ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 74–82
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 74–82

УДК 519.21

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ ГІЛЛЯСТОГО ПРОЦЕСУ З ДОВІЛЬНОЮ КІЛЬКІСТЮ ТИПІВ ЧАСТИНОК ТА ІММІГРАЦІЄЮ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Галина ТИМКІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tumkiv_ gala@mail.ru

Результатом дослідження є гранична задача для докритичного гіллястого випадкового процесу з довільною кількістю типів частинок та імміграцією. Розглянута задача є узагальненням задачі, яку розв'язав С. Алієв [4], але для скінченної кількості типів частинок.

Ключові слова: гіллястий процес, ядро, докритичний процес, функціонал Лапласа, умовний твірний функціонал, факторіальні моменти.

1. Вступ. Гіллясті процеси є математичною моделлю багатьох явищ. Зокрема, важливим напрямом є процес з імміграцією. Важливі праці цього напряму: Севастьянов В.А. [1], а також Хічот С.Р. [5]. У кінці 60-х на початку 70-х років XX ст. почали розглядати процеси з довільною кількістю типів частинок. Цікавий підхід запропонував Шуренков В.М. [2] та Єлейко Я.І. [3]. Розглянуто граничну теорему для гіллястого процесу з довільною кількістю типів та імміграцією.

2. Опис моделі. Розглянемо спочатку найпростіший випадок гіллястих процесів з імміграцією, тобто випадок двох типів частинок.

У цьому випадку поряд з розмноженням і загибеллю ще відбувається постійний приріст частинок зовні, що керується випадковим механізмом, який не залежить від кількості наявних частинок. Нехай маємо частинки одного типу. Кожна існуюча в цей момент частинка незалежно від свого походження та віку, незалежно від інших частинок з ймовірністю [1]

$$\delta_{k1} + p_k\Delta t + o(\Delta t)$$

перетворюється за час $\Delta t \to 0$ в k частинок. Крім того, незалежно від наявності довільної кількості частинок з ймовірністю [1]

$$\delta_{k0} + q_k\Delta t + o(\Delta t)$$

за проміжок часу $\Delta t \to 0$ виникає k частинок. Ці частинки, які виникали, надалі поводять себе так само як і наші вихідні частинки. Ми припускаємо, що щільності

p_k, q_k задовольняють такі умови [1]:

$$p_1 < 0, \quad p_k \geqslant 0 \quad (k \neq 0), \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0, \tag{1}$$

$$q_0 < 0, \quad q_k \geqslant 0 \quad (k > 0), \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0. \tag{2}$$

Введемо твірні функції [2]

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad g(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k, \tag{3}$$

$$F(t; s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) s^k, \tag{4}$$

де $P_k(t)$ – ймовірність того, що кількість частинок $\mu(t)$ в момент часу t дорівнює k, якщо при $t = 0$ частинок не було. З умови (10) випливає, що $g(1) = f(1) = 0$. Наша мета – за даними $f(s)$, $g(s)$ необхідно знайти розподіл випадкової величини $\mu(t)$ і граничну поведінку при $t \to \infty$.

Покажемо насамперед, що описаний так процес є частковим випадком гіллястого процесу з двома типами частинок. Для цього, крім відомих уже частинок, які ми назвемо частинками типу T_1, введемо ще одну фіктивну частинку типу T_0. Задамо ймовірності перетворення частинок за час $\Delta t \to 0$ так:

$$P\{T_0 \to T_0\} = 1 + q_0 \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{T_0 \to T_0 + kT_1\} = q_k \Delta t + o(\Delta t), \quad k \neq 0,$$
$$P\{T_1 \to T_1\} = 1 + p_1 \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{T_1 \to kT_1\} = p_k \Delta t + o(\Delta t), \quad k \neq 1.$$

Позначимо $P^i_{\alpha_0,\alpha_1}(t)$ ймовірність того, що одна частинка типу T_i за час t перетвориться в сукупність α_0 частинок типу T_0 і α_1 частинок типу T_1. Нехай при $\Delta t \to 0$

$$P^i_{\alpha_0,\alpha_1}(\Delta t) = \delta^i_{\alpha_0,\alpha_1} + P^i_{\alpha_0,\alpha_1} \Delta t + o(\Delta t),$$

де $\delta^0_{1;0} = 1$, $\delta^1_{0;1} = 1$, а інші $\delta^i_{\alpha_0,\alpha_1}$ дорівнюють нулю. Введемо твірні функції

$$F^i(t; s^0, s^1) = \sum_{\alpha_0,\alpha_1} P^i_{\alpha_0,\alpha_1} (s^0)^{\alpha_0} (s^1)^{\alpha_1},$$

$$f^i(s^0, s^1) = \sum_{\alpha_0,\alpha_1} p^i_{\alpha_0,\alpha_1} (s^0)^{\alpha_0} (s^1)^{\alpha_1}. \tag{5}$$

Неважко бачити, що твірні функції (3) і (4) зв'язані між собою так:

$$f^0(s^0, s^1) = s^0 g(s^1), \qquad f^1(s^0, s^1) = f(s^1), \tag{6}$$

$$F^0(t; s^0, s^1) = s^0 F(t, s^1). \tag{7}$$

Отож, імміграцію можна подати завдяки розмноженню фіктивної частинки типу T_0, яка, породивши нові частинки типу T_1, сама не розмножується і не зникає. У побудованому гіллястому процесі типи T_0 і T_1 становлять клас типів, які між собою контактують. Причому $\{T_1\}$ – замкнутий клас, а $\{T_0\}$ – фіктивний клас.

Для цього процесу з двома типами частинок T_0 і T_1 справджується система диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = f^i(F^0, F^1), \quad i = 0, 1 \tag{8}$$

з початковими умовами

$$F^i(0; s^0, s^1) = s^i, \quad i = 0, 1, \tag{9}$$

або рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = f^0(s^0, s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^0} + f^1(s^0, s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^1} \tag{10}$$

з тими самими початковими умовами. У нашому випадку система (8) набуде вигляду

$$\frac{dF^0}{dt} = F^0 g(F^1), \tag{11}$$

$$\frac{dF^1}{dt} = f(F^1), \tag{12}$$

а рівняння в частинних похідних таке:

$$\frac{\partial F^i}{\partial t} = s^0 g(s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^0} + f(s^1)\frac{\partial F^i}{\partial s^1}. \tag{13}$$

З (7) та (13) отримуємо рівняння для

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g(s)F + f(s)\frac{\partial F}{\partial s}, \tag{14}$$

яке потрібно розв'язати за початкової умови

$$F(0; s) = 1. \tag{15}$$

З іншого боку, можна отримати зручний вираз для $F(t; s)$ за допомогою системи рівнянь (11), (12). Рівняння (12) з початковою умовою (9) розв'язується окремо. Позначимо його розв'язок через $\Phi(t; s)$ (вважаючи $s^1 = s$). Тоді з (11), (9) та (7) можна отримати

$$F(t; s) = \exp\Big(\int_0^t g(\Phi(u; s))du\Big). \tag{16}$$

Ця формула виражає твірну функцію $F(t; s)$ гіллястого процесу з імміграцією через твірну функцію $\Phi(t; s)$ гіллястого процесу без імміграції.

3. Гранична теорема для гіллястого випадкового процесу з імміграцією. Розглянемо послідовність гіллястих процесів Гальтона-Ватсона, що залежить від деякого малого параметра ε [4] з довільною кількістю типів частинок D та дискретним часом. На множині D задана σ-алгебра $\mathcal{F}$, яка містить всі одноточкові множини. Нехай випадкова міра $\xi(t, \varepsilon, A)$ позначає кількість частинок процесу з параметром ε, що належить множині $A \in \mathcal{F}$.

Умовні ймовірності та умовні математичні сподівання за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу $d \in D$, будемо позначати, відповідно, P_d та M_d.

Введемо функціонал Лапласа

$$F(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot)) = M_d \exp\left\{-\int\limits_D \varphi(u)\xi(t,\varepsilon,du)\right\}$$

і твірний функціонал

$$h(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot)) = M_d \exp\left\{\int\limits_D \ln\varphi(u)\xi(t,\varepsilon,du)\right\},$$

де $\varphi(u)$ є $\mathcal{F}$-вимірна.

Математичне сподівання процесу з параметром ε кількості частинок, що належать множині $A \in \mathcal{F}$ за одиницю часу за умови, що в початковий момент часу була одна частинка типу $d \in D$, ми позначимо через $M_d(\varepsilon, A)$.

Введемо такі позначення:

$$Q(u,t,\lambda(\cdot)) = \exp\left\{\int\limits_D g(u,K(u,s,\lambda(\cdot)))ds\right\},$$

$$g(t,\lambda(\cdot)) = \int\limits_0^\infty \left(e^{\int\limits_0^\infty \lambda(t)\varphi(dt)} - 1\right) N(\varphi(dt)),$$

де $\operatorname{Re}\lambda(\cdot) \leqslant 0$, N – міра. Функція $K(s,t,\lambda(\cdot))$ є логарифмом перетворення Лапласа, деякого нескінченно-подільного процесу

$$M\left[e^{\int\limits_D \lambda(s)\mu(t,ds)} \quad \Big| \quad \mu(0,A) = y(A)\right] = e^{\int\limits_D y(ds)K(s,t,\lambda(u))}.$$

Тут $u \in D$, $t \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\lambda(u) \leqslant 0$, $y(u) \geqslant 0$, $y(D) < \infty$, $\mu(t,A)$ – випадкова міра, яка позначає масу частинок у момент часу t, які належать множині A, де $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра на множині D.

Вважаємо, що процес стохастично неперервний, тому можна ввести кумулянту

$$H(u,\lambda(\cdot)) = \lim_{\tau\to 0} \frac{K(u,\tau,\lambda(u)) - \lambda(u)}{\tau}, \quad (u \in D, \quad \operatorname{Re}\lambda(u) \leqslant 0).$$

Норму оператора надалі позначатимемо $\|\cdot\|$.

Припускаємо, що для процесу з параметром ε правильне зображення

$$M_d(\varepsilon,A) = E + \varepsilon C + o(\varepsilon), \tag{17}$$

де E–одиничний оператор; C–обмежений оператор, який залежить від множини A та d. Припускаємо, що існує таке число C_0, що $\forall\ d \in D\ \forall\ A \in \mathcal{F}$ справджується нерівність

$$\|C(d,A)\| \leqslant C_0.$$

Розглянемо послідовність функцій $b_1(\varepsilon,u)$ $(u \in D)$ таких, що $b_1(\varepsilon,u) \to \infty$ для всіх $u \in D$ при $\varepsilon \to 0$. Вважаємо, що існує деяка міра $q(A)$, $b_1(\varepsilon,u)$ інтегрована стосовно цієї міри і $\int_A b_1(\varepsilon,u)\,q(du) = b(\varepsilon,A)$ $(A \in \mathcal{F})$ і $b(\varepsilon,A) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Далі розглянемо випадкові міри

$$\mu(t,\varepsilon,A)=\frac{\xi([t/\varepsilon],\varepsilon,A)}{b(\varepsilon,A)},$$

$$\xi(0,\varepsilon,A)=\left[\int\limits_A x(u)b(\varepsilon,du)\right],$$

де $[a]$ – ціла частина числа a; $x(u)$ – $\mathcal{F}$-вимірна функція.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай правильне розвинення (17). Якщо*
1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,b_1(\varepsilon,s)\,[F(\varepsilon,s,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))-\exp(\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s))]=H(s,\lambda(\cdot))$*;*
2) $\dfrac{\partial H(s,\lambda(u))}{\partial\lambda}=C(s,\lambda(u))$ *обмежена по всіх аргументах*

$$\frac{1}{\varepsilon}[G(\varepsilon,s,\exp(\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)))-1]\longrightarrow g(s,\lambda(\cdot)),$$

де $G(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))$ *– твірний функціонал для іммігруючих частинок, то скінченновимірні розподіли гіллястого процесу Гальтона-Ватсона з імміграцією та довільною кількістю типів частинок, що відповідають випадковій мірі* $\mu(t,\varepsilon)$*, слабо збігається при* $\varepsilon\to 0$ *до скінченновимірних розподілів багатовимірного гіллястого процесу з неперервним фазовим простором та імміграцією.*

Доведення. Розглянемо праву частину співвідношення

$$\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_D P_d(j,du)\varphi^j(u)=[F(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))]^iG(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))$$

$i,j=0,1,2,\ldots$. В схемі серій вона набула вигляду

$$[F(\varepsilon,d,t,\varphi(\cdot))]^i\prod_{k=0}^{1/\varepsilon-1}G(\varepsilon,d,t,F(\varepsilon,k,t,\varphi(\cdot))). \tag{2}$$

Замінимо ε на $[t/\varepsilon]$ і $\varphi(s)=e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)}$. Тоді (2) перепишемо так:

$$[F([t/\varepsilon],d,s,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})]^i\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1}G(\varepsilon,t,d,F(\varepsilon,k,t,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})).$$

У розглянутому випадку

$$i=\xi(0,\varepsilon,A),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{F([t/\varepsilon],t,d,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})\right\}^{\left[\int\limits_A x(u)b(\varepsilon,du)\right]}=e^{-\int\limits_D x(ds)K(s,t,\lambda(u))}.$$

Розглянемо другий множник

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1}G(\varepsilon,t,d,F(\varepsilon,k,t,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)}))=$$

$$= \exp\left\{ \sum_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} \log G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})) \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G\left(\varepsilon, t, d, e^{[b(\varepsilon,s)\log F(\varepsilon,k,t,e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})]/b_1(\varepsilon,s)}\right) \right\}.$$

Якщо прийняти

$$g(\varepsilon, \lambda(\cdot)) = \varepsilon \ln G\left(\varepsilon, t, d, e^{-\lambda(\cdot)/b_1(\varepsilon,\cdot)}\right),$$

то

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})) =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} g\left(\varepsilon, b(\varepsilon, s) \ln F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})\right) \right\}.$$

Нехай

$$K(\varepsilon, t, \lambda(s)) = b(\varepsilon, s) \ln F\left([t/\varepsilon], t, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)}\right).$$

Підставляючи послідовно $t = 0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ \ldots,\ (k-1)\varepsilon$, отримаємо

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G\left(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, t, e^{-\lambda(s)/b_1(\varepsilon,s)})\right) = \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g\left(\varepsilon, K(\varepsilon, i\varepsilon, \lambda(\cdot))\right) \right\}.$$

Очевидно,

$$\int_0^t g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) = \int_{[t/\varepsilon]/\varepsilon}^t g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) +$$

$$+ \int_0^{[t/\varepsilon]/\varepsilon} g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))).$$

Якщо абсолютну величину суми перших трьох доданків позначимо через $\zeta(\varepsilon, t, \lambda(\cdot))$, то $\zeta(\varepsilon, t, \lambda(\cdot)) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ рівномірно по $t, \lambda(\cdot)$ в кожному скінченному інтервалі $[0 \leqslant t \leqslant T, \Lambda \leqslant \operatorname{Re} \lambda(\cdot) \leqslant 0]$.

Далі

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - \int_0^t g(\cdot, K(s, \lambda(s), ds)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \zeta(\varepsilon, t, \lambda(s)) + \frac{1}{\varepsilon} \left| \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} g(\cdot, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \zeta(\varepsilon, t, \lambda(s)) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1} \left| g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) - g(\varepsilon, K(i\varepsilon, s, \lambda(s))) \right| +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}\Big|g(\varepsilon,K(i\varepsilon,s,\lambda(s)))-g(\cdot,K(i\varepsilon,s,\lambda(s)))\Big|.$$

$K(\varepsilon,t,\lambda(\cdot))\longrightarrow K(\cdot,t,\lambda(\cdot))$ рівномірно по t

$$\sup_t\Big|K(\varepsilon,t,\lambda(\cdot))-K(\cdot,t,\lambda(\cdot))\Big|\longrightarrow 0.$$

Тоді

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant[t/\varepsilon]-1}\Big|K(\varepsilon,i\varepsilon,\lambda(\cdot))-K(\cdot,i\varepsilon,\lambda(\cdot))\Big|\longrightarrow 0.$$

Друга умова теореми еквівалентна умові

$$g(\varepsilon,\lambda(\cdot))\longrightarrow g(\cdot,\lambda(\cdot)),$$
$$\sup_\varepsilon|g(\varepsilon,\lambda(\cdot))-g(\varepsilon,\mu(\cdot))|\longrightarrow 0,$$
$$\operatorname{Re}\mu(\cdot)\leqslant 0.$$

Якщо прийняти

$$\delta(h)=\sup_{Re(\lambda(\cdot)-\mu(\cdot))\leqslant 0}\sup_\varepsilon|g(\varepsilon,\lambda(\cdot))-g(\varepsilon,\mu(\cdot))|,$$

то $\delta(h)\downarrow 0$ при $h\downarrow 0$.

Далі розглянемо

$$\Big|g(\varepsilon,K(\varepsilon,i\varepsilon,\lambda(s)))-g(\varepsilon,K(\cdot,i\varepsilon,\lambda(s)))\Big|\leqslant\delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big|K(\varepsilon,s,\lambda(s))-K(\cdot,s,\lambda(s))\Big|\right).$$

Отже, другий доданок у (11) не перевищує

$$\frac{[t/\varepsilon]}{\varepsilon}\delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big|K(\varepsilon,s,\lambda(s))-K(\cdot,s,\lambda(s))\Big|\right)\leqslant$$
$$\leqslant t\delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big|K(\varepsilon,s,\lambda(s))-K(\cdot,s,\lambda(s))\Big|\right).$$

З того, що $g(\varepsilon,\lambda(\cdot))\to g(\cdot,\lambda(\cdot))$ рівномірно по кожному скінченому інтервалі випливає, що третій доданок у правій частині (11) не перевищує

$$\frac{[t/\varepsilon]}{\varepsilon}\delta(\varepsilon)\leqslant t\delta(\varepsilon),\quad \delta(\varepsilon)\to 0.$$

Так знаходимо, що

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}g(\varepsilon,K(\varepsilon,i\varepsilon,\lambda(s)))-\int_0^t g(ds,K(\cdot,s,\lambda(s)))\right|\leqslant$$
$$\leqslant\zeta(\varepsilon,t,\lambda(s))+\delta\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\mid K(\varepsilon,s,\lambda(s))-K(\cdot,s,\lambda(s))\mid\right)+t\delta(\varepsilon).$$

Оскільки $0\leqslant t\leqslant T$, $\Lambda\leqslant\lambda\leqslant 0$, то

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{[t/\varepsilon]-1}g(\varepsilon,(K(\varepsilon,i\varepsilon,\lambda(s)))\longrightarrow\int_0^t g(ds,K(\cdot,s,\lambda(s))),$$

або

$$\prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)})) \longrightarrow \exp\left\{\int_0^t g(ds, K(\cdot, s, \lambda(s)))\right\} = Q(t, d, \lambda(\cdot)).$$

Отже, ми отримаємо

$$[F(\varepsilon, t, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)})]^{\left[\int\limits_A x(u)b(\varepsilon,du)\right]} \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{[t/\varepsilon]-1} G(\varepsilon, t, d, F(\varepsilon, k, d, e^{-\lambda(s)/b(\varepsilon,s)})) \longrightarrow Q(d, t, \lambda(s)) e^{-\int\limits_D x(ds)K(s,t,\lambda(u))}.$$

$\square$

4. Висновки. Показано, що при $\varepsilon \to 0$ розподіли процесів $\mu(\cdot, t, A)$ слабо збігаються до розподілу гіллястого процесу з неперервним фазовим простором та імміграцією. Отож, при розширенні класу кількості типів частинок до довільної кількості певні властивості все ж таки зберігаються.

Список використаної літератури

1. *Севастьянов В.О.* Ветвящиеся процессы / *Севастьянов В.О.* – М., 1971.
2. *Шуренков В.М.* Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов / *Шуренков В.М.* // Теория вероятности и её применение. – 1976. – Т. XXI, Вып. 3. – С. 548-558.
3. *Єлейко Я.И.* Переходные явления для ветвящихся процессов с произвольним числом типов и дискретным временем / *Єлейко Я.И.* // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – С. 198-204.
4. *Алиев С.А.* Предельная теорема для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией / *Алиев С.А.* // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 656-659.
5. *Heathcote C.R.* A branching process allowing immigratio / *Heathcote C.R.* // J. Roj. stats. Joc. – 1965. – Vol. 27, № 1. – P. 138-143.

Стаття: надійшла до редакції 02.11.2010
прийнята до друку 21.09.2011

LIMIT THEOREM FOR BRANCHING PROCESS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF TYPES OF PARTICLES AND IMMIGRATION

Yaroslav YELEYKO, Iryna BAZYLEVYCH, Galyna TYMKIV

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: tumkiv_gala@mail.ru

Result is the limit problem for subcritical branching process with an arbitrary number of types of particles and immigration. The problem is a generalization of the problem which was solved by S. Alijev [4], but with finite number of types of particles.

Key words: branching process, the kernel, undercritical process, Laplace functional, conventional generators functional, factorial moments.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВЕТВИСТОГО ПРОЦЕССА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ТИПОВ ЧАСТИЦ И ИММИГРАЦИЕЙ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Ирина БАЗИЛЕВИЧ, Галина ТЫМКИВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tumkiv_ gala@mail.ru

Результатом исследования является предельная задача для докритического ветвящегося процесса, а рассмотренная задача является обобщением задачи, которая была решена С. Алиевым [4], но для конечного числа типов частиц.

Ключевые слова: ветвящийся процесс, ядро, докритический процесс, функционал Лапласа, условный образующий функционал, факториальные моменты.