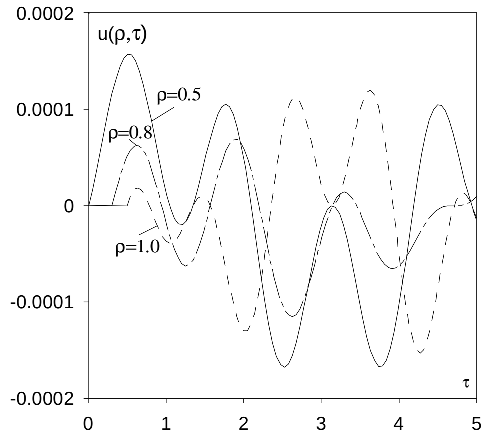

Рис. 2

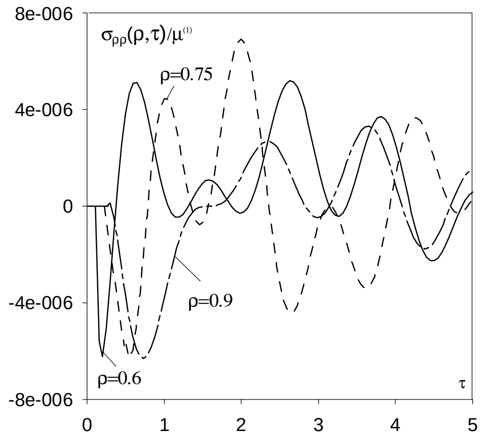

Рис. 3

зиті. Числовий аналіз проводили для тришарового циліндра, виготовленого з кераміки (Al_2O_3) ($\boldsymbol{E}_1 = 70$ ГПа, $\nu_1 = 0{,}33$) й алюмінієвого сплаву ($\boldsymbol{E}_2 = 343$ ГПа, $\nu_2 = 0{,}22$), причому циліндричні шари ($\rho_0 = 0{,}5$; $\rho_1 = 0{,}6$; $\rho_2 = 0{,}9$; $\rho_3 = 1$) з кераміки були зовнішнім і внутрішнім шаром, а з алюмінієвого сплаву – серединним.

Навантаження внутрішньої поверхні складеного циліндра було імпульсного типу

$$\boldsymbol{p}_1(\tau) = \begin{cases} \left[(0.5-\tau)^2 - 0.25\right]^2, \tau \le 1 \\ 0, \qquad\qquad \tau > 1 \end{cases}.$$

На рис. 2 зображено розподіл радіальних переміщень у часі для різних значень радіальної змінної. Наведені результати відповідають фізичній картині деформування циліндричного тіла – час приходу сигналу відповідає геометричному розташуванню точки, перший імпульс фактично повторює імпульс навантаження. На рис. 3 показано результати обчислення безрозмірних радіальних напружень на поверхнях поділу циліндричних шарів і в центрі композитного тіла.

З наведеного видно, що після проходження імпульсу навантаження зазначені напруження зменшують амплітуду коливань і виконують їх біля положення статичної рівноваги. Вплив неоднорідності циліндричного тіла відчутно простежується в перші після проходження імпульсу моменти часу і внаслідок накладання набігаючих і відбитих від поверхонь спряження хвиль нівелюється.

---

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / Абрамовиц М., Стиган И. – М., 1979.

2. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пружності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим Г.Т. – Львів, 1994.
3. *Галазюк В.А.* Метод поліномів Чебишева–Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В.А. Галазюк // Доп. АН УРСР. Сер.А. – 1981. – №1. – С. 3–7.
4. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон– М., 1955.
5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин – М., 1976.

МЕТОД ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА В ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-СЛОИСТОГО ЦИЛИНДРА

Владимир КОЛОДИЙ, **Игорь ТУРЧИН**

Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

С использованием метода полиномов Лагерра получено решение задачи теории упругости о радиальных колебаниях неоднородного цилиндра. Подано сравнительный анализ результатов для однородного цилиндра с результатами полученными методом интегрального преобразования Лапласа.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, радиально-слоистый цилиндр, полиномы Лагерра.

THE LAGUERRE POLYNOMIALS METHOD IN DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR MULTI-LAYERED CYLINDER

Volodymyr KOLODIY, Igor TURCHYN

Ivan Franko National University of L'viv, Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine

Using the Laguerre polynomials method the solution of the problem of elasticity on the radial vibrations of an nonhomogeneous cylinder. A comparative analysis of results for a homogeneous cylinder with the results obtained by the method of Laplace transforms.

Keywords: dynamic problem of elasticity, radial-layered cylinder. Laguerre polynomials.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2010
Прийнята до друку 22.12.2010